Решение задач

Вероятность

Классическая формула вероятности

Вероятность события- это численная мера объективной возможности ее появления. Если имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий, то вероятность P(A) наступления события A вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

N – число всех исходов испытания

M – число исходов благоприятствующих событию A

Пример задачи

Свойство вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна 1

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

2) Вероятность невозможного события равна 0

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{0}{N} = 0$$

3) Вероятность события A удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P(A) \le 1$$

Задание 1

На экзамен вынесено 60 вопросов, Андрей не выучил 3 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

Ответ: 0,95.

Задание 2

В фирме такси в данный момент свободно 20 машин: 10 черных, 2 желтых и 8 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

Ответ: 0,4.

Задание 3

В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков. Результат округлите до сотых.

Ответ: 0,14.

Задание 4

Конкурс исполнителей проводится в 5 дней. Всего заявлено 80 выступлений — по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 8 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Решение.

На третий день запланировано $\frac{80-8}{4}=18$ выступлений. Значит, вероятность того, что выступление представителя из России окажется запланированным на третий день конкурса, равна

$$\frac{18}{80}=0,225.$$

Ответ: 0,225.

Задание 5

Перед началом первого тура чемпионата по бадминтону участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 бадминтонистов, среди которых 10 спортсменов из России, в том числе Руслан Орлов. Найдите вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России.

Решение.

В первом туре Руслан Орлов может сыграть с $26 - 1 = 25$ бадминтонистами, из которых $10 - 1 = 9$ из России. Значит, вероятность того, что в первом туре Руслан Орлов будет играть с каким-либо бадминтонистом из России, равна

$$\frac{9}{25} = 0,36.$$

Ответ: 0,36.

Задание 6

В сборнике билетов по математике всего 25 билетов, в 10 из них встречается вопрос по теме "Неравенства". Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме "Неравенства".

Решение.

Из 25 билетов 15 не содержат вопроса по теме "Неравенства", поэтому вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопроса по теме "Неравенства", равна

$$\frac{15}{25} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

Задание 7

В чемпионате мира участвуют 16 команд. С помощью жребия их нужно разделить на четыре группы по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4.

Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда России окажется во второй группе?

Решение.

Вероятность того, что команда России окажется во второй группе, равна отношению количества карточек с номером 2, к общему числу карточек. Тем самым, она равна

$$\frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Комбинаторика

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ

Число *перестановок* из n элементов:

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

Число *размещений* из n элементов по k элементов:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Число *сочетаний* из n элементов по k элементов:

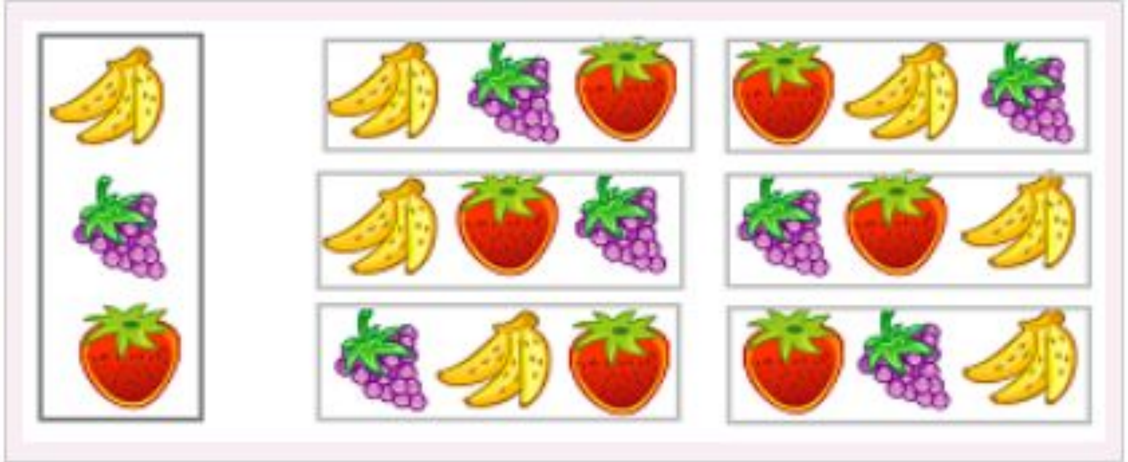
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

Определение факториала и числа перестановок

Пусть имеется n различных объектов.
Будем переставлять их всеми возможными способами (число и состав объектов остается неизменными, меняется только их порядок). Получившиеся комбинации называются **перестановками**, а их число равно

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Пример всех перестановок из $n = 3$ объектов (различных фигур) - на картинке справа. Согласно формуле ниже, их должно быть ровно $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, так и получается (вам не напоминает картинка табло игральных автоматов?:)).



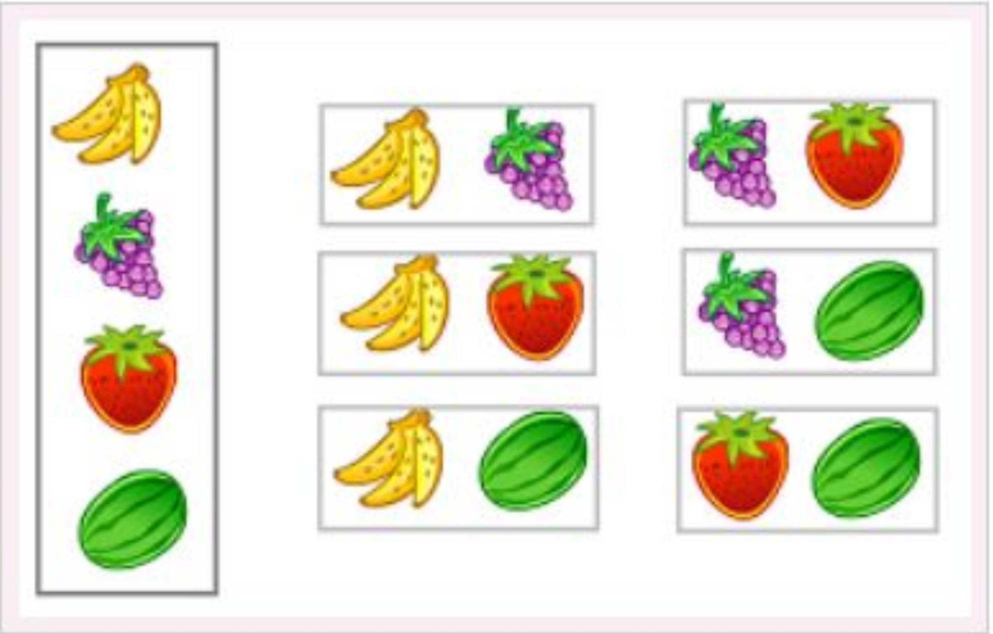
Общая формула, которая позволяет **найти число перестановок** из n элементов, имеет вид (она же - формула для **факториала** числа n):

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Определение числа сочетаний

Пусть имеется n различных объектов. Чтобы найти число **сочетаний** из n объектов по k, будем выбирать комбинации из m объектов все возможными способами, при этом будем обращать внимание на разный состав комбинаций, но не порядок (он тут не важен, в отличие от размещений).

Например, есть три объекта {1,2,3}, составляем сочетания по 2 объекта в каждом. Тогда выборки {1,2} и {2,1} - это одно и то же сочетание (так как комбинации отличаются лишь порядком). А всего различных сочетаний из 3 объектов по 2 будет три: {1,2}, {1,3}, {2,3}.



На картинке наглядно проиллюстрировано получение всех возможных сочетаний из 4 различных объектов по 2 (их будет 6, см. калькулятор сочетаний ниже, который даст формулу расчета).

Общая формула, которая позволяет **найти число сочетаний** из n объектов по k имеет вид:

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

Определение числа размещений

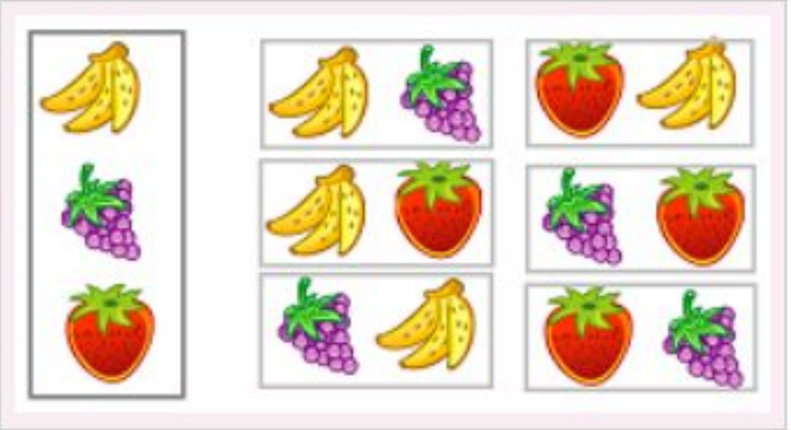
Пусть имеется n различных объектов.
Будем выбирать из них k объектов и переставлять всеми возможными способами между собой (то есть меняется и состав выбранных объектов, и их порядок). Получившиеся комбинации называются **размещениями** из n объектов по k, а их число равно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

Если вы уже знакомы с сочетаниями, то легко заметите, что чтобы найти размещения, надо взять все возможные сочетания, а потом в каждом еще поменять порядок всеми возможными способами (то есть фактически сделать еще перестановки). Поэтому число размещений еще выражается через число перестановок и сочетаний так:

$$A_n^k = C_n^k \cdot k! = C_n^k \cdot P_k.$$

Получилась такая изящная формула, объединяющая три других формулы комбинаторики (три концепции: размещений, сочетаний и перестановок).



Пример всех размещений из $n=3$ объектов (различных фруктов) в группы по $m=2$ с учетом порядка - на картинке справа. Согласно формуле, их должно быть ровно

$$A_3^2 = 3\cdot(3-2+1) = 3\cdot 2 = 6.$$

Задача 1. У мамы 2 яблока и 3 груши. Каждый день в течение 5 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами это может быть сделано?

Решение. Имеем набор {я, я, г, г, г}. Всего перестановок пятиэлементного множества 5!, но мы не должны учитывать перестановки, в которых объекты одного типа меняются местами несколько раз, поэтому нужно поделить на возможное число таких перестановок: $2! \cdot 3!$. Получаем в итоге

$$\frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 3} = 10.$$

Ответ: 10 способов.

Задача 2. Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин?

Решение. Имеем 14 претендентов и 13 рабочих мест. Сначала выберем работников на первую специальность, то есть 4 женщин из 6:

$$C_6^4 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15.$$

Далее независимо аналогичным образом выберем мужчин на вторую специальность:

$$C_8^6 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 28.$$

Осталось 2 женщины, 2 мужчин и 3 вакантных места, которые, по условию, могут занять любые из четырех оставшихся человек. Это может быть сделано 2 вариантами:
1. 1 женщина и 2 мужчин (выбираем женщину $C_2^1 = 2$ способами)
2. 1 мужчина и 2 женщины (выбираем мужчину $C_2^1 = 2$ способами).
В итого получаем $15 \cdot 28(2+2) = 1680$ способов.

Ответ: 1680 способов.

Задача 3. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

Решение. Т.к. все пассажиры должны ехать в разных вагонах, требуется отобрать 4 вагона из 9 с учетом порядка (вагоны отличаются №), эти выборки – размещения из n различных элементов по m элементов, где n=9, m=4. Число таких размещений находим по формуле:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-m+1).$$

Получаем: $A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Ответ. 3024 способами можно рассадить в поезде 4 человека.

Задача 4. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

Решение.

Не менее 2-х человек, т.е 2+7 или 3+6 или 4+5 человек (5+4, 6+3, 7+2 – те же самые комбинации).

В каждой выборке важен только состав, т.к. члены подгруппы не различаются по ролям, т.е. выборки − сочетания из n различных элементов по m элементов, их число: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Число выборок из 2-х человек: $C_9^2 = \dfrac{9!}{2!(9-2)!} = \dfrac{9!}{2!7!} = \dfrac{8 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 36$.

Число выборок из 3-х человек: $C_9^3 = \dfrac{9!}{3!(9-3)!} = \dfrac{9!}{3!6!} = \dfrac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$.

Число выборок из 4-х человек: $C_9^4 = \dfrac{9!}{4!(9-4)!} = \dfrac{9!}{4!5!} = \dfrac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 126$.

Применяем правило сложения: $C_9^2 + C_9^3 + C_9^4 = 36 + 84 + 126 = 246$ способов

Ответ. 246 способов.

Задача 5. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую — 5 и в третью — 12. Сколькими способами это можно сделать.

Решение.
Создавая первую бригаду, отбирают 3 человека из 20, создавая вторую – 5 из оставшихся 17, создавая третью – 12 из оставшихся 12. Для выборок важен только состав (роли членов бригады не различаются).

Эти выборки - сочетания из n различных элементов по m элементов, их число: $C_n^m = \frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$.

Создавая сложную выборку (из 3-х бригад), воспользуемся правилом умножения:

$$N = C_{20}^3 \cdot C_{17}^5 \cdot C_{12}^{12} = \frac{20!}{3!\cdot(20-3)!} \cdot \frac{17!}{5!\cdot(17-5)!} \cdot \frac{12!}{12!\cdot(12-12)!} = \frac{20!}{3!\cdot 17!} \cdot \frac{17!}{5!\cdot 12!} \cdot \frac{12!}{12!\cdot 0!} =$$

$$= \frac{13\cdot14\cdot15\cdot16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 7054320.$$

Ответ. 7054320 способов.

Задача 6. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

Решение.

Т.к. известно, что двое мальчиков войдут в команду, то остается отобрать 3 из 8. Для выборки важен только состав (по условию все члены команды не различаются по ролям). Следовательно, выборки – сочетания из n различных элементов по m элементов, их число: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\cdot(n-m)!}$, где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$, при n=8, m=3.

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\cdot(8-3)!} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 56.$$

Ответ. 56 способов сформировать команду

Ссылка на задачи

https://www.matburo.ru/ex_dm.php?p1=dmkomb