

Перес танов ки и факто риал

$$n! = 1 \times 2 \times \dots \times n = \prod_{i=1}^n i$$



I. Факториал

Факториал числа n ($n!$) — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно

1800 г. – Л. Арбогаст (1759 - 1803) ввёл термин **факториал**

1808 г. - К. Крамп (1760 — 1826) придумал обозначение

Если $n=0$ то $n!=1$

Если $n>0$ то $n!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Рекуррентная формула:

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

#:

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$$

Таблица факториалов

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 2$$

$$3! = 6$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

$$7! = 5040$$

$$8! = 40320$$

$$9! = 362880$$

$$10! = 3628800$$

$$11! = 39916800$$

$$12! = 479001600$$

$$13! = 6227020800$$

$$14! = 87178291200$$

$$15! = 1307674368000$$

$$16! = 20922789888000$$

$$17! = 355687428096000$$

$$18! = 6402373705728000$$

$$19! = 121645100408832000$$

$$20! = 2432902008176640000$$

$$21! = 51090942171709440000$$

$$22! = 1124000727777607680000$$

$$23! = 25852016738884976640000$$

$$24! = 620448401733239439360000$$

$$25! = 15511210043330985984000000$$

$$26! = 403291461126605635584000000$$

$$27! = 10888869450418352160768000000$$

$$28! = 304888344611713860501504000000$$

$$29! = 8841761993739701954543616000000$$

$$30! = 265252859812191058636308480000000$$

$$100! \approx 9,33 \times 10^{157}$$

$$1000! \approx 4,02 \times 10^{2567}$$

$$10000! \approx 2,85 \times 10^{35\ 659}$$

II. Решение задач

#1. Вычислить:

$$\frac{5!}{5} = \frac{4! \cdot 5}{5} = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

#2.

$$\frac{14!}{7! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1}$$
$$= 120120$$

#3. Делится ли 11! на 49?

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{7 \cdot 7}$$

Ответ: **нет**

#4. Сколькими нулями оканчивается число 26!

$$26! =$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot$$

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot$$

$$21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26$$

Ответ: 6

#5. Сократить дробь

$$\frac{(4m-1)!}{(4m-3)!} = \frac{(4m-3)!(4m-2)(4m-1)}{(4m-3)!}$$

$$= (4m-2)(4m-1)$$

#6. Упростить выражение

$$\frac{(3k+3)! \cdot k!}{(3k)!} \cdot \frac{(k+3)!(3k+1)}{3!(k^2+5k+6)} = 18 \cdot (3k+2)$$

$$= \frac{(3k)!(3k+1) \cdot (3k+2) \cdot (3k+3) \cdot k!}{(3k)!} \cdot \frac{3!(k^2+5k+6)}{(k+3)!(3k+1)}$$

$$= \frac{(3k+2) \cdot (3k+3) \cdot k!}{1} \cdot \frac{3!(k^2+5k+6)}{k!(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(3k+2) \cdot (3k+3)}{1} \cdot \frac{3!(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$= \frac{(3k+2) \cdot (3k+3) \cdot 3!}{(k+1)} = \frac{(3k+2) \cdot 3 \cdot (k+1) \cdot 6}{(k+1)}$$

#7. Решить уравнение

$$(k - 10)! = 77(k - 11)!$$

$$\frac{(k - 10)!}{(k - 11)!} = \frac{77(k - 11)!}{(k - 11)!} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(k - 11)! \cdot (k - 10)}{(k - 11)!} = \frac{77(k - 11)!}{(k - 11)!} \Leftrightarrow$$

$$(k - 10) = 77$$

$$k = 87$$

III. Перестановки

Перестановки из n элементов

- это комбинации из n элементов, отличающиеся друг от друга **только** порядком расположения в них элементов.

P_n обозначение
#1. Найдите все возможные перестановки цифр: 1, 2,

3:

1	2	3
2	1	3
3	1	2

1	3	2
2	3	1
3	2	1

$$P_3 = 3! = 6$$

Формула нахождения количества перестановок:

$$P_n = n!$$

IV. Решение задач



Задача №1.

«Проказница-Мартышка, Осел, Козел
Да косолапый Мишка
Затеяли сыграть Квартет.

Достали нот, баса, альта, две скрипки
И сели на лужок под липки,-
Пленять своим искусством свет.

Ударили в смычки, дерут, а толку нет.

"Стой, братцы, стой! - кричит Мартышка. - $n=4$

Погодите!

Как музыке идти? Ведь вы не так сидите.

*** *** *** *** ***

Послушались Оsla: уселись чинно в ряд;

А все-таки Квартет нейдет на лад.

Вот пуще прежнего пошли у них разборы

И споры,

Кому и как сидеть...»

**Сколькими
различными
способами могут
сесть музыканты?**

Решение:

$$P_4 = 4! = 24$$

Ответ: 24



Задача 2.

Сколькими способами можно развесить 5 цветных шаров на гирлянде?



Решение:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Ответ: 24

Задача №3. В расписании 9 класса на четверг должно быть 6 предметов: русский язык, литература, алгебра, география, физика, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

$$P_6 = 6! = 720$$

Задача №4. Сколькими способами можно составить расписание из тех же 6 предметов, если требуется, чтобы урок физкультуры был последним?

$$P_5 = 5! = 120$$

Задача №5.

Сколькими способами из тех же 6 предметов можно составить такое расписание, в котором русский язык и литература стоят рядом?

$$P_5 = 5! * 2 = 240 \quad (1. \text{ РЛ } 2. \text{ ЛР})$$

Задача 6.

Сколько различных 5-значных чисел, все цифры которых различны можно записать с помощью цифр 4, 5, 6, 7, 8?

$$P_5 = 5! = 120$$

Задача 7.

Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, если среди них 2 книги одного автора, которые при любых перестановках должны стоять рядом?

$$P_7 = 7! = 5040$$

$$5040 * 2 = 10080$$

V. Обобщения факториала

1. Двойной факториал числа n

- обозначается $n!!$

- произведение всех натуральных чисел в отрезке $[1, n]$, имеющих ту же чётность что и n .

Для чётного n :

$$n!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n$$

Для нечётного n :

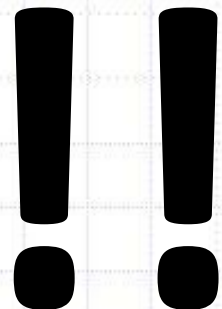
$$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n$$

#: *Вычислить:*

$$10!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 = \mathbf{3840}$$

$$9!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 = \mathbf{945}$$

$$0!! = \mathbf{1}$$



2. Праймориал (примориал) числа n

- обозначается $n\#$

- произведение простых чисел, не превышающих n .

$$11\# = 12\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 2310$$

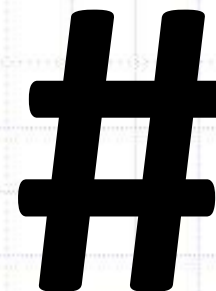
#: Вычислить:

$$7\# = 8\# = 9\# = 10\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$$

$$5\# = 6\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$3\# = 4\# = 2 \cdot 3 = 6$$

$$2\# = 2$$



3. Суперфакториал числа n

- обозначается $sf(n)$
- произведение первых n факториалов
- определили в 1995 г. – Н.Слоан и С.Плоуф

$$sf(4) = 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! = 288$$

#: *Вычислить:*

$$sf(3) = 1! \cdot 2! \cdot 3! = 12$$

$$sf(2) = 1! \cdot 2! = 2$$

$$sf(1) = 1! = 1$$

$$sf(0) = 1$$

sf