МОДЕЛЬ ИЗМЕНЕНИЯ ЧИСЛЕННОСТИ С УЧЁТОМ ВНУТРИВИДОВОЙ КОНКУРЕНЦИИ (модель Ферхюльста)

***Цель работы*: изучить зависимость численности популяций от пищевых и пространственных ресурсов, расширить представление о математических моделях в экологии.**

Логистическая модель изменения численности популяции. Модель динамики численности популяции при ограниченных ресурсах предложил в 1838–1845 гг. французский математик *П.Ф. Ферхюльст*. Построение этой математической модели основано на следующих допущениях:

1 рост популяции *ограничен* количеством пищевых ресурсов и доступным пространством, пригодным для местообитания – т. е. биологической ёмкостью среды;

2 Скорости процессов размножения, естественной гибели и гибели в результате конкурентных конфликтов пропорциональны численности особей в данный момент времени.

3 Физиологические и биохимические процессы не учитываются.

4 Учитывается внутривидовая конкуренция за место обитания, за пищевые ресурсы, которая тем интенсивнее, чем выше плотность популяции.

5 Популяция не взаимодействует с другими популяциями.

τ

Введём обозначения:

$N_{(t)}$ – численность популяции в момент t;

N_{min} – минимальная численность, обеспечивающая воспроизводство.

Будем считать, что *средняя удельная рождаемость* выражается положительной постоянной b, не зависящей от времени и размера популяции, а *средняя удельная смертность* в результате естественных причин выражается коэффициентом d, так же не зависящим от времени и плотности популяции.

По мере увеличения плотности популяции возрастает число конкурентных конфликтов со смертельным исходом, вероятность которых определяется величиной $-d\,N^2$, где d – *коэффициент гибели за счёт конкурентных конфликтов.*

Составим уравнение динамики численности популяции:

$$\frac{dN}{d\tau} = (b - d - \delta N)\,N = rN - \delta N^2 \quad ; \qquad (2.1)$$

где r – биотический потенциал популяции ($r = b - d$).

Решаем нелинейное дифференциальное уравнение (2.1):

$$\int_{N_0}^{N} \frac{dN}{d\tau} = \int_0^{\tau} (rN - \delta N^2)\,d\tau \Rightarrow ln\frac{N}{N_0} - ln\frac{rN - \delta N}{r - \delta N_0} = r\tau \qquad (2.2)$$

Отсюда следует уравнение изменения численности в интегральной форме:

$$N(\tau) = \frac{N_0 r}{(r - \delta N_0)\, e^{-r\tau} + \delta N_0}$$

, при $\tau \to \infty$ $N \to N_{max} = \frac{r}{\delta}$. (2.3)

Поскольку численность популяции в естественных условиях никогда не остаётся постоянной, а испытывает колебания вблизи максимального значения, *характеристической* величиной процесса принято считать $T_{0,9}$ – момент времени, когда численность популяции составляет 90 % от стационарной (максимальной).

Координаты *точки перегиба* графика $N_{(t)}$–T_k и N_k (2.4) – это критический момент развития, когда начинает проявляться межвидовая конкуренция:

$$N_k = \frac{r}{2\delta} \qquad (2.4)$$

Если известно наибольшее число особей при данной биологической ёмкости среды (N_{max}), уравнение для построения модели приобретает вид:

$$N_{\tau} = (b - d)\, N_o \left(\frac{N_{\max} - N_o}{N_{\max}} \right) + N_o \qquad (2.5)$$

Задание.

1. Используя данные своего варианта (см. табл. 3) построить логистическую модель изменения численности популяции.
2. Интерпретировать модель, описав динамику популяции по следующим параметрам:

- N_{max} – численность популяции в стационарном состоянии;
- $T_{0,9}$ – характеристическое время, когда численность популяции достигает 90 % от $N_{(max)}$;
- $N_{крит}$ и $T_{крит}$ – критическая численность и время, когда в популяции начинает проявляться внутривидовая конкуренция.

3. Сделать прогноз развития популяции.

Пример выполнения
Исходные данные

1. Рассчитаем биотический потенциал популяции: r = 4–0,5 = 3,5.

2. Используем уравнение изменения численности (1.3), рассчитаем с помощью ПК или калькулятора $N(t)$ для заданных параметров, согласно варианту, и построим график изменения численности (рис. 7):

Номер варианта	Вид животных	N_{min}	b, ед./год	d, ед./год	d, ед./год
1	Кролик	8	4	0,5	0,005

$$N(\tau)=\frac{N_0 r}{(r-\delta N_0)\,e^{-r\tau}+\delta N_0}=\frac{8\cdot 3{,}5}{\left(3{,}5-0{,}005\cdot 8\right)2{,}7^{-3{,}5t\tau}+0{,}005\cdot 8}$$

Сформируем таблицу значений для построения графика.

t, год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N, ед.	190,5	646,5	698,2	699,9	700	700	700	700	700	700

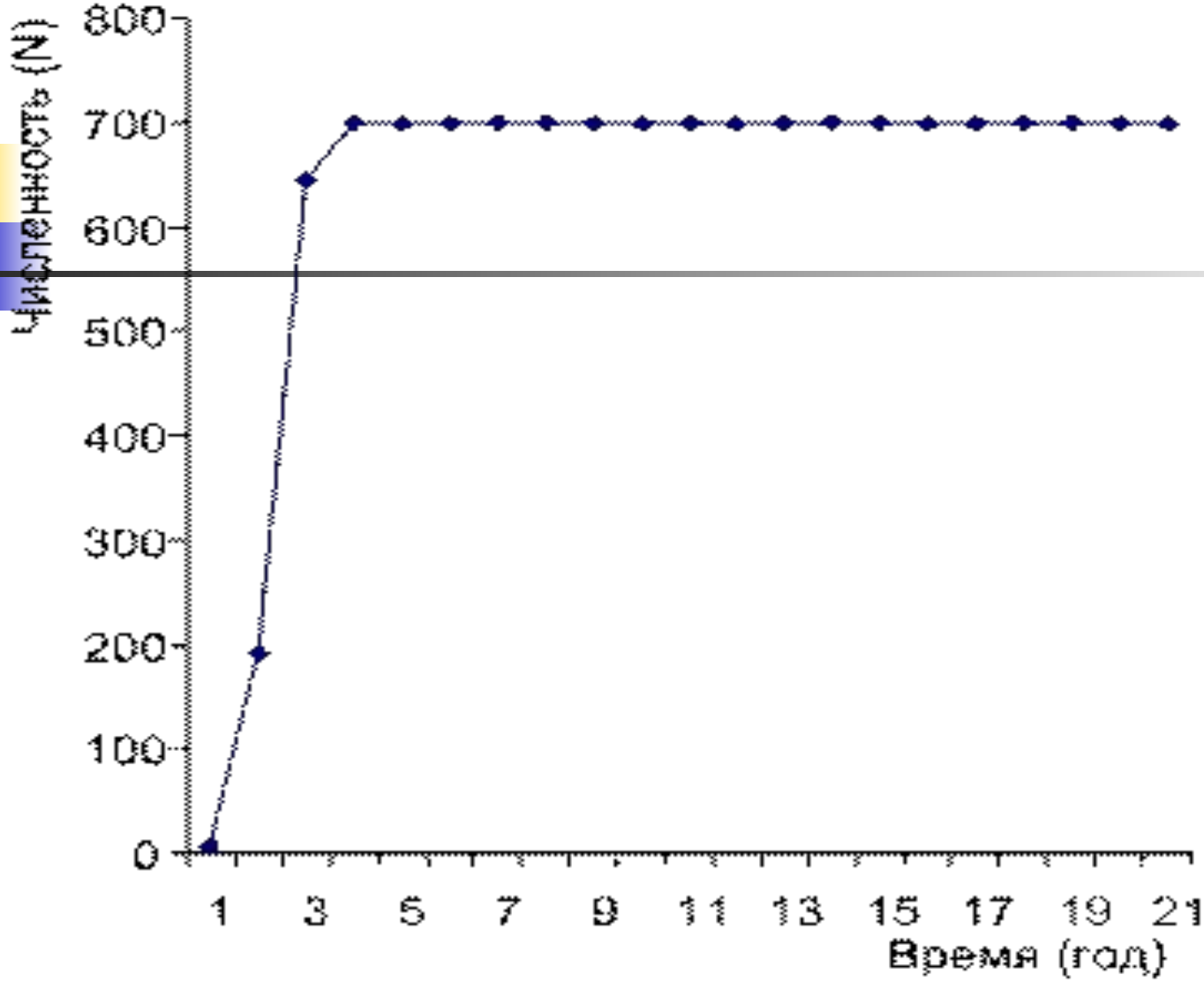

Рис. 7. Изменение численности популяции кролика

4. Оценим характеристические величины процесса по (2.3), (2.4):

$N_{max} = 3{,}5/0{,}005 = 700$

$T_{0,9} =$ » 3,5 года (по графику)

$N_{крит}$» $1/2\ N_{max} = 700/2 = 350$

$T_{крит}$» 3 года.

Вывод: популяция кроликов обладает положительным биотическим потенциалом и способна увеличить свою численность в данных условиях до 700 особей за 4,5 года. Первые 3 года популяция находится в состоянии активного (экспоненциального) роста и по достижении численности в 350 особей основным фактором регуляции численности будет являться внутривидовая конкуренция за пищевые и пространственные ресурсы.

Таблица 3

Варианты индивидуальных заданий

Вариант	Вид животных	N_{min}	*b*,ед./год	*d*, ед./год	*d*, ед./год
1	Кролик	10	3	0,3	0,005
2	Дятел	18	1,5	0,2	0,003
3	Косуля	12	0,5	0,05	0,007
4	Ёж амурский	10	3	0,3	0,002
5	Лось	25	0,4	0,04	0,001
6	Амурский тигр	45	0,2	0,08	0,002
7	Иволга	20	1	0,6	0,001
8	Филин	25	1,2	0,3	0,001
9	Голубая сорока	15	1,5	0,3	0,001
10	Дальневосточный леопард	30	0,3	0,07	0,001
11	Рысь	30	0,3	0,1	0,002
12	Кабан	45	1,2	0,1	0,001
13	Изюбр	12	0,5	0,3	0,008
14	Утка мандаринка	23	1,2	0,4	0,001
15	Серая цапля	15	1,1	0,2	0,001
16	Волк	2,0	2,0	0,5	0,008
17	Когтистая бурозубка	25	5	2	0,003
18	Маньчжурский заяц	15	3,5	2	0,001
19	Летяга	12	3	2	0,002
20	Обыкновенная белка	15	4	2	0,001
21	Азиатский бурундук	25	4	3	0,001
22	Ондатра	15	2	0,1	0,001
23	Лисица	5	1	0,3	0,001
24	Харза	5	1	0,4	0,001
25	Соболь	10	3	0,5	0,001
26	Солонгой	2	0,02	0,01	0,001
27	Выдра	25	2,5	0,1	0,001
28	Беркут	12	1,5	0,8	0,004
29	Вальдшнеп	30	4	2	0,001
30	Болотная сова	8	2	1	0,002

Дополнительное задание

1. Пользуясь демографическими данными о росте численности населения (табл. 4), рассчитайте средний биотический потенциал популяции и постройте модель экспоненциального роста популяции Homo sapiens (в мире в целом или по регионам).

2. Считая, что современная максимальная ёмкость биосферы по отношению к человеку составляет 6,5 млрд. чел, рассчитайте коэффициент смертности в результате внутривидовой конкуренции d и постройте модель логистического роста человеческой популяции.

3. В 2000 г. население земного шара составило около 6,2 млрд., а ёмкость среды ≈ 14 млрд. чел., определите год прекращения роста населения, исходя из того, что на Земле рождается 240 человек в минуту, а умирает 120.

Таблица 4

Численность населения, млн. чел. в мире в XX в. и прогноз на XXI в.
(по данным Интернет-проекта www. ecolife.ru)

Год	Мир в целом	В том числе						
		Россия, СССР, Россия и СНГ	Западная Европа	Северная Америка	Латинская Америка	Африка	Австралия и Океания	Зарубежная Азия
1900	1630	130	290	81	64	110	7	948
1920	1811	158	329	117	91	141	9	966
1940	2295	195	380	146	128	191	11	1244
1950	2527	180	398	166	165	222	13	1377
1960	3060	214	431	199	217	280	16	1668
1970	3727	243	467	226	283	363	19	2102
1980	4430	266	492	252	359	479	23	2584
1990	5294	289	509	277	441	643	27	3118
1995	5779	290	516	292	482	744	29	3408
2000	6228	297	524	306	523	856	31	3692
2005	8472	344	542	361	702	1583	41	4900