Задачки

Задача 5. При каких натуральных n существует ровно 2018 острых углов α таких, что

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha = 0?$$

Задача 5. При каких натуральных n существует ровно 2018 острых углов α таких, что

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \cdots + \sin(2n-1)\alpha = 0?$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2\text{n}-1)\alpha = 0 \mid {*}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha\sin\alpha + \sin 3\alpha\sin\alpha + \ldots + \sin(2\text{n}-1)\alpha\sin\alpha = 0$$

$$\frac{1}{2}(\cos(0) - \cos(2\alpha)) + \frac{1}{2}(\cos(2\alpha) - \cos(4\alpha)) + \ldots = 0$$

$$\cos 0 - \cos 2\alpha + \cos 2\alpha - \ldots - \cos 2n\alpha = 0$$

$$\cos 2n\alpha = 1$$

$$2n\alpha = 2\pi k$$

$$\alpha = \frac{\pi k}{n}$$

$$K - \max\ k$$

$$\frac{\pi K}{n} < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi K + 1}{n} \ge \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{2018}{n} < \frac{1}{2}, \frac{2019}{n} \ge \frac{1}{2}$$

$$2 * 2018 < n \le 2 * 2019$$

$$\textit{Ответ}: 2*2019, 2*2019 - 1$$

Сумма трёх положительных углов равна 90°. Может ли сумма косинусов двух из них быть равна косинусу третьего?

Сумма трёх положительных углов равна 90°. Может ли сумма косинусов двух из них быть равна косинусу третьего?

Пусть это возможно:

$$\cos(90-\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha\le\cos\beta+\cos\alpha$$

Равенство при:

$$\sin\alpha=\sin\beta=1$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\ge 0$$

$$\beta=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\ge 0$$

$$\alpha+\beta=\pi+2\pi(\mathrm{n}+\mathrm{k})\ge\pi$$

Третий угол не может быть положительным – противоречие

Ответ: нет

Известно число $\sin\alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin\frac{\alpha}{2}$, б)* $\sin\frac{\alpha}{3}$?

Известно число $\sin\alpha$. Какое наибольшее число значений может принимать а) $\sin\frac{\alpha}{2}$, б)* $\sin\frac{\alpha}{3}$?

$\sin\alpha$ – *некотое число*

нужно найти чему равен $\sin\frac{\beta}{2}$ *половинного угла,*

если известен синус этого угла:

$\sin\beta = \sin\alpha$ – *некотое число*

$$\left[\begin{array}{l} \beta = \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \beta = \pi - \alpha + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\alpha}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\pi - \alpha}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{\beta}{2} = \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ \sin\dfrac{\beta}{2} = \sin(\dfrac{\alpha}{2} + \pi) = -\sin\dfrac{\alpha}{2} \\ \sin\dfrac{\beta}{2} = \sin\dfrac{\pi - \alpha}{2} \\ \sin\dfrac{\beta}{2} = \sin(\dfrac{\pi - \alpha}{2} + \pi) = -\sin\dfrac{\pi - \alpha}{2} \end{array}\right.$$

Итак разных значений не более 4

Пример $\alpha = \frac{\pi}{3} \to \sin\frac{\beta}{2} = \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$

$$t = \sin\frac{\alpha}{3}$$

$$\sin\alpha = 3t - 4t^3$$

Т.е. не более $3-x$ *значений*

Пример:

$$\alpha = 0$$

$$\sin\frac{\alpha}{3} = \{0, \sin(\frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)\, \mathrm{d}x.$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos x) + \sin^2(\sin x)\, dx.$$

$$F = \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos(x)) + \sin^2(\sin(x)))\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2(\cos(x))\, dx + \int_0^{\pi/2} \sin^2(\sin(x))\, dx$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(\cos(\frac{\pi}{2} - x))\, dx = \left| \frac{\pi}{2} - x = y, x = \frac{\pi}{2} - y \right| = \int_{\pi/2}^{0} \sin^2(\cos(y))\, d(\frac{\pi}{2} - y) =$$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} \sin^2(\cos(y))\, d(y) = \int_0^{\pi/2} \sin^2(\cos(y))\, d(y)$$

$$F = \int_0^{\pi/2} (\cos^2(\cos(x)) + \sin^2(\cos(x)))\, dx = \int_0^{\pi/2} 1\, dx = \frac{\pi}{2}$$

Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

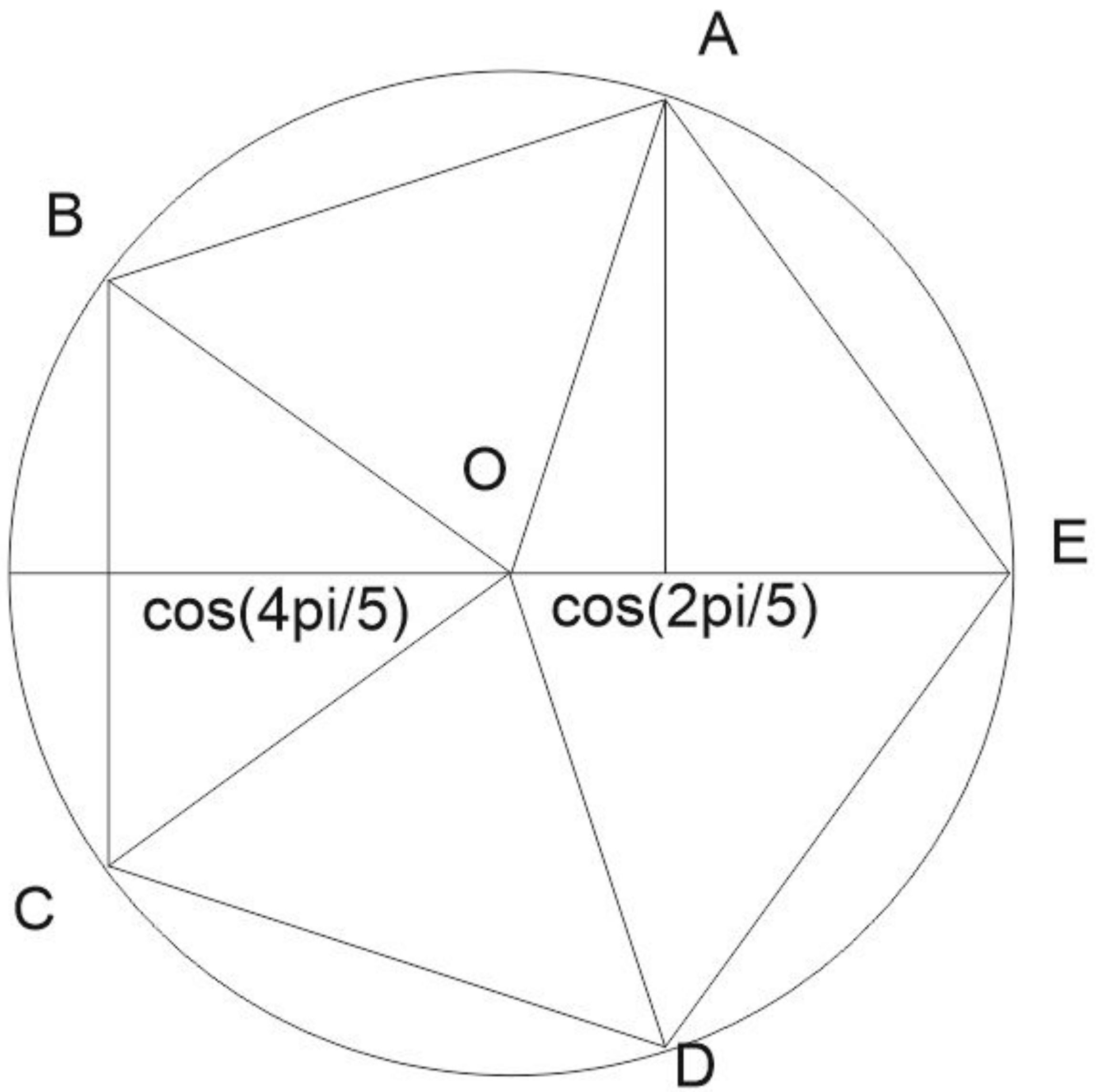
Доказать, что $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}$.

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OE}$$

Спроекцируем уравнение на $\overrightarrow{OE}$:

$$2\cos\frac{2\pi}{5}+2\cos\frac{4\pi}{5}=-1$$



$$\sin x = \frac{x}{100}$$

- Количество отрицательных решений равно количеству положительных – рассмотрим только положительную область
- Причем x>100 не интересует т. к. там решений точно нет, правая часть больше 1
- На каждом полном периоде по два решения
- Всего полных периодов 100./(2π)=15
- На последнем периоде т.к. 100 - 2π*15 >π тоже 2 решения (вся область положительного синуса «построена»)
- Итого 32 неотрицательных решения, т.е. 31 положительное, 31 отрицательное и 0
- Ответ:63

$$\sin x = \frac{x}{100}$$