Дифференциальные уравнения

доцент кафедры Высшая математика, к.т.н.
Романова Екатерина Леонидовна

Лекция 3. Простейшие дифференциальные уравнения

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1 Основные понятия

Определение. Уравнение, в которое неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называются ***дифференциальным уравнением***.

Определение. Если в дифференциальном уравнении неизвестная функция является функцией одного независимого переменного, то оно называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{n}(x)) = 0,$$

где x – независимая переменная, $y(x)$ – искомая функция, $y', y'', \dots, y^{(n)}$ – производные искомой функции.

- **Определение.** ***Порядком дифференциального уравнения***, называется наивысший порядок входящей в уравнение производной.

Определение. Функция $y = \phi(x)$ называется ***частным решением*** дифференциального уравнения (1), если после замены

$$y \text{ на } \phi(x),\ \ y' \text{ на } \phi'(x), \dots, y^{(n)} \text{ на } \phi^{(n)}(x)$$

оно обращается в тождество, т.е. $F(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(n)}(x)) = 0$.

Функция $\phi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ называется ***общим решением*** дифференциального уравнения (1), если при соответствующем выборе произвольных постоянных $c_1, c_2, \dots, c_n$ функция $\phi(x)$ обращается в любое решение этого уравнения.

Процесс нахождения решения дифференциального уравнения называют ***интегрированием*** этого уравнения.

1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной *y′*. Геометрическая интерпретация

Определение. ***Поле направлений*** - совокупность отрезков, касательных к графикам решений уравнения: $y' = f(x, y)$

Определение. Совокупность точек плоскости, в которых угловой коэффициент касательной к графику решения $y' = f(x, y)$ сохраняет одно и то же значение, называется ***изоклиной***. Уравнение изоклин: $f(x, y) = C$, C=*Const*.

Определение. Линии, имеющие в каждой точке (x, y) направление, задаваемое уравнениями $y' = f(x, y)$, называются ***интегральными кривыми*** или интегральными линиями.

Теорема существования и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка:

- Пусть в дифференциальном уравнении $y' = f(x,y)$ функция $f(x,y)$ и ее частная производная $f'_y = f(x,y)$ непрерывны в некоторой области D плоскости Oxy. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ существует и притом единственное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

В каждой точке $(x_0, y_0) \in D$ число $f(x_0, y_0)$ выражает угловой коэффициент касательной к кривой $y = y(x)$. Поэтому каждой точке области D уравнение $y' = f(x,y)$ ставит в соответствие некоторое направление – геометрически его можно изобразить черточкой, проходящей через эту точку. В точках изоклины направление поля одинаково, т.е. направление касательных в точках изоклины (или соответствующие черточки) параллельны. С помощью изоклин можно приближенно нарисовать вид интегральных кривых, т.е. решений дифференциальных уравнений. Этот метод называется ***методом изоклин****.*

Пример

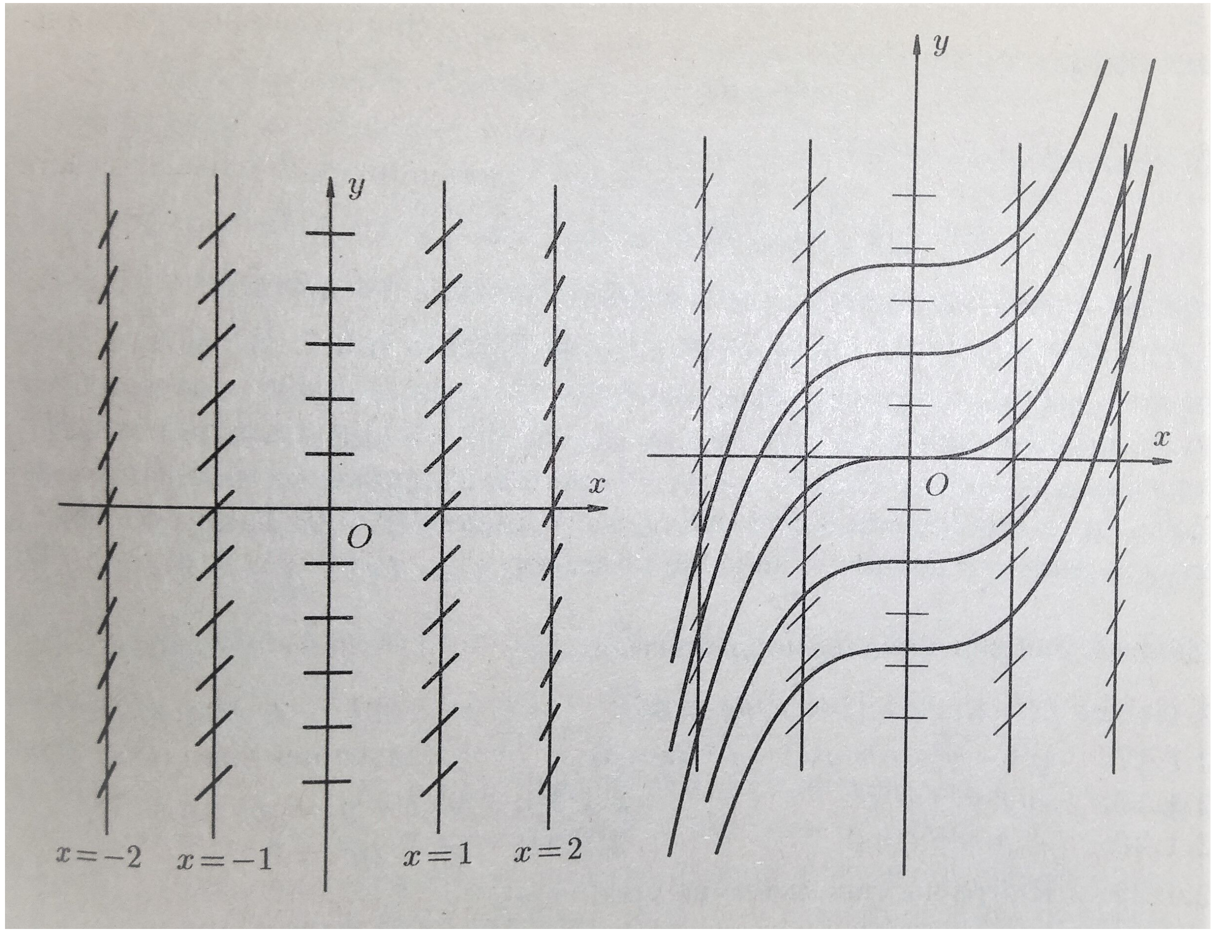
Методом изоклин построить приближенные графики интегральных кривых уравнения $y' = x^2$. Сравнить их с точными интегральными кривыми.

Решение.

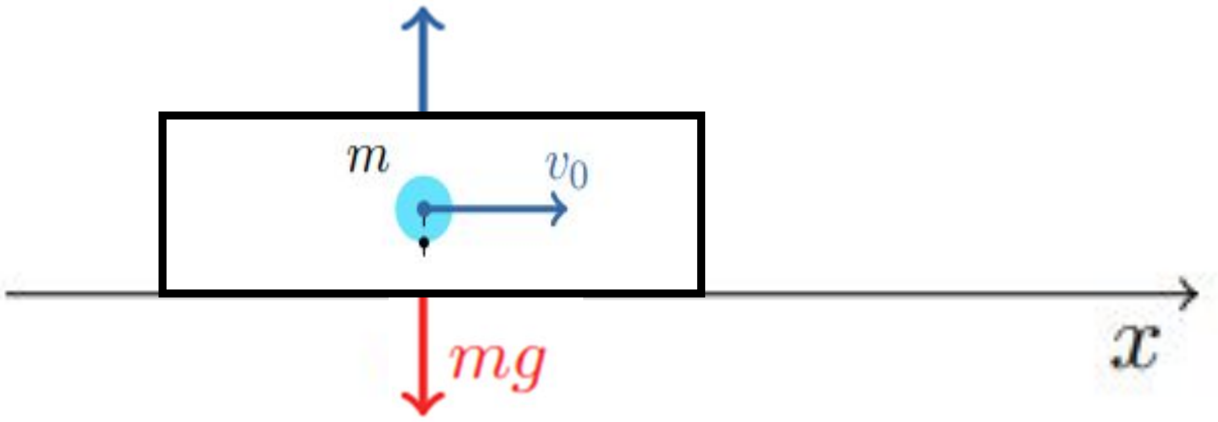
Имеем $f(x,y) = x^2$, $f'_y(x,y) = 0$. Условия теоремы существования и единственности выполняются во всех точках плоскости Oxy. При $x = 0$ и любом y имеем $y' = 0$, т.е. во всех точках оси Oy поле горизонтально. При $x = \pm 1$ и любом y имеем $y' = 1$ и поле образует с осью Ox угол 45^0 и т.д.

Построим интегральные кривые, которые в каждой точке касаются «поля».

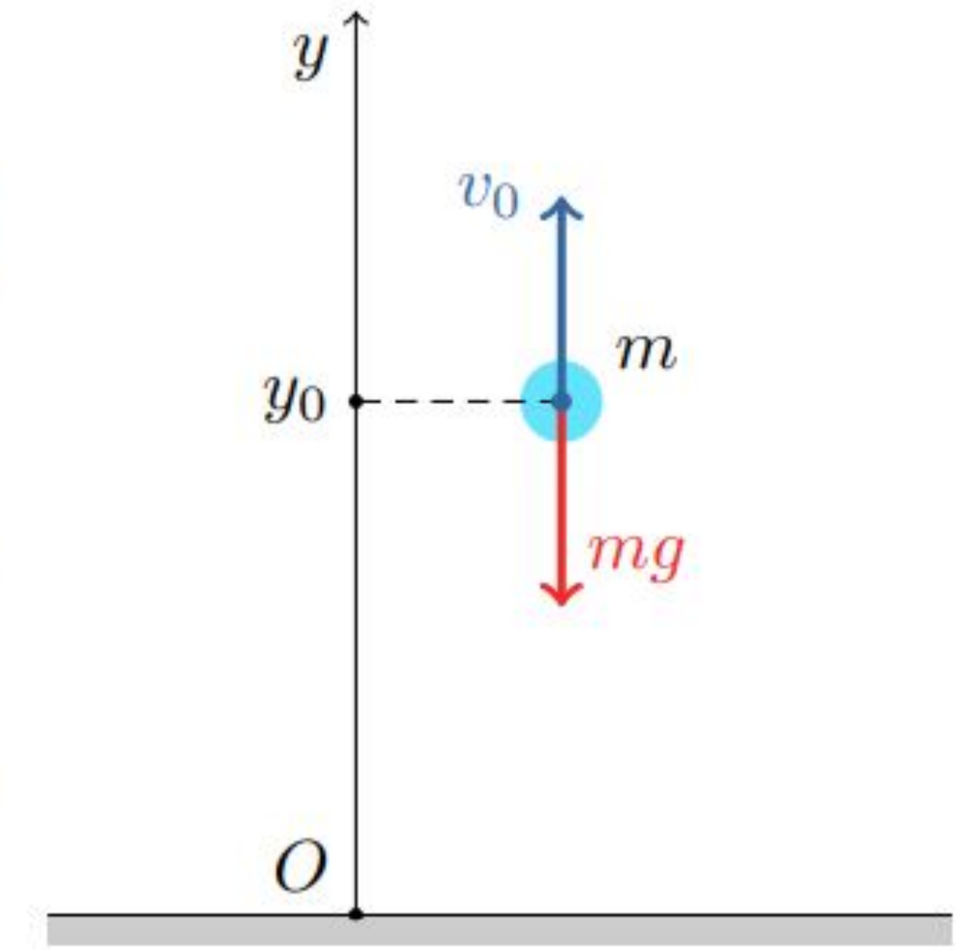
Полученные кривые напоминают кубические параболы. Точные интегральные кривые имеют вид $y = \frac{x^3}{3} + C$.



Модель 1. Движение без внешних сил



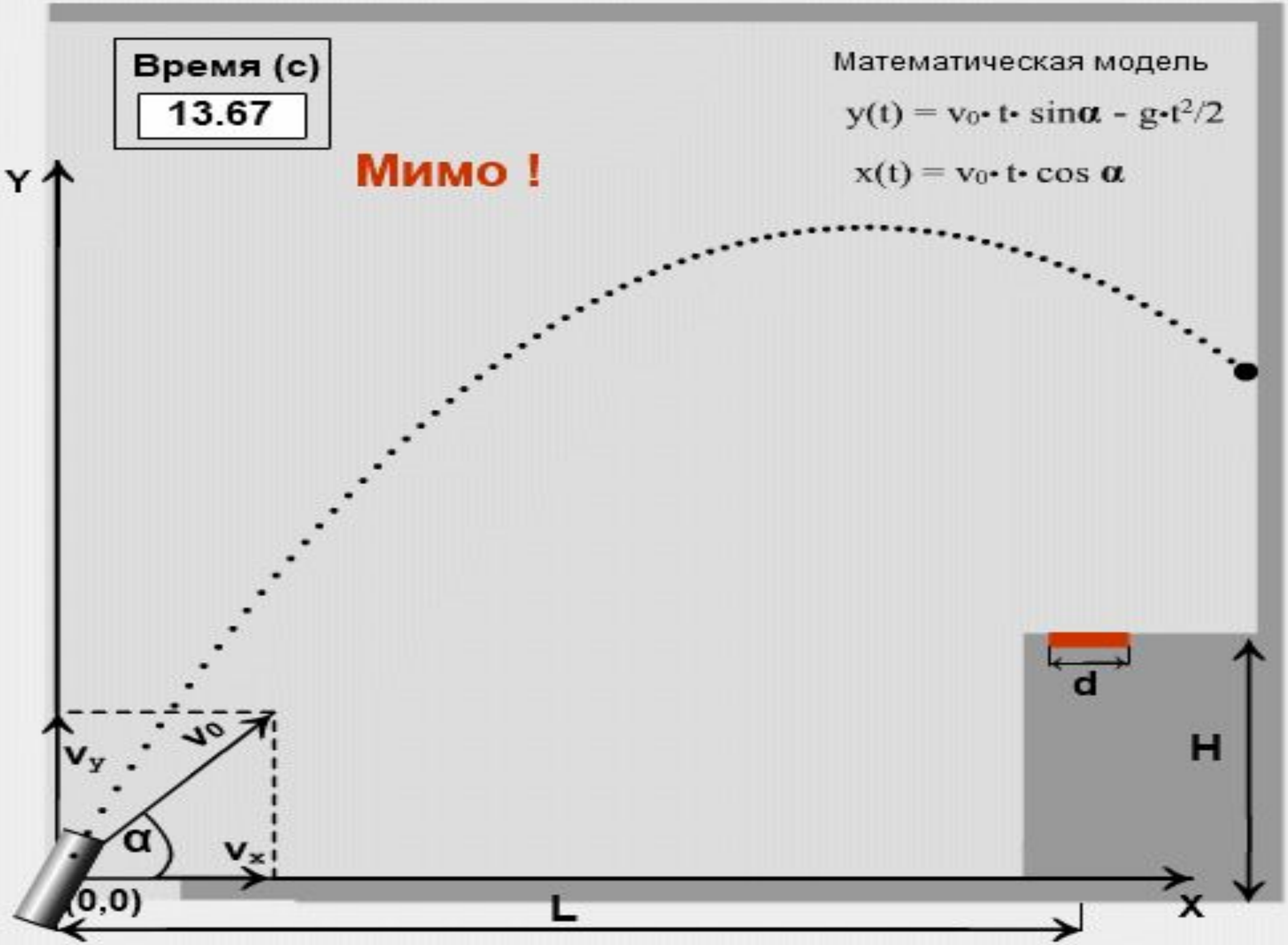
Модель 2. Вертикальное движение



Модель 3. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Математическое моделирование

Полет снаряда, выпущенного из пушки



Постоянные величины

L = 550 м - расст. до центра цели
H = 170 м - высота цели
d = 40 м - диаметр цели
r = 0,07 м - радиус снаряда
m - масса снаряда (кг)
k1 и k2 - коэффициенты

Управляемые параметры

v_0 - начальная скорость (м/с)

60 200 **88**

α - угол к горизонту

0° 90° **65**

Сопротивление воздуха

- (•) не учитывать
- ( ) учитывать

ПУСК ! Очистить

Траектория движения – парабола $y = -ax^2 + bx$

Большой зенитный телескоп LZT (Large Zenith Telescope) — крупнейший в мире жидкозеркальный телескоп и третий по величине оптический инструмент в Северной Америке. Его главное зеркало имеет диаметр 6 метров. Расположен в Канаде, недалеко от Ванкувера. Строительство началось в 1994 году и было завершено к весне 2003. В нём принимали участие ученые Университета Британской Колумбии, которому и принадлежит телескоп, Лавальского университета и Парижского астрофизического института. Ключевой частью конструкции телескопа является воздушная подушка, поддерживающая его трехтонное главное зеркало. С помощью мотора оно равномерно вращается со скоростью 6 оборотов/мин. Фокусировка телескопа производится с помощью изменения положения зеркала: шесть опор, на которых оно закреплено, могут изменять свою высоту.