

# Числовые последовательности

# Понятие числовой последовательности

Рассмотрим ряд натуральных чисел  $N$ :

$$1, 2, 3, \dots, n-1, n, n+1, \dots$$

Функцию  $y = f(x)$ ,  $x \in N$  называют функцией натурального аргумента или числовой последовательностью и обозначают  $y = f(n)$  или  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  или  $\{y_n\}$ .

Величина  $y_n$  называется общим членом последовательности.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой формулой  $y_n = f(n)$ , позволяющей найти любой член последовательности по его номеру  $n$ ;  
эта формула называется формулой общего члена.



# Примеры числовых последовательностей

$1, 2, 3, 4, 5, \dots$  – ряд натуральных чисел;

$2, 4, 6, 8, 10, \dots$  – ряд чётных чисел;

$1, 4, 9, 16, 25, \dots$  – ряд квадратов натуральных чисел;

$5, 10, 15, 20, \dots$  – ряд натуральных чисел, кратных 5;

$1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$  – ряд вида  $1/n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ;

*и т.д.*



# Способы задания

1. **Перечислением** членов последовательности (словесно).
2. Заданием аналитической формулы.
3. Заданием рекуррентной формулы.

## Пример

1. Последовательность **н** простых чисел:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; ...

2. Арифметическая прогрессия:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

3. Геометрическая прогрессия:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q$$



# Ограниченность числовой последовательности

Последовательность  $\{y_n\}$  называют *ограниченной сверху*, если все ее члены не больше некоторого числа.

Последовательность  $\{y_n\}$  ограничена сверху, если существует число  $M$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство

$$y_n \leq M$$

Число  $M$  называют *верхней границей* последовательности.

*Пример:*  $-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$  - ограничена сверху  $0$ .



# Ограниченность числовой последовательности

Последовательность  $\{y_n\}$  называют *ограниченной снизу*, если все ее члены *не меньше* некоторого числа.

Последовательность  $\{y_n\}$  *ограничена снизу*, если существует число  $m$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство

$$y_n \geq m$$

Число  $m$  называют *нижней границей последовательности*.

*Пример:*  $1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots$  - ограничена снизу  $1$ .

Если последовательность *ограничена и сверху и снизу*, то ее называют *ограниченной последовательностью*.



# Возрастание и убывание числовой последовательности

Последовательность  $\{y_n\}$  называют *возрастающей последовательностью*, если каждый ее член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \dots < y_n < y_{n+1} < \dots$$

*Пример:* 1, 3, 5, 7, 9,  $2n - 1$ , ... - возрастающая последовательность.

Последовательность  $\{y_n\}$  называют *убывающей последовательностью*, если каждый ее член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \dots > y_n > y_{n+1} > \dots$$

*Пример:* 1,  $1/3$ ,  $1/5$ ,  $1/7$ ,  $1/(2n - 1)$ , ... - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют *монотонными*



# Предел числовой последовательности

Рассмотрим числовую последовательность, общий член которой приближается к некоторому числу  $a$  при увеличении порядкового номера  $n$ .

В этом случае говорят, что числовая последовательность имеет *предел*. Это понятие имеет более строгое определение.

Число  $a$  называется пределом числовой последовательности  $\{u_n\}$  если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $N = N(\varepsilon)$ , зависящее от  $\varepsilon$ , что  $|u_n - a| < \varepsilon$  при  $n > N$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$$





# Предел числовой последовательности

Это определение означает, что  $a$  есть предел числовой последовательности, если её общий член неограниченно приближается к  $a$  при возрастании  $n$ . Геометрически это значит, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое число  $N$ , что начиная с  $n > N$  все члены последовательности расположены внутри интервала  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*; в противном случае – *расходящейся*.



# Рассмотрим последовательность:

$1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots; \frac{1}{n}; \dots$  – гармонический ряд

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Если  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^m} = 0$

Если  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$

Если  $|q| > 1$ , то последовательность  $y_n = q^n$  расходится



# Свойства пределов

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$

1. предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c$$

2. предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = bc$$

3. предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c}$$

4. постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (k x_n) = kb$$



# Примеры:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n} - \frac{5}{n^2} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \dots \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot \dots \cdot 0 = 0$$

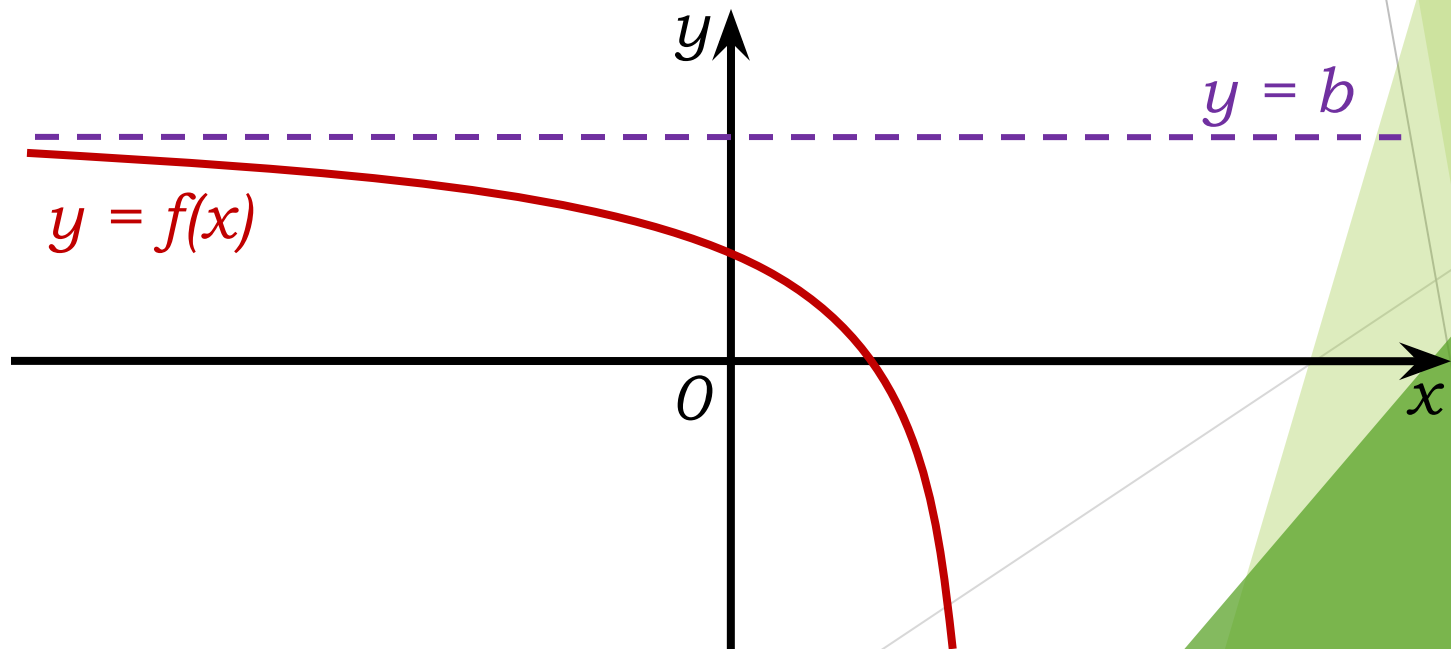
$$\begin{aligned} 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 4} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{4}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} \right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{4}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{n^2} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{n^2} \right)} = \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2 \end{aligned}$$



# Горизонтальная асимптота графика функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$$

Это равенство означает, что прямая  $y = b$  является горизонтальной асимптотой графика последовательности  $y_n = f(n)$ , то есть графика функции  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{N}$



# Сумма бесконечной геометрической

## Пример: прогрессии

$$S = \frac{b_1}{1 - q}$$

Дано:  $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \dots + b_n + \dots = 9;$   
 $(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2 + (b_4)^2 + \dots + (b_n)^2 + \dots = 40,5.$

Найти:  $b_5.$

Решение:

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1 - q} = 9, \\ \frac{b_1^2}{1 - q^2} = 40,5; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 9(1 - q), \\ \frac{9^2(1 - q)^2}{1 - q^2} = 40,5; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 9(1 - q), \\ \frac{1 - q}{1 + q} = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = 6, \\ q = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$b_5 = 6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{27}.$$

Ответ:  $\frac{2}{27}.$

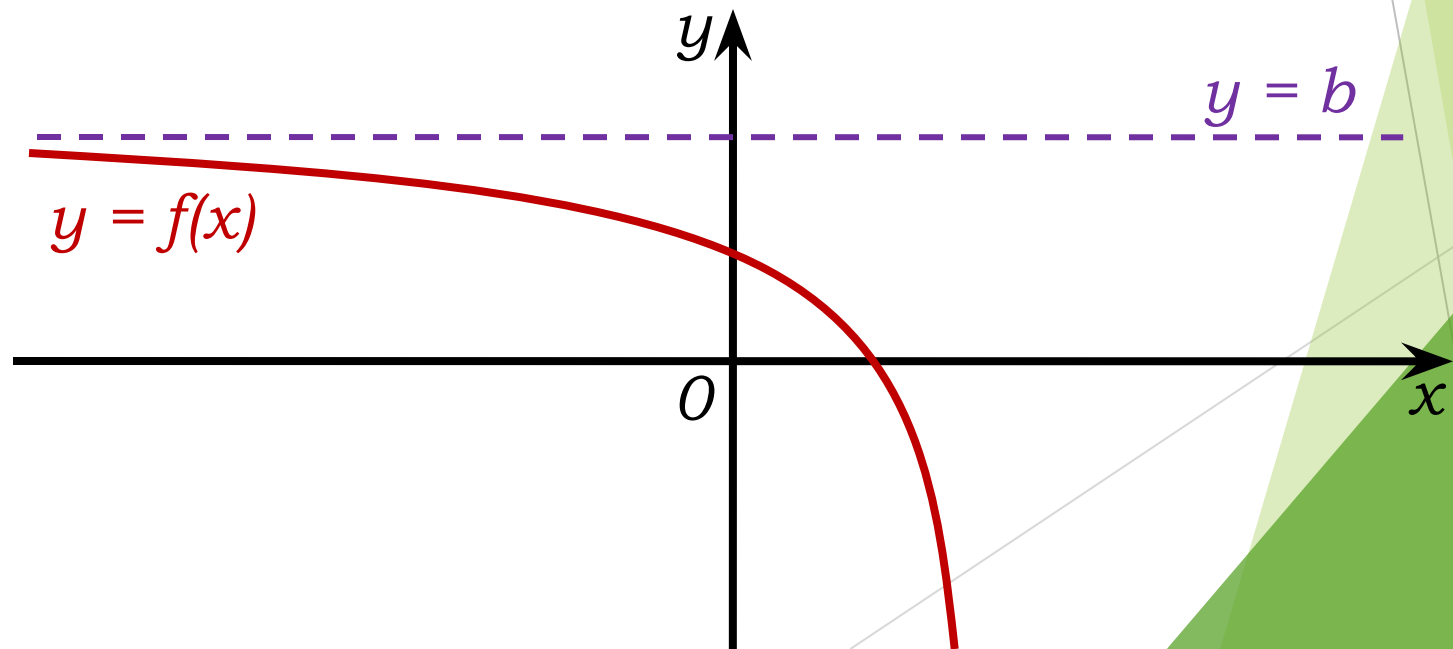


# Предел функции на бесконечности

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

Будем говорить, что функция  $f(x)$  стремится к пределу  $b$  при  $x \rightarrow \infty$ , если для произвольного малого положительного числа  $\varepsilon$  можно указать такое положительное число  $M$ , что для всех значений  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x| > M$ , выполняется неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .

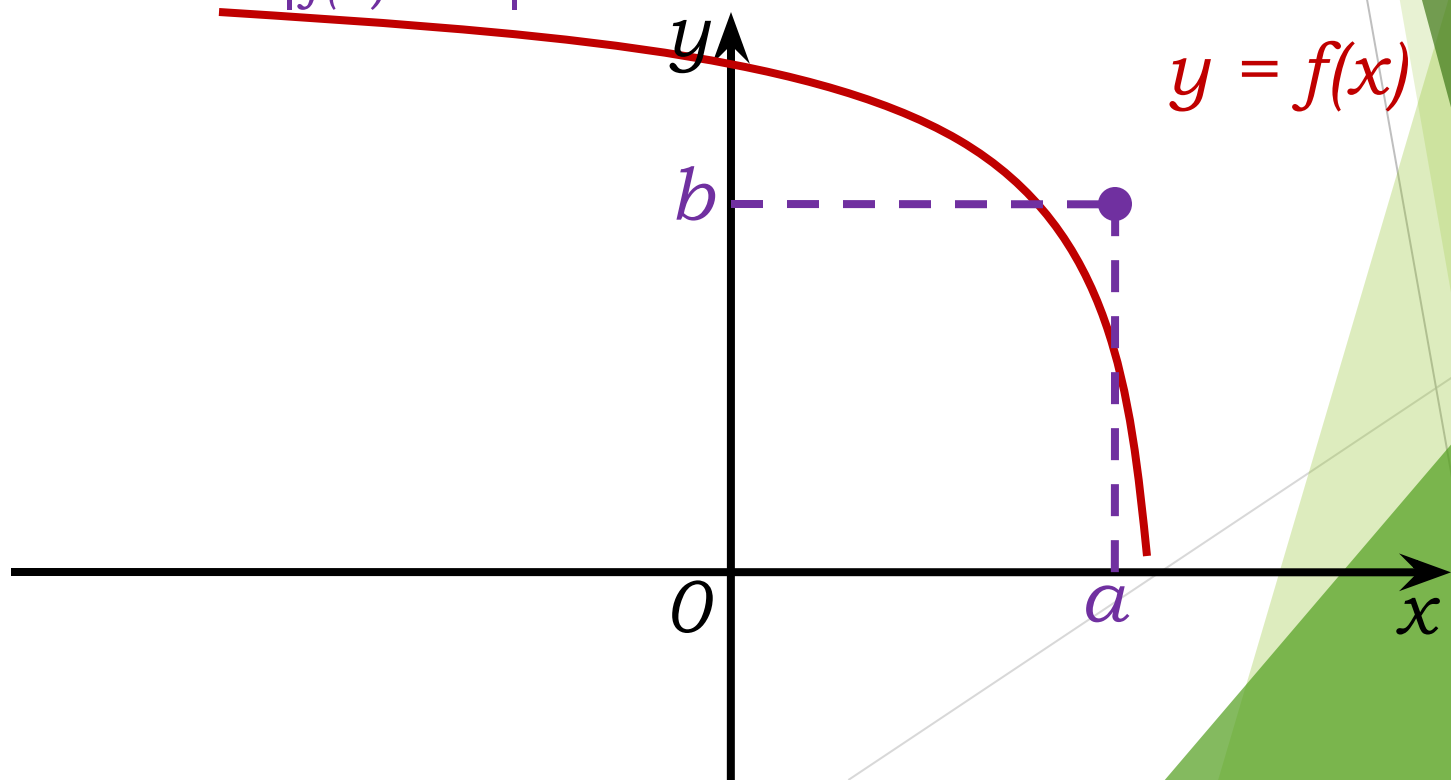
В этом случае прямая  $y = b$  является горизонтальной асимптотой графика функции  $y = f(x)$ .



# Предел функции в точке

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Функция  $y = f(x)$  стремится к пределу  $b$  при  $x \rightarrow a$ , если для каждого положительного числа  $\varepsilon$ , как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число  $\delta$ , что при всех  $x \neq a$  из области определения функции, удовлетворяющих неравенству  $|x - a| < \delta$ , имеет место неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$ .





# Непрерывность функции в точке

Функцию  $y = f(x)$  называют непрерывной в точке  $x = a$ , если выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

## Примеры:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 2x^2 + 5x + 3) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = 7$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} + 4} = \frac{\sin 2\pi}{\sqrt{2} + 4} = \frac{0}{\sqrt{2} + 4} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{4x + 12} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{4(x + 3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x - 3}{4} = \\ = \frac{-3 - 3}{4} = -\frac{6}{4} = -1,5$$

