ОИКС
ИАТЭ НИЯУ МИФИ

Яцало Борис Иванович

Boris Yatsalo

yatsalo@gmail.com

[www.decerns.com]

2021

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Л-1

Экстремумы функций

Оптимальные Решения
Примеры Классических Задач

1. Построить прямоугольник **максимальной** площади с **заданным периметром** (частная задача, см. 4.1)

2. (*Задача Эвклида*) В треугольник вписать параллелограмм **максимальной** площади

3. В плоскости треугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника **минимальна**

Оптимальные Решения:
Примеры Классических Задач

4.1 (*Изопериметрическая задача*)
Какую максимальную площадь можно охватить замкнутой кривой заданной длины ?

4.2 (*Задача Дидоны*) Дана веревка длины L.
Какую максимальную площадь
(у прибрежной зоны- вдоль прямой) можно охватить данной веревкой ?

Оптимальные Решения:
Примеры Классических Задач

5. (*З. о Брахистохроне*)

Даны точки ***A*** и ***B*** на разной высоте. По какой кривой, соединяющей эти точки, шар спустится за минимальное время (под действием только силы тяжести)

Оптимальные Решения:
Примеры Классических Задач

6. (*З. об Оптимальном проектировании*)
Коробка изготавливается из листов размера $a*b$. Для этого из углов вырезают квадраты $x*x$ и сгибают вдоль линий.
Как делать вырезы так, чтоб получить коробку максимального обЪема ?

Задача о перевозках (транспортная задача)

7. Имеется m пунктов производства (поставки) некоторого однородного продукта и n пунктов его потребления. Для каждого пункта производства $i=1,\dots,m$, и каждого пункта его потребления $j=1,\dots,n$, заданы:

a_i – объем производства в пункте i;

b_j – объем потребления в пункте j;

c_{ij} – затраты на перевозку 1цы продукта от пункта производства i до пункта потребления j.

(потребление не превышает производства).

Задача: Составить план перевозок:

- не выводящий за пределы производства,
- полностью обеспечивающий всех потребителей,
- дающий минимум суммарных затрат на перевозку

Задача о бродячем торговце
(задача коммивояжера)

8. Имеется n+1 город;

c_{ij} – матрица расстояния между городами (i -j)

Выезжая из исходного города, коммивояжер должен побывать во всех остальных городах ровно 1 раз и вернуться в исходный город.

Составить оптимальный маршрут…

(по времени, стоимости, расстоянию)

Задачи Оптимального Управления

9. (*простейшая задача о быстродействии*)
(*движение управляемой тележки*)

Масса тележки m, в точке x_0, скорость- v_0.
Внешняя сила (тяга) – u, текущая координата – $x(t)$, задаются физические ограничения на тягу.
Задача: как за минимальное время, с учетом всех ограничений на управление (скорость, ускорение) достичь точки x_0 и остановиться (достичь с нулевой скоростью)

Непрерывные Функции

Дана ф-я $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ $\qquad f : D \to \mathbb{R}$;

одномерная ф-я: $\qquad D \subseteq \mathbb{R}$

многомерная ф-я $\qquad D \subseteq \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ ф-ия $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, \ldots, x_n)$ в D

Непрерывная ф-я: если при $x \to x_0$ $\lim f(x)=f(x_0)$, тогда ф-я непрерывна в т. x_0

Ф-я $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна в области D, if она непрерывна в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$

Непрерывные Функции

Дана ф-я $f(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ $\quad f : D \to \mathbb{R}$;

одномерная ф-я: $\quad D \subseteq \mathbb{R}$

многомерная ф-я $\quad D \subseteq \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ ф-ия $f(\boldsymbol{x})=f(x_1, \ldots, x_n)$ в D

Непрерывная ф-я: если при $x \to x_0$ $\lim f(x)=f(x_0)$,
тогда ф-я непрерывна в т. x_0

Ф-я $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна в области D, if она непрерывна в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$

Непрерывные Функции

D=[a,b] – отрезок, - замкнутое множество (=содержит все свои предельные очки)

D=(a,b) – интервал.

Свойства:

Th. (Больцано-Коши о промежуточном значении)

Если непрерывная ф-я принимает на отрезке значечния разных знаков, то найдется точка, в которой ф-я =0.

Th (Вейерштрасса о максим и миним значениях)

Непрерывная на отрезке ф-я ограничена и есть точки, где ф-я принимает максим и миним значения.

Свойства непрерывных функций

Th. (Вейерштрасса)

Непрерывная ф-я $f(x_1,\dots,x_n)$, заданная на компакте $\boldsymbol{K}$, достигает на этом компакте своего максимума и минимума.

Дифференцируемые ф-ии

Дана ф-я *f*(***x***), $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ $f: D \to \mathbb{R}$;

Ф-я *f(x)*, определенная в D,

называется дифференцируемой в т. *a*,

если

$$f(x+h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x,h),$$

$$где\ \alpha(x,h) = o(h)$$

При этом:

$df(x) = A(x)h = f'(x)\,dx$ называют дифференциалом

$A(x) = f'(x) = \dfrac{df(x)}{dx}$ – производная

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (h = \Delta x)$$

Дифференцируемые ф-ии

Обозначения: $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ $f : D \to \mathbb{R}$;

$C(X)$ – множ-во непрерывных в области X функций,

$D(X)$ – дифференцируемые в X функции,

частое обозначение $f \in C^k(X)$:

существует k производных, и k-ая производная непрерывна

Частные производные

Дана ф-я $f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})=f(x_1,\dots,x_n)$ в $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Частные производные:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x};\quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2};\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y};\quad \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}$$

$$f_x^{'}(x,y);\quad f_{xx}^{''}(x,y)$$

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n) \to \frac{\partial f(\dots)}{\partial x_i}$$

Экстремумы

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Рассмотрим классические методы оптимизации, сводящиеся к нахождению оптимума ф-ии $f(x_1, \ldots, x_n)$ в D.

Дана ф-я $f : D \to \mathbb{R}$;

Def. Точка $\boldsymbol{x}_0$ назыв т. <u>***глобального***</u> максимума (в D), если для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$ выполняется нер-во

$$f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_0)$$

локальный экстремум

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad f : D \to \mathbb{R}\,; D \subseteq \mathbb{R}^n$

Def. Точка $\boldsymbol{x}_0$ назыв т. <u>*локального*</u> максимума ф-ии $f(\boldsymbol{x})$ (в *области* D),

если существует окрестность т. $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0)$, такая, что

для всех $\quad \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}_0)(\subset \boldsymbol{D})$ выполняется нер-во

$$f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_0)$$

Примеры (лок и глоб экстремумов)

Базовая теорема

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$

Th (Ферма). Если $\boldsymbol{x}_0$ **-** т. локального экстремума дифференцируемой ф-ии $f(x)$ в откр. Области D, тогда

$$f'(x) = 0$$

Пусть $St(f)=\{x: f'(x)=0\}$ – множ-во стационарных точек.

Тогда: точки экстремума содержатся в множ-ве стационарных точек (обратное не верно).

Пусть D=[a, b] – отрезок на прямой.

f задана на прямой, тогда точки глобального экстремума содержатся в множ-ве *критических точек*

$$Kr(f) = St(f) \cup \{a, b\}$$

Базовая теорема

Пусть $f : D \to \mathbb{R}$, *т.е.* $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Th *(обобщение).* Если $\boldsymbol{x}_0$ **-** т. локального экстремума дифференцируемой ф-ии $f(x_1, \ldots, x_n)$, тогда $\boldsymbol{f'(x_0)} = 0$

Здесь: $$\boldsymbol{f'(x)} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f(x)}}{\partial \boldsymbol{x}_1}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{f(x)}}{\partial \boldsymbol{x}_n}\right) = \boldsymbol{grad\ f}(\boldsymbol{x}) = \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

(опрератор набла)

Глобальный экстремум

Правило. Точки глобального экстремума содержатся в множестве ее критических точек:

где ∂D - граница области *D*.

$$Kr(f) = St(f) \cup \partial D$$

Линии уровня

Графический метод нахождения экстремумов на примере n=2.

Линии уровня функции f(x,y):

$$L_c = \{(x, y): f(x, y) = c\} \quad (\min f \leq c \leq \max f)$$

Через каждую точку плоскости М(x_0,y_0) (входящую в область определения фу-ии) проходит только одна линия уровня: $f(x,y)= f(x_0,y_0)$

1. Графический метод нахожд. экстремумов ф-ий на основе нахождения линий уровня. (рис с.30,31, ВР).

2. Использование градиента функции: Направление градиента совпадает с направлением наибольшей скорости роста фу-и в каждой точке. Он перпендикулярен линии уровня.

Нахождение Экстремумов

<u>Примеры задач</u>

$f \to opt \;\; (max, min)$

1. $y=f(x) \to extr \quad (sup\, /\, max;\; inf\, /\, min\,)$

2. $f(x,y) \to extr$

3. $f(x,y)=C \to extr$ (анализ линий уровня)

Условный экстремум

Метод Лагранжа нахождения усл. экстремумов функций в заданной области.

<u>Задача</u>: Пусть $f : D \to \mathbb{R}\, ; D \subseteq \mathbb{R}^n,\ f = f(x_1, \dots, x_n)$.

$f \to opt$ *(max/min)* при условии, что $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$ удовлетворяют системе ограничений

$$g_1(\boldsymbol{x}) = 0,$$

$$\dots$$

$$g_m(\boldsymbol{x}) = 0$$

(предполагается, что фу-ии f и g_i являются ф-ями класса C^1 в области определения

Оптимизация при наличии ограничений

Метод решения: функция *Лагранжа*:

$$L(x_1,...,x_n,\lambda_1,...,\lambda_m) = f(x_1,...,x_n) + \lambda_1 g_1(x_1,...,x_n) + ... + \lambda_m g_m(x_1,...,x_n)$$

Или (в более компактном виде):

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x},\lambda) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \lambda_1 \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}) + ... + \lambda_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})$$

$$= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \lambda \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}), \quad \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{\boldsymbol{m}}), \quad \boldsymbol{g} = (\boldsymbol{g}_1, ..., \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{m}}).$$

Правило нахождения экстремумов:
Точка условного экстремума является стационарной точкой фу-ии Лагранжа,т.е.:

$$\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \boldsymbol{x}_i} = 0, \quad \boldsymbol{i} = 1,...,\boldsymbol{n}; \quad \frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial \lambda_j} = 0, \quad \boldsymbol{j} = 1,...,\boldsymbol{m}.$$