



**ОИКС
ИАТЭ НИЯУ МИФИ**

Яцало Борис Иванович

Boris Yatsalo

yatsalo@gmail.com

[www.decerns.com]

2021



МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Л-1

Экстремумы функций



Оптимальные Решения Примеры Классических Задач

1. Построить прямоугольник максимальной площади с заданным периметром (частная задача, см. 4.1)
2. (Задача Эвклида) В треугольник вписать параллелограмм максимальной площади
3. В плоскости треугольника найти точку, сумма расстояний от которой до вершин треугольника минимальна



Оптимальные Решения: Примеры Классических Задач

4.1 (*Изопериметрическая задача*)

Какую максимальную площадь можно охватить замкнутой кривой заданной длины ?

4.2 (*Задача Дидоны*) Дана веревка длины L .

Какую максимальную площадь (у прибрежной зоны- вдоль прямой) можно охватить данной веревкой ?



Оптимальные Решения: Примеры Классических Задач

5. (3. о Брахистохроне)

Даны точки A и B на разной высоте. По какой кривой, соединяющей эти точки, шар спустится за минимальное время (под действием только силы тяжести)



Оптимальные Решения: Примеры Классических Задач

6. (3. об Оптимальном проектировании)

Коробка изготавливается из листов размера $a*b$. Для этого из углов вырезают квадраты $x*x$ и сгибают вдоль линий.

Как делать вырезы так, чтоб получить коробку максимального объема ?



Задача о перевозках (транспортная задача)

7. Имеется m пунктов производства (поставки) некоторого однородного продукта и n пунктов его потребления. Для каждого пункта производства $i=1, \dots, m$, и каждого пункта его потребления $j=1, \dots, n$, заданы:

a_i – объем производства в пункте i ;

b_j – объем потребления в пункте j ;

c_{ij} – затраты на перевозку 1цы продукта от пункта производства i до пункта потребления j .

(потребление не превышает производства).

Задача: Составить план перевозок:

- не выходящий за пределы производства,
- полностью обеспечивающий всех потребителей,
- дающий минимум суммарных затрат на перевозку

Задача о бродячем торговце (задача коммивояжера)

8. Имеется $n+1$ город;

c_{ij} – матрица расстояния между городами ($i - j$)

Выезжая из исходного города, коммивояжер должен побывать во всех остальных городах ровно 1 раз и вернуться в исходный город.

Составить оптимальный маршрут...

(по времени, стоимости, расстоянию)



Задачи Оптимального Управления

9. (простейшая задача о быстродействии)
(движение управляемой тележки)

Масса тележки m , в точке x_0 , скорость- v_0 .

Внешняя сила (тяга) – u , текущая координата – $x(t)$, задаются физические ограничения на тягу.

Задача: как за минимальное время, с учетом всех ограничений на управление (скорость, ускорение) достичь точки x_0 и остановиться (достичь с нулевой скоростью)

Непрерывные Функции

Дана ф-я $f(x)$, $x \in D$ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$;

одномерная ф-я: $D \subseteq \mathbb{R}$

многомерная ф-я $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ ф-ия $f(\mathbf{x})=f(x_1, \dots, x_n)$ в D

Непрерывная ф-я: если при $x \rightarrow x_0$ $\lim f(x)=f(x_0)$,
тогда ф-я непрерывна в т. x_0

Ф-я $f(x)$ непрерывна в области D , if она
непрерывна в каждой точке $x \in D$

Непрерывные Функции

Дана ф-я $f(x)$, $x \in D$ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$;

одномерная ф-я: $D \subseteq \mathbb{R}$

многомерная ф-я $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_n)$ ф-ия $f(\mathbf{x})=f(x_1, \dots, x_n)$ в D

Непрерывная ф-я: если при $x \rightarrow x_0$ $\lim f(x)=f(x_0)$,
тогда ф-я непрерывна в т. x_0

Ф-я $f(x)$ непрерывна в области D , if она
непрерывна в каждой точке $x \in D$



Непрерывные Функции

$D=[a,b]$ – отрезок, - замкнутое множество
(=содержит все свои предельные очки)

$D=(a,b)$ – интервал.

Свойства:

Th. (Больцано-Коши о промежуточном значении)

Если непрерывная f -я принимает на отрезке значения разных знаков, то найдется точка, в которой f -я =0.

Th (Вейерштрасса о максим и миним значениях)

Непрерывная на отрезке f -я ограничена и есть точки, где f -я принимает максим и миним значения.



Свойства непрерывных функций

Th. (Вейерштрасса)

Непрерывная ф-я $f(x_1, \dots, x_n)$,

заданная на компакте K , достигает

на ЭТОМ компакте своего максимума

и минимума.



Дифференцируемые ф-ии

Дана ф-я $f(x)$, $x \in D$ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$;

Ф-я $f(x)$, определенная в D ,

называется дифференцируемой в т. a ,

если

$$f(x+h) - f(x) = A(x)h + \alpha(x, h),$$

$$\text{где } \alpha(x, h) = o(h)$$

При этом:

$df(x)$ называется дифференциалом

$A(x)$ производная $\frac{df(x)}{dx}$ —

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (h = \Delta x)$$



Дифференцируемые ф-ии

Обозначения: $x \in D$ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$;

$C(X)$ – множ-во непрерывных в области X функций,

$D(X)$ – дифференцируемые в X функции,

частое обозначение $f \in C^k(X)$:

существует k производных, и k -ая производная непрерывна



Частные производные

Дана ф-я $f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})=f(x_1, \dots, x_n)$ в $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Частные производные:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^3 f(x, y)}{\partial x^3}$$

$$f'_x(x, y); \quad f''_{xx}(x, y)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \frac{\partial f(\dots)}{\partial x_i}$$



Экстремумы

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Рассмотрим классические методы оптимизации, сводящиеся к нахождению оптимума ф-ии $f(x_1, \dots, x_n)$ в D .

Дана ф-я $f : D \rightarrow \mathbb{R}$;

Def. Точка x_0 назыв т. глобального максимума (в D), если для всех $x \in D$ выполняется нер-во

$$f(x) \leq f(x_0)$$



ЛОКАЛЬНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^n$ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$; $D \subseteq \mathbb{R}^n$

Def. Точка \mathbf{x}_0 назыв т. локального максимума
ф-ии $f(\mathbf{x})$ (в области D),

если существует окрестность т. \mathbf{x}_0 , $U(\mathbf{x}_0)$, такая, что
для всех $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) (\subset D)$ выполняется нер-во

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$$

Примеры (лок и глоб экстремумов)



Базовая теорема

Пусть $D \subseteq \mathbb{R}$

Th (Ферма). Если x_0 - т. локального экстремума дифференцируемой ф-ии $f(x)$ в откp. Области D ,

тогда $f'(x) = 0$

Пусть $St(f) = \{x: f'(x) = 0\}$ – множ-во стационарных точек.

Тогда: точки экстремума содержатся в множ-ве стационарных точек (обратное не верно).

Пусть $D = [a, b]$ – отрезок на прямой.

f задана на прямой, тогда точки глобального экстремума содержатся в множ-ве *критических точек*

$$Kr(f) = St(f) \cup \{a, b\}$$



Базовая теорема

Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f^n = f(x_1, \dots, x_n)$.

Th (обобщение). Если \mathbf{x}_0 - т. локального экстремума дифференцируемой ф-ии $f(x_1, \dots, x_n)$, тогда $f'(\mathbf{x}_0) = 0$

Здесь: $f'(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right) = \mathbf{grad} f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x})$

(оператор набла)

Глобальный экстремум

Правило. Точки глобального экстремума содержатся в множестве ее критических точек:

где ∂D - граница области D .

$$Kr(f) = St(f) \cup \partial D$$

Линии уровня

Графический метод нахождения экстремумов на примере $n=2$.

Линии уровня функции $f(x, y)$:

$$L_c = \{(x, y) : f(x, y) = c\} \quad c \in [\min f, \max f]$$

Через каждую точку плоскости $M(x_0, y_0)$ (входящую в область определения фу-ии) проходит только одна линия уровня: $f(x, y) = f(x_0, y_0)$

1. Графический метод нахожд. экстремумов ф-ий на основе нахождения линий уровня. (рис с.30,31, ВР).

2. Использование градиента функции: Направление градиента совпадает с направлением наибольшей скорости роста фу-и в каждой точке. Он перпендикулярен линии уровня.

Нахождение Экстремумов

Примеры задач

$f \rightarrow opt \ (max, min)$

1. $y=f(x) \rightarrow extr \ (sup / max; inf / min)$

2. $f(x,y) \rightarrow extr$

3. $f(x,y)=C \rightarrow extr \ (\text{анализ линий уровня})$

Условный экстремум

Метод Лагранжа нахождения усл. экстремумов функций в заданной области.

Задача: Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R} ; D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f = f(x_1, \dots, x_n)$.
 $f \rightarrow opt$ (*max/min*) при условии, что $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$
удовлетворяют системе ограничений

$$g_1(\mathbf{x}) = 0,$$

...

$$g_m(\mathbf{x}) = 0$$

(предполагается, что фу-ии f и g_i являются ф-ями класса C^1 в области определения

Оптимизация при наличии ограничений

Метод решения: функция Лагранжа:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m g_m(x_1, \dots, x_n)$$

Или (в более компактном виде):

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) &= f(\mathbf{x}) + \lambda_1 g_1(\mathbf{x}) + \dots + \lambda_m g_m(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{g}) + \boldsymbol{\lambda} \mathbf{g}, \quad \mathbf{g} = (g_1, \dots, g_m). \end{aligned}$$

Правило нахождения экстремумов:

Точка условного экстремума является стационарной точкой функции Лагранжа, т.е.:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0, \quad j = 1, \dots, m.$$