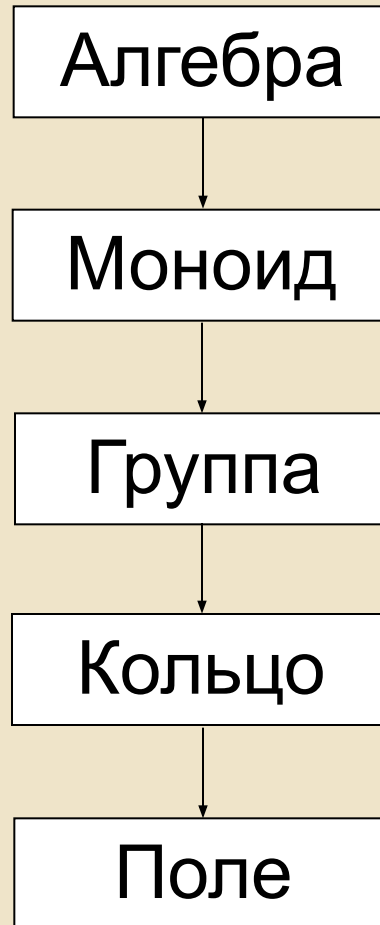


Основные алгебраические структуры



Основные числовые системы

Система натуральных чисел



Кольцо целых чисел



Поле рациональных чисел



Система действительных чисел



Поле комплексных чисел

Аналитические преобразования с помощью компьютера

Особенности аналитических вычислений на компьютерах :

- 1) имеется возможность проводить аналитические (и численные) преобразования без погрешностей;
- 2) в результате не теряется исходная информация о характере исследуемого процесса;
- 3) на этом этапе аналитических вычислений неустойчивость процесса не проявляется;
- 4) в ряде случаев наблюдается быстрое разрастание результатов промежуточных вычислений (то есть объем промежуточных данных в процессе вычислений очень большой);
- 5) ввиду упомянутого разрастания результатов резко повышаются требования к объему памяти и к быстродействию компьютера;
- 6) резко повышаются требования к предварительному изучению алгоритма: к оценке его быстродействия, необходимой памяти и к эффективному представлению результата;
- 7) имеется возможность производить генерацию программ, использующих найденные формулы.

Основная цель компьютерной алгебры –

изучение алгоритмов аналитических преобразований
точки зрения их эффективной реализации на
компьютере.

Главная задача компьютерной алгебры –

оценка сложности аналитических выражений и
длительности аналитических преобразований.

Эффективность алгоритмов

Качество (эффективность) алгоритма

обычно оценивают асимптотической сложностью, то есть порядком роста сложности как функции от числа входов N при неограниченном росте N без учета мультипликативных констант.

Пример. Если N входных переменных обрабатываются за время cN^2 , где c – некоторая константа, то асимптотическая сложность этого алгоритма есть $O(N^2)$ (порядка N^2).

Характеристики алгоритмов

Алгоритм	Временная сложность	Максимальный размер задачи		
		1с	1мин	1ч
A_1	N	1000	$6 \cdot 10^4$	$3,6 \cdot 10^6$
A_2	$N \log_2 N$	140	4893	$20 \cdot 10^5$
A_3	N^2	31	244	1897
A_4	N^3	10	39	153
A_5	2^N	9	15	21

Характеристики алгоритмов после ускорения.

Алгоритм	Временная сложность	Максимальный размер задачи	
		1с	1мин
A_1	N	1000	$6 \cdot 10^4$
A_2	$N \log_2 N$	140	4893
A_3	N^2	31	244
A_4	N^3	10	39
A_5	2^N	9	15

В зависимости от порядка сложности и вида результирующих данных алгоритмы компьютерной математики можно отнести к четырем уровням:

1) базовые алгоритмические операции. Считается, что их сложность $O(1)$, хотя они отличаются по сложности битовых операций (например, умножение двух n -разрядных чисел с фиксированной точкой требует $O(n^2)$ битовых операций, а сложение $O(n)$);

2) скалярные алгоритмы с вычислительной сложностью $O(n)$. Этот уровень включает в себя вычисление скалярного произведения n -мерных векторов, вычисление значения полинома по схеме Горнера, численное интегрирование и дифференцирование;

3) векторные алгоритмы сложности $O(n^2)$. Сюда включаются умножение матрицы на вектор для вычисления линейных преобразований, вычисления свертки векторов (полиномов) и т.д.;

4) алгоритмы сложности $O(n^3)$. Это – матричное произведение, вычисление собственных значений и векторов, обращение матриц, метод наименьших квадратов, решение задач математического программирования, нахождение путей в графе и т.д.

Алгебра

Алгеброй называется упорядоченная пара

$$A = \langle A, V \rangle, \text{ где}$$

A - непустое множество,

V - множество операций на A .

Моноид

Алгебра $A = \langle A, *, e \rangle$ типа $(2, 0)$, где

A - произвольная непустое множество;

$*$ - ассоциативная бинарная операция на A ;

e - нейтральный элемент относительно ,

называется **МОНОИДОМ**.

Группа

Алгебра G типа называется группой, если ее главные операции удовлетворяют условиям (аксиомам):

1. бинарная операция ассоциативна, т.е. $\forall a, b, c \in G$
 $a * (b * c) = (a * b) * c$;
2. в G имеется нейтральный элемент относительно $*$, т.е. $\exists e \in G \forall a \in G \quad a * e = e * a = a$
3. $\forall a \in G \quad a * a^{-1} = e$.

Таким образом, **группа** – это непустое множество с двумя операциями на нем, бинарной операцией $*$ и унарной $^{-1}$, причем бинарная операция ассоциативна и обладает нейтральным элементом, а унарная – переход к симметрическому элементу относительно бинарной операции.

Кольцо

Кольцом называется алгебра $\mathbf{K} = \langle K, +, -, \cdot, 1 \rangle$ типа $(2, 1, 2, 0)$, главные операции которой удовлетворяют следующим условиям:

1. алгебра $\mathbf{K} = \langle K, +, - \rangle$ – есть абелева группа;
2. алгебра $\mathbf{K} = \langle K, \cdot, 1 \rangle$ – есть моноид;
3. умножение дистрибутивно относительно сложения, т.е.

$$\forall a, b, c \in K \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$$

Поле

Поле называется коммутативное кольцо, в котором нуль отличен от единицы, $0_K \neq 1_K$, и всякий ненулевой элемент является обратимым элементом кольца.

Система натуральных чисел

Системой натуральных чисел называется алгебра $\mathbf{N} = \langle N, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, состоящая из некоторого множества \mathbf{N} , выделенных в \mathbf{N} элементов 0 и 1, бинарных операций $+$ и \cdot (называемых сложением и умножением соответственно), удовлетворяющих следующим аксиомам:

- I. $\forall n \in N \quad n + 1 \neq 0.$
- II. $\forall m, n \in N \quad ((m + 1) = (n + 1)) \rightarrow m = n.$
- III. $\forall m \in N \quad m + 0 = m.$
- IV. $\forall m, n \in N \quad m + (n + 1) = (m + n) + 1.$
- V. $\forall m \in N \quad m \cdot 0 = 0.$
- VI. $\forall m, n \in N \quad m(n + 1) = m \cdot n + m.$
- VII. Если $A \subset N$ и
 - а) $0 \in A$;
 - б) \forall если $n \in A$ то $n(+ 1) \in A$тогда $A = N$

Кольцо целых чисел

Кольцо K называется кольцом целых чисел, если аддитивная группа кольца K является аддитивной группой целых чисел и умножение в кольце K коммутативно и продолжает умножение натуральных чисел.

Поле рациональных чисел

Поле рациональных чисел называется поле частных кольца целых чисел. Элементы поля рациональных чисел называются рациональными числами. Обозначим это поле $\mathbf{Q} = \langle \mathcal{Q}, +, -, \cdot, 1 \rangle$.

Система действительных чисел

Системой действительных чисел называется полное архимедовски упорядоченное поле.

Поле комплексных чисел

Поле комплексных чисел называется комплексное расширение поля действительных чисел: \mathbf{C}

$$= \langle \mathbf{C}, +, -, \cdot, 1 \rangle$$