Основные алгебраические структуры

Алгебра

↓

Моноид

↓

Группа

↓

Кольцо

↓

Поле

Основные числовые системы

Система натуральных чисел

Кольцо целых чисел

Поле рациональных чисел

Система действительных чисел

Поле комплексных чисел

Аналитические преобразования с помощью компьютера

Особенности аналитических вычислений на компьютерах :

1) имеется возможность проводить аналитические (и численные) преобразования без погрешностей;
2) в результате не теряется исходная информация о характере исследуемого процесса;
3) на этом этапе аналитических вычислений неустойчивость процесса не проявляется;
4) в ряде случаев наблюдается быстрое разрастание результатов промежуточных вычислений (то есть объем промежуточных данных в процессе вычислений очень большой);
5) ввиду упомянутого разрастания результатов резко повышаются требования к объему памяти и к быстродействию компьютера;
6) резко повышаются требования к предварительному изучению алгоритма: к оценке его быстродействия, необходимой памяти и к эффективному представлению результата;
7) имеется возможность производить генерацию программ, использующих найденные формулы.

Основная цель компьютерной алгебры – изучение алгоритмов аналитических преобразований точки зрения их эффективной реализации на компьютере.

Главная задача компьютерной алгебры – оценка сложности аналитических выражений и длительности аналитических преобразований.

Эффективность алгоритмов

Качество (эффективность) алгоритма обычно оценивают асимптотической сложностью, то есть порядком роста сложности как функции от числа входов N при неограниченном росте N без учета мультипликативных констант.

Пример. Если N входных переменных обрабатываются за время cN^2, где c – некоторая константа, то асимптотическая сложность этого алгоритма есть $O(N^2)$ (порядка N^2).

Характеристики алгоритмов

Алгоритм	Временная сложность	Максимальный размер задачи		
		1с	1мин	1ч
A_1	N	1000	$6*10^4$	$3,6*10^6$
A_2	$N \log_2 N$	140	4893	$20*10^5$
A_3	N^2	31	244	1897
A_4	N^3	10	39	153
A_5	2^N	9	15	21

Характеристики алгоритмов после ускорения.

Алгоритм	Временная сложность	Максимальный размер задачи	
		1с	1мин
A_1	N	1000	$6*10^4$
A_2	$N \log_2 N$	140	4893
A_3	N^2	31	244
A_4	N^3	10	39
A_5	2^N	9	15

В зависимости от порядка сложности и вида результирующих данных алгоритмы компьютерной математики можно отнести к четырем уровням:

1) базовые алгоритмические операции. Считается, что их сложность O(1), хотя они отличаются по сложности битовых операций (например, умножение двух n-разрядных чисел с фиксированной точкой требует $O(n^2)$ битовых операций, а сложение O(n));

2) скалярные алгоритмы с вычислительной сложностью O (n). Этот уровень включает в себя вычисление скалярного произведения n-мерных векторов, вычисление значения полинома по схеме Горнера, численное интегрирование и дифференцирование;

3) векторные алгоритмы сложности $O(n^2)$. Сюда включаются умножение матрицы на вектор для вычисления линейных преобразований, вычисления свертки векторов (полиномов) и т.д.;

4) алгоритмы сложности $O(n^3)$. Это – матричное произведение, вычисление собственных значений и векторов, обращение матриц, метод наименьших квадратов, решение задач математического программирования, нахождение путей в графе и т.д.

Алгебра

Алгеброй называется упорядоченная пара

$A = \langle A, V \rangle$, где

A - непустое множество,

V - множество операций на A.

назад

Моноид

<u>Алгебра</u> $\mathrm{A} = \langle A, *, e \rangle$ типа (2, 0), где

A - произвольная непустое множество;

* - ассоциативная бинарная операция на A;

e - нейтральный элемент относительно ,

называется <u>**моноидом**</u>.

назад

Группа

Алгебра ***G*** типа называется **группой**, если ее главные операции удовлетворяют условиям (аксиомам):

1. бинарная операция ассоциативна, т.е. $\forall a, b, c \in G$ $a*(b*c)=(a*b)*c$;
2. в ***G*** имеется нейтральный элемент относительно □ , т. е. $\exists e \in G \ \forall a \in G \quad a*e=e*a=a$;
3. $\forall a \in G \ a*a' = e$.

Таким образом, **группа** – это непустое множество с двумя операциями на нем, бинарной операцией * и унарной ′ , причем бинарная операция ассоциативна и обладает нейтральным элементом, а унарная – переход к симметрическому элементу относительно бинарной операции.

назад

Кольцо

<u>Кольцом</u> называется алгебра **K** $=\langle K,+,\text{-},\cdot,1\rangle$ типа (2,1,2,0) , главные операции которой удовлетворяют следующим условиям:

1. алгебра **K** $=\langle K,+,\text{-}\rangle$ – есть абелева группа;
2. алгебра **K** $=\langle K,\cdot,1\rangle$ – есть моноид;
3. умножение дистрибутивно относительно сложения, т.е.
   $\forall a,b,c\in K \quad (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,\ c\cdot(a+b)=c\cdot a+c\cdot b$

назад

Поле

Полем называется коммутативное кольцо, в котором нуль отличен от единицы, $0_K \neq 1_K$, и всякий ненулевой элемент является обратимым элементом кольца.

назад

Система натуральных чисел

<u>Системой натуральных чисел</u> называется алгебра **N** = $\langle N, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, состоящая из некоторого множества **N**, выделенных в **N** элементов 0 и 1, бинарных операцией + и **·** (называемых сложением и умножением соответственно), удовлетворяющих следующим аксиомам:

I. $\forall\, n \in N \quad n+1 \neq 0.$

II. $\forall\, m, n \in N \quad ((m+1) = (n+1)) \to m = n.$

III. $\forall\, m \in N \quad m + 0 = m.$

IV. $\forall\, m, n \in N \quad m + (n+1) = (m+n) + 1.$

V. $\forall\, m \in N \quad m \cdot 0 = 0.$

VI. $\forall\, m, n \in N \quad m(n+1) = m \cdot n + m.$

VII. Если $A \subset N$ и

а) $0 \in A;$

б) $\forall\, n,\ если\ n \in A,\ то\ (n+1) \in A$

тогда A=N

назад

Кольцо целых чисел

Кольцо **K** называется кольцом целых чисел, если аддитивное группа кольца **K** является аддитивной группой целых чисел и умножение в кольце **K** коммутативно и продолжает умножение натуральных чисел.

назад

Поле рациональных чисел

Полем рациональных чисел называется поле частных кольца целых чисел. Элементы поля рациональных чисел называются рациональными числами. Обозначим это поле **Q** $=\langle Q,+,-,\cdot,1\rangle$.

назад

Система действительных чисел

Системой действительных чисел называется полное архимедовски упорядоченное поле.

назад

Поле комплексных чисел

Полем комплексных чисел называется комплексное расширение поля действительных чисел: **C**

. $=\left\langle C, +, -, \cdot, 1 \right\rangle$

назад