

Задачки

Задача 5. При каких натуральных n существует ровно 2018 острых углов α таких, что

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin(2n - 1)\alpha = 0?$$

Задача 5. При каких натуральных n существует ровно 2018 острых углов α таких,

что

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \dots + \sin(2n - 1)\alpha = 0?$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin(2n - 1)\alpha = 0 \quad | \cdot \sin \alpha$$

$$\sin \alpha \sin \alpha + \sin 3\alpha \sin \alpha + \dots + \sin(2n - 1)\alpha \sin \alpha = 0$$

$$\frac{1}{2}(\cos(0) - \cos(2\alpha)) + \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) - \cos(4\alpha)) + \dots = 0$$

$$\cos 0 - \cos 2\alpha + \cos 2\alpha - \dots - \cos 2n\alpha = 0$$

$$\cos 2n\alpha = 1$$

$$2n\alpha = 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{\pi k}{n}$$

$$K - \max k$$

$$\frac{\pi K}{n} < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi K + 1}{n} \geq \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2018}{n} < \frac{1}{2}, \frac{2019}{n} \geq \frac{1}{2}$$

$$2 * 2018 < n \leq 2 * 2019$$

$$\text{Ответ: } 2 * 2019, 2 * 2019 - 1$$

Сумма трёх положительных углов равна 90° . Может ли сумма косинусов двух из них быть равна косинусу третьего?

Сумма трёх положительных углов равна 90° . Может ли сумма косинусов двух из них быть равна косинусу третьего?

Пусть это возможно :

$$\cos(90 - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \leq \cos \beta + \cos \alpha$$

Равенство при :

$$\sin \alpha = \sin \beta = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \geq 0$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \geq 0$$

$$\alpha + \beta = \pi + 2\pi(n+k) \geq \pi$$

Третий угол не может быть положительным – противоречие

Ответ : нет

Известно число $\sin \alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin \frac{\alpha}{2}$, б) $\sin \frac{\alpha}{3}$?

Известно число $\sin \alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin \frac{\alpha}{2}$, б) $\sin \frac{\alpha}{3}$?

$\sin \alpha$ – некоторое число

нужно найти чему равен $\sin \frac{\beta}{2}$ половинного угла,

если известен синус этого угла:

$\sin \beta = \sin \alpha$ – некоторое число

$$\begin{cases} \beta = \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \beta = \pi - \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\beta}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} = \sin(\frac{\alpha}{2} + \pi) = -\sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} = \sin \frac{\pi - \alpha}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} = \sin(\frac{\pi - \alpha}{2} + \pi) = -\sin \frac{\pi - \alpha}{2} \end{cases}$$

Итак разных значений не более 4

Пример $\alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow \sin \frac{\beta}{2} = \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$

$$t = \sin \frac{\alpha}{3}$$

$$\sin \alpha = 3t - 4t^3$$

Т.е. не более 3-х значений

Пример:

$$\alpha = 0$$

$$\sin \frac{\alpha}{3} = \left\{ 0, \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x) \, dx.$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x) dx.$$

$$F = \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos(x)) + \sin^2(\sin(x))) dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos(x)) dx + \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(x)) dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(\cos(\frac{\pi}{2} - x)) dx = \left| \frac{\pi}{2} - x = y, x = \frac{\pi}{2} - y \right| = \int_{\pi/2}^0 \sin^2(\cos(y)) d(\frac{\pi}{2} - y) =$$

$$= - \int_{\pi/2}^0 \sin^2(\cos(y)) d(y) = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\cos(y)) d(y)$$

$$F = \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos(x)) + \sin^2(\cos(x))) dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказать, что $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

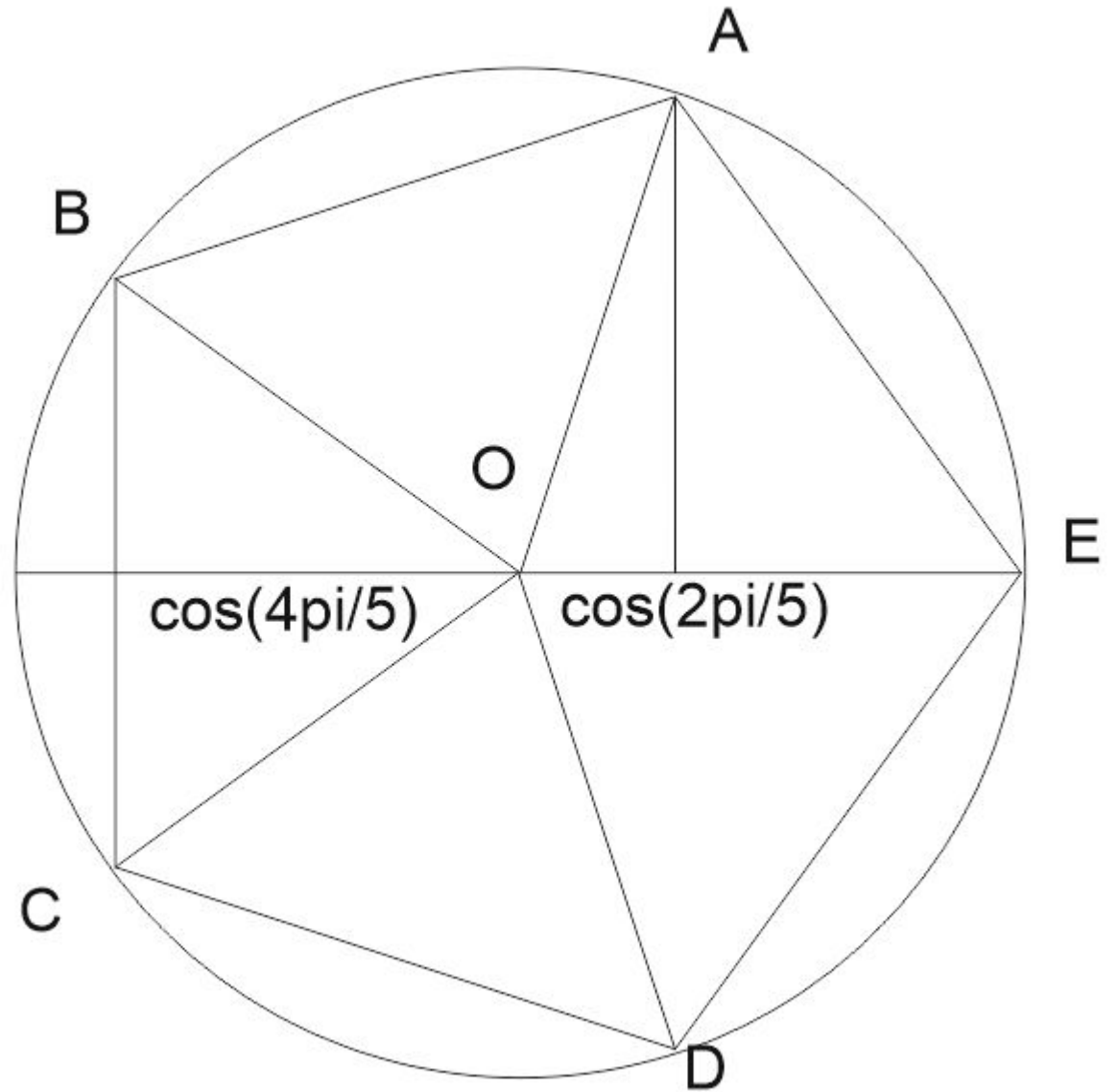
Доказать, что $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{OE} = \mathbf{0}$$

$$\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = -\overline{OE}$$

Спроектируем уравнение на OE :

$$2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} = -1$$



$$\sin x = \frac{x}{100}$$

- Количество отрицательных решений равно количеству положительных – рассмотрим только положительную область

- Причем $x > 100$ не интересует т.к. там решений точно нет, правая часть больше 1

- На каждом полном периоде по два решения

- Всего полных периодов $100 / (2\pi) = 15$

- На последнем периоде т.к. $100 - 2\pi * 15 > \pi$ тоже 2 решения (вся область положительного синуса «построена»)

- Итого 32 неотрицательных решения, т.е. 31 положительное, 31 отрицательное и 0

- Ответ:63

$$\sin x = \frac{x}{100}$$

