Перестановки и факториал

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n = \prod_{i=1}^{n} i$$

Лавлинский М.В., LavlinskiMV@mail.ru

I. Факториал

Факториал числа n (**n!**) — произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно

1800 г. – Л. Арбогаст (1759 - 1803) ввёл термин **факториал**

1808 г. - К. Крамп (1760 — 1826) придумал обозначение

Если n=0 то n!=1

Если n>0 то n!=1 ·2 ·3 · … · n

Рекуррентная формула:

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n \cdot (n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

#:

2! =1 · 2 = 2

3! =1 · 2 · 3 = 6

4! = 1 · 2 · 3 · 4 = 24

5! = 1 · 2 · 3 · 4 · 5 = 120

Таблица факториалов

$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2$
$3! = 6$
$4! = 24$
$5! = 120$
$6! = 720$
$7! = 5040$
$8! = 40320$
$9! = 362880$
$10! = 3628800$
$11! = 39916800$
$12! = 479001600$
$13! = 6227020800$
$14! = 87178291200$
$15! = 1307674368000$
$16! = 20922789888000$
$17! = 355687428096000$
$18! = 6402373705728000$
$19! = 121645100408832000$
$20! = 2432902008176640000$
$21! = 51090942171709440000$
$22! = 1124000727777607680000$
$23! = 25852016738884976640000$
$24! = 620448401733239439360000$
$25! = 15511210043330985984000000$
$26! = 403291461126605635584000000$
$27! = 10888869450418352160768000000$
$28! = 304888344611713860501504000000$
$29! = 8841761993739701954543616000000$
$30! = 265252859812191058636308480000000$

$100! \approx 9{,}33 \times 10^{157}$
$1000! \approx 4{,}02 \times 10^{2567}$
$10000! \approx 2{,}85 \times 10^{35\,659}$

II. Решение задач

#1. Вычислить:

$$\frac{5!}{5}=\frac{4!\cdot 5}{5}=4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$$

#2.

$$\frac{14!}{7!\cdot 3!\cdot 4!}=\frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=\frac{5\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}{1}$$

$$=120120$$

#3. Делится ли 11! на 49?

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{7\cdot 7}$$

Ответ: нет

#4. Сколькими нулями оканчивается число 26!

$$26! =$$

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot$$

$$11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot$$

$$21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25\cdot 26$$

Ответ: 6

#5. Сократить дробь

$$\frac{(4m-1)!}{(4m-3)!} = \frac{(4m-3)!(4m-2)(4m-1)}{(4m-3)!}$$

$$= (4m-2)(4m-1)$$

#6. Упростить выражение

$$\frac{(3k+3)!\cdot k!}{(3k)!}:\frac{(k+3)!(3k+1)}{3!(k^2+5k+6)}\quad \boxed{=18\cdot(3k+2)}$$

$$=\frac{(3k)!\cdot(3k+1)\cdot(3k+2)\cdot(3k+3)\cdot k!}{(3k)!}\cdot\frac{3!(k^2+5k+6)}{(k+3)!(3k+1)}$$

$$=\frac{(3k+2)\cdot(3k+3)\cdot k!}{1}\cdot\frac{3!(k^2+5k+6)}{k!(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(3k+2)\cdot(3k+3)}{1}\cdot\frac{3!(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(3k+2)\cdot(3k+3)\cdot 3!}{(k+1)}=\frac{(3k+2)\cdot 3\cdot(k+1)\cdot 6}{(k+1)}$$

#7. Решить уравнение

$$(k-10)! = 77(k-11)!$$

$$\frac{(k-10)!}{(k-11)!} = \frac{77(k-11)!}{(k-11)!} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(k-11)!\cdot(k-10)}{(k-11)!} = \frac{77(k-11)!}{(k-11)!} \Leftrightarrow$$

$$(k-10) = 77$$

$$\boxed{k = 87}$$

III. Перестановки

Перестановки из **n** элементов
- это комбинации из **n** элементов, отличающиеся друг от друга **только** порядком расположения в них элементов.

P_n – *обозначение*

#1. Найдите все возможные перестановки цифр: 1, 2, 3.

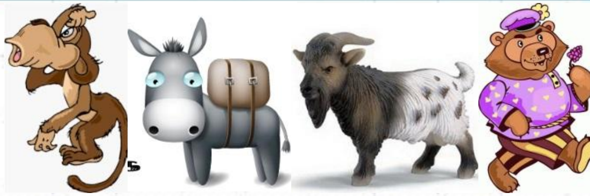
1 2 3	1 3 2
2 1 3	2 3 1
3 1 2	3 2 1

$P_3 = 3! = 6$

Формула нахождение количества перестановок:

$P_n = n!$

IV. Решение задач



Задача №1.

«Проказница-Мартышка, Осел, Козел
Да косолапый Мишка
Затеяли сыграть Квартет.
Достали нот, баса, альта, две скрипки
И сели на лужок под липки,-
Пленять своим искусством свет.
Ударили в смычки, дерут, а толку нет.
"Стой, братцы, стой! - кричит Мартышка. -
Погодите!
Как музыке идти? Ведь вы не так сидите.
*** *** *** *** ***
Послушались Осла: уселись чинно в ряд;
А все-таки Квартет нейдет на лад.
Вот пуще прежнего пошли у них разборы
И споры,
Кому и как сидеть…»

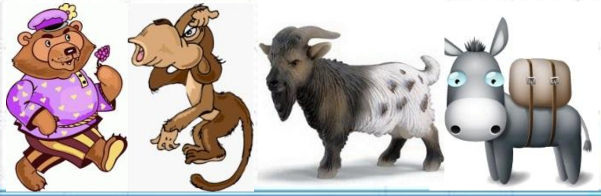
Сколькими различными способами могут сесть музыканты?

Решение:

n=4

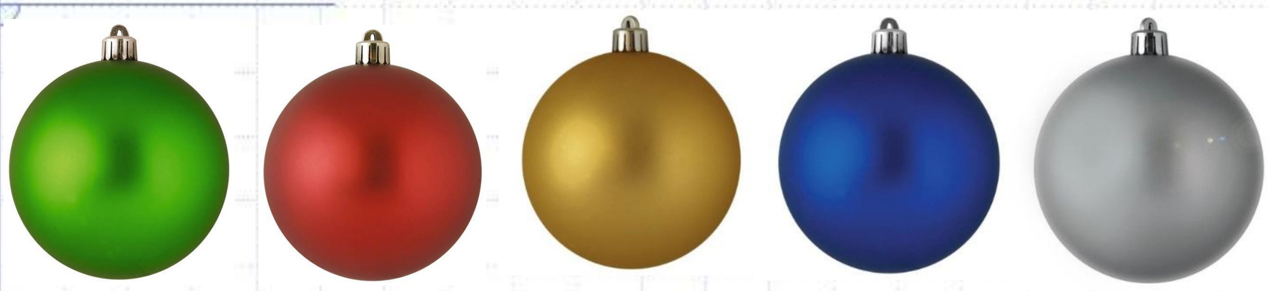
$P_4 = 4! = 24$

Ответ: **24**



Задача 2.

Сколькими способами можно развесить 5 цветных шаров на гирлянде?



Решение:

$P_5 = 5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$

Ответ: **24**

Задача №3. В расписании 9 класса на четверг должно быть 6 предметов: русский язык, литература, алгебра, география, физика, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

$P_6 = 6! = 720$

Задача №4. Сколькими способами можно составить расписание из тех же 6 предметов, если требуется, чтобы урок физкультуры был последним?

$P_5 = 5! = 120$

Задача №5.

Сколькими способами из тех же 6 предметов можно составить такое расписание, в котором русский язык и литература стоят рядом?

$P_5 = 5!*2 = 240$ *(1. РЛ 2. ЛР)*

Задача 6.

Сколько различных 5-значных чисел, все цифры которых различны можно записать с помощью цифр 4, 5, 6, 7, 8?

$P_5 = 5! = 120$

Задача 7.

Сколькими способами можно расставить на полке 8 книг, если среди них 2 книги одного автора, которые при любых перестановках должны стоять рядом?

$P_7 = 7! = 5040$

$5040 * 2 = 10080$

V. Обобщения факториала

1. Двойной факториал числа n

- обозначается **n!!**
- произведение всех натуральных чисел в отрезке [1,n], имеющих ту же чётность что и n.

Для чётного n:

n!! = 2 · 4 · 6 · … · n

Для нечётного n:

n!! = 1 · 3 · 5 · … · n

#: *Вычислить:*

10!! = 2 · 4 · 6 · 8 · 10 = 3840

9!! = 1 · 3 · 5 · 7 · 9 = 945

0!! = 1

!!

2. Праймориал (примориал) числа n

- обозначается **n#**
- произведение простых чисел, не превышающих n.

11# = 12# = 2 · 3 · 5 · 7 · 11 = 2310

#: *Вычислить:*

7# = 8# = 9# = 10# = 2 · 3 · 5 · 7 = 210

5# = 6# = 2 · 3 · 5 = 30

3# = 4# = 2 · 3 = 6

2# = = 2

3. Суперфакториал числа n
- обозначается **sf(n)**
- произведение первых n факториалов
- определили в **1995 г.** – Н.Слоан и С.Плоуф

sf(4) = 1! · 2! · 3! · 4! = 288

#: *Вычислить:*
sf(3) = 1! · 2! · 3! = 12
sf(2) = 1! · 2! = 2
sf(1) = 1! = 1
sf(0) = 1

sf