

Подготовка к ЕГЭ по
математике.
Задание 16
(Задачи по планиметрии)

Учитель математики:

Кубракова Ирина Анатольевна

Свойства медианы треугольника.

Медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади (равновеликих треугольника).

Доказательство:

Проведем из вершины B треугольника ABC медиану BD и высоту BE .

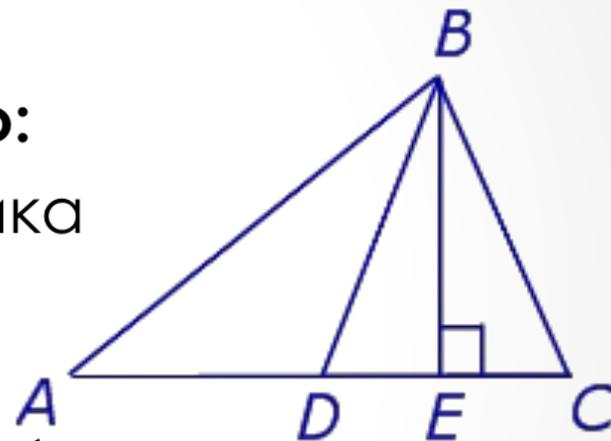
Заметим, что

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE, S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BE.$$

Поскольку отрезок BD является медианой, то

$$AD = DC \Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DBC},$$

что и требовалось доказать.



Медианы треугольника делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

Доказательство:

Докажем, что площадь каждого из шести треугольников, на которые медианы разбивают треугольник ABC , равна $\frac{1}{6}$ площади треугольника ABC . Для этого рассмотрим, например, треугольник AOF и опустим из вершины A перпендикуляр AK на прямую BF .

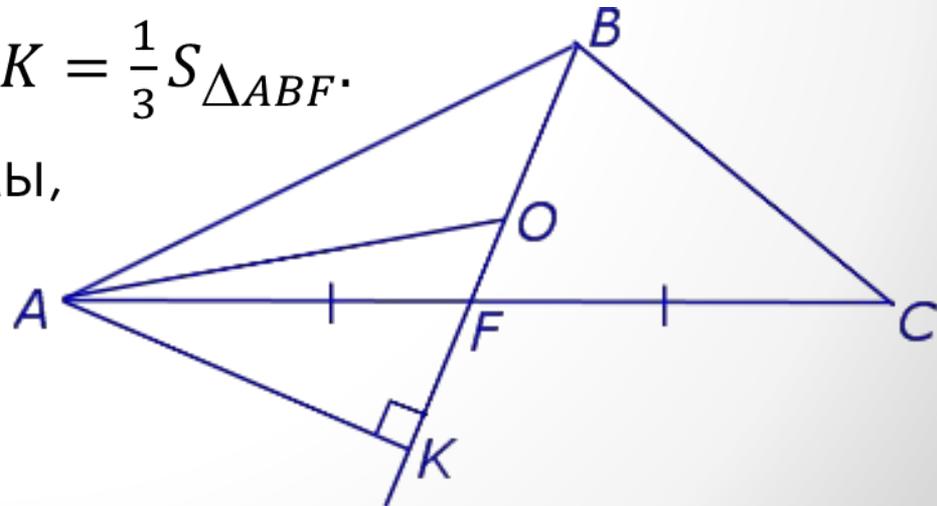
Тогда

$$S_{\Delta AOF} = \frac{1}{2} OF \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot BF \cdot AK = \frac{1}{3} S_{\Delta ABF}.$$

В силу предыдущей теоремы,

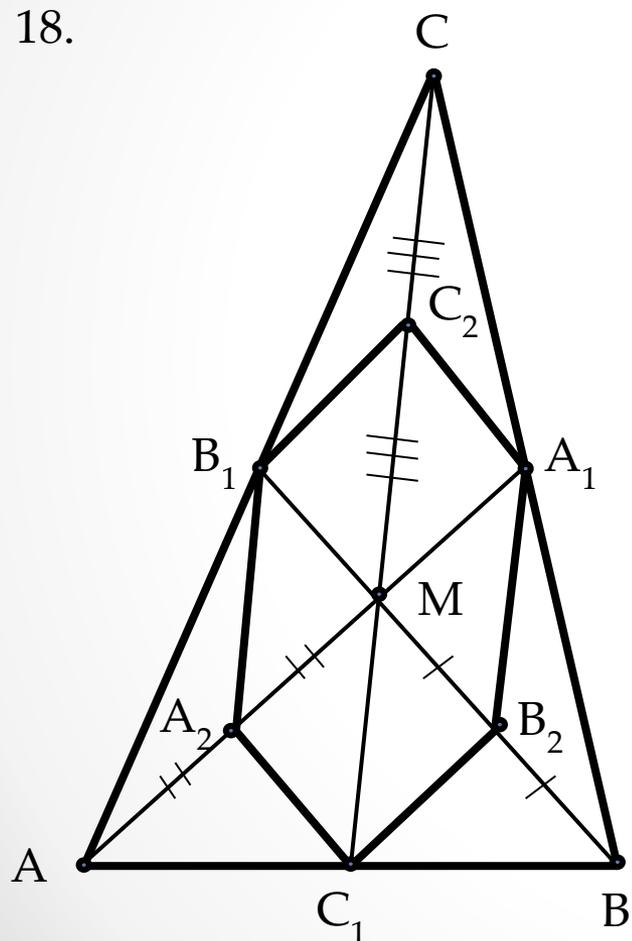
$$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AOF} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABF} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}.$$



Тренировочная работа № 2
(ЕГЭ. Математика. Типовые тестовые задания, под редакцией И.В. Ященко)

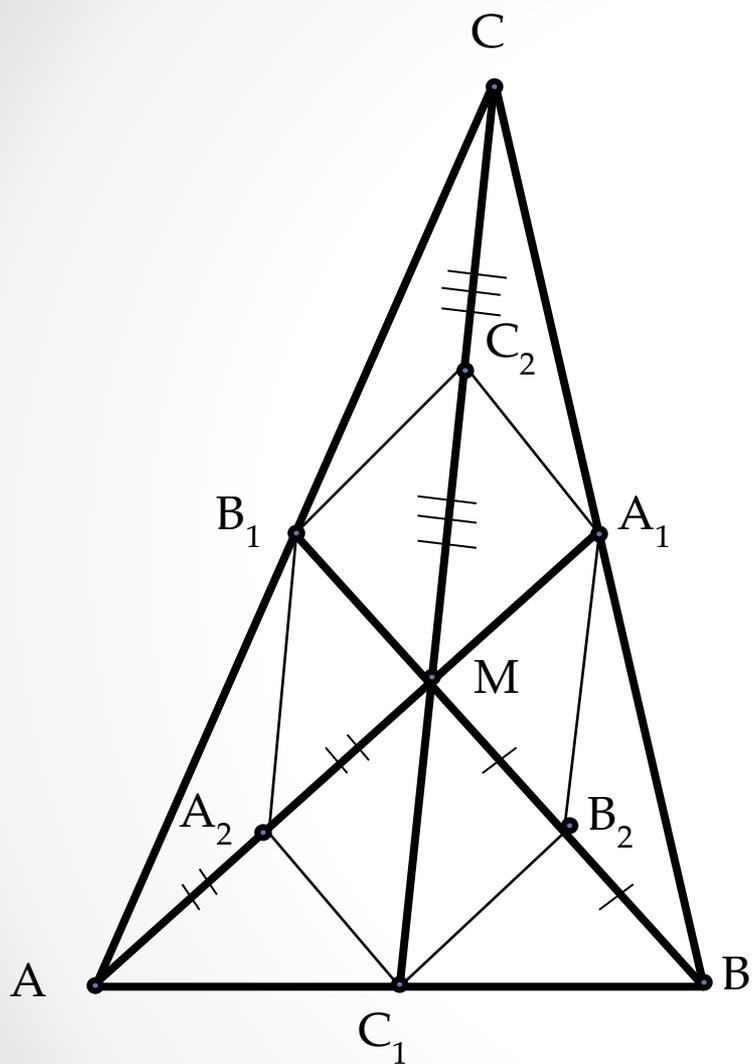
18.



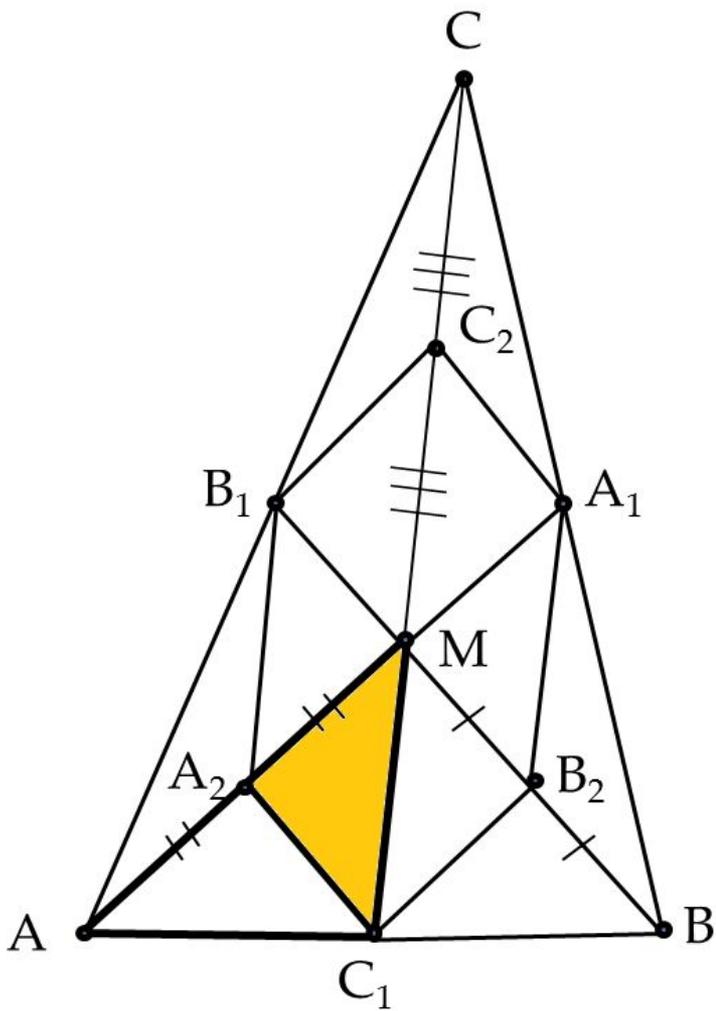
Медианы AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 , C_2 - середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.



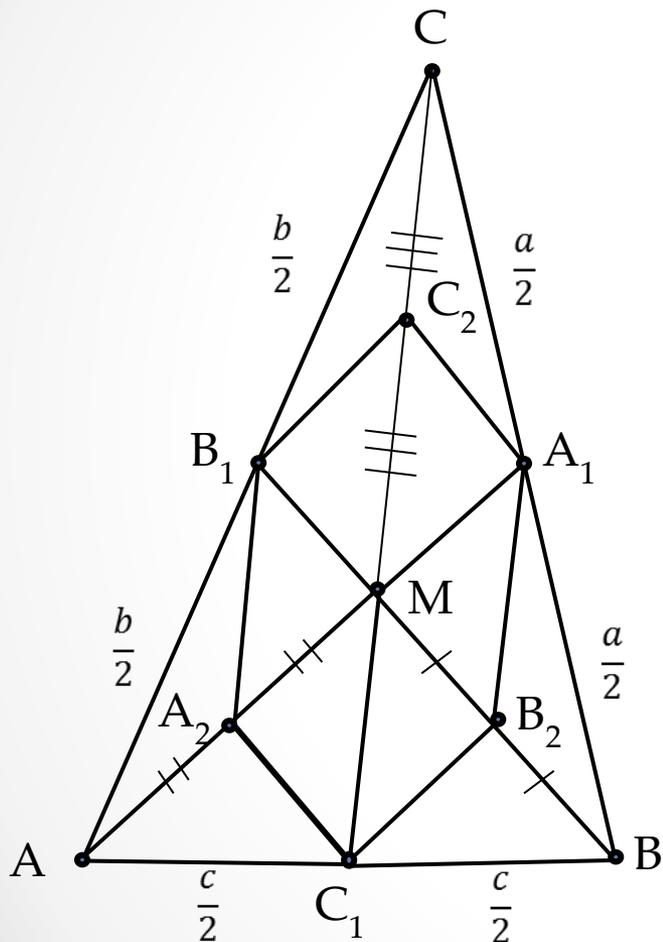
- Решение:
а) Обозначим $S_{\triangle ABC} = S$.
Тогда площадь каждого из
треугольников, на которые
медианы разбивают
треугольник ABC , равна $\frac{1}{6}S$.



Заметим, что C_1A_2 – медиана
треугольника AC_1M , поэтому

$$S_{\Delta A_2MC_1} = \frac{1}{2} S_{\Delta AMC_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12} S.$$

Аналогичные равенства
выполняются для остальных пяти
треугольников, составляющих
шестиугольник $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$.
Следовательно, площадь этого
шестиугольника равна $6 \cdot \frac{1}{12} S = \frac{1}{2} S$.



б) Обозначим

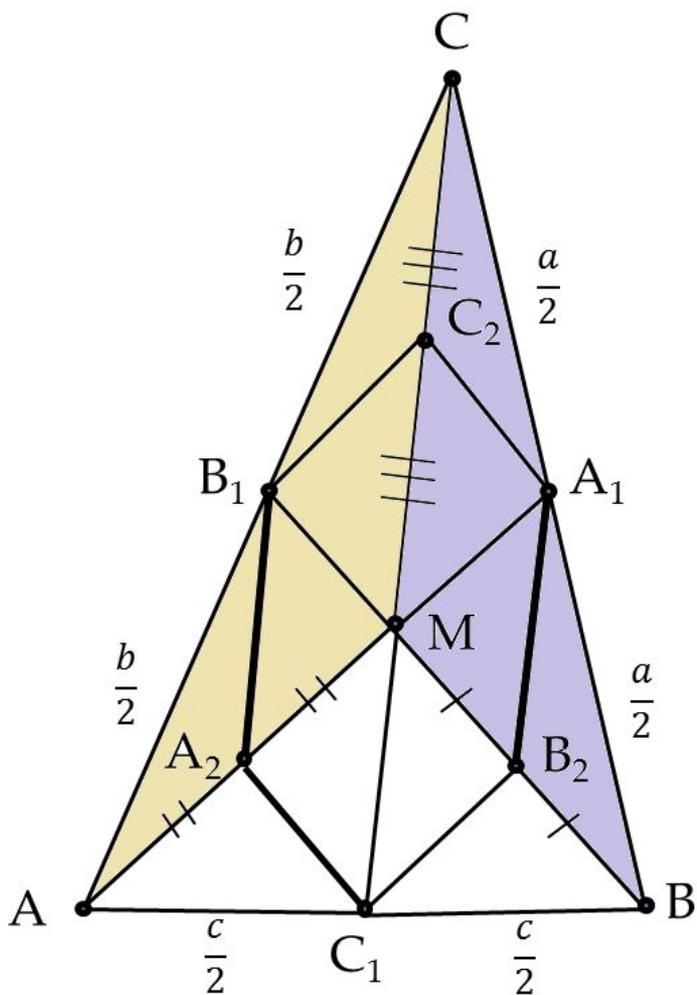
$$BC = a, AC = b, AB = c.$$

По формуле для квадрата
медианы находим, что

$$AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

$$CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

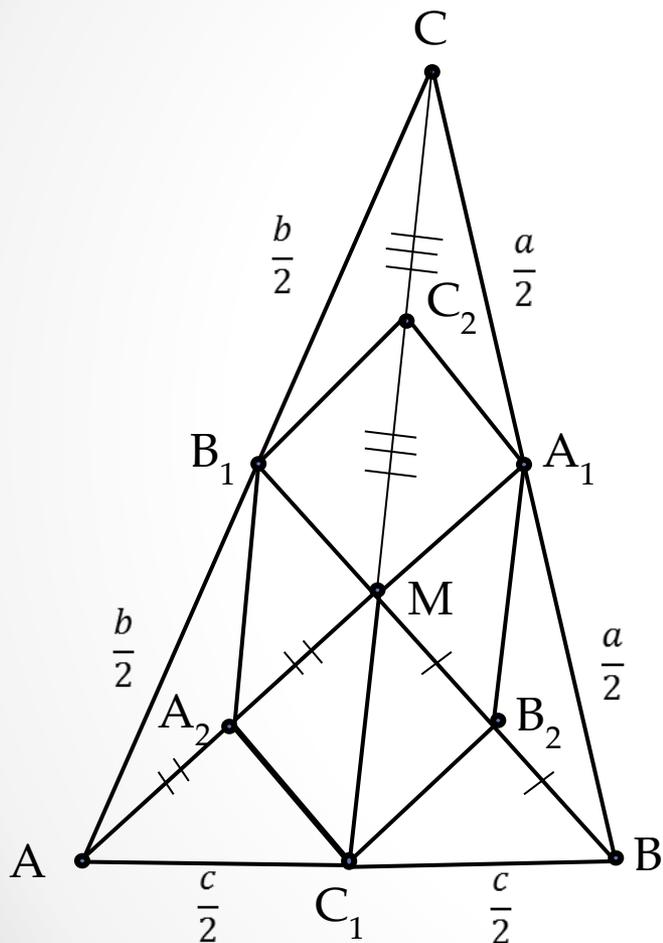


• Медианы треугольника делятся их точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому

$$AM = \frac{2}{3}AA_1, BM = \frac{2}{3}BB_1, CM = \frac{2}{3}CC_1.$$

Стороны A_2B_1 и A_1B_2 – средние линии треугольников AMC и BMC ,

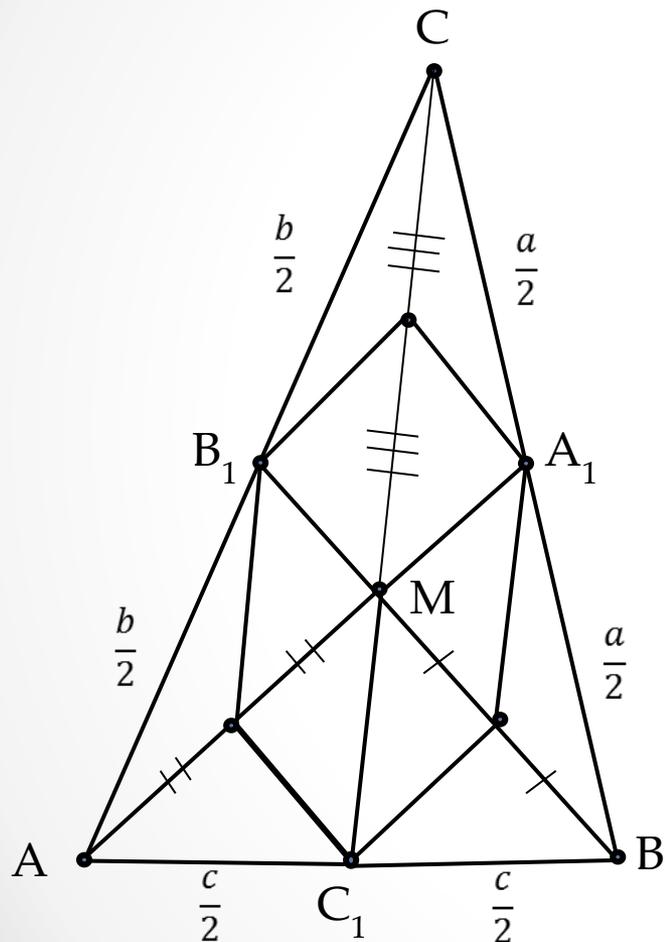
поэтому $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{2}CM$.



$$\begin{aligned}
 A_2B_1^2 &= A_1B_2^2 = \frac{1}{4}CM^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}CC_1^2 \\
 &= \frac{1}{36}(2a^2 + 2b^2 - c^2).
 \end{aligned}$$

АНАЛОГИЧНО,

$$\begin{aligned}
 C_2A_1^2 &= C_1A_2^2 = \frac{1}{36}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \\
 B_2C_1^2 &= B_1C_2^2 = \frac{1}{36}(2b^2 + 2c^2 - a^2)
 \end{aligned}$$



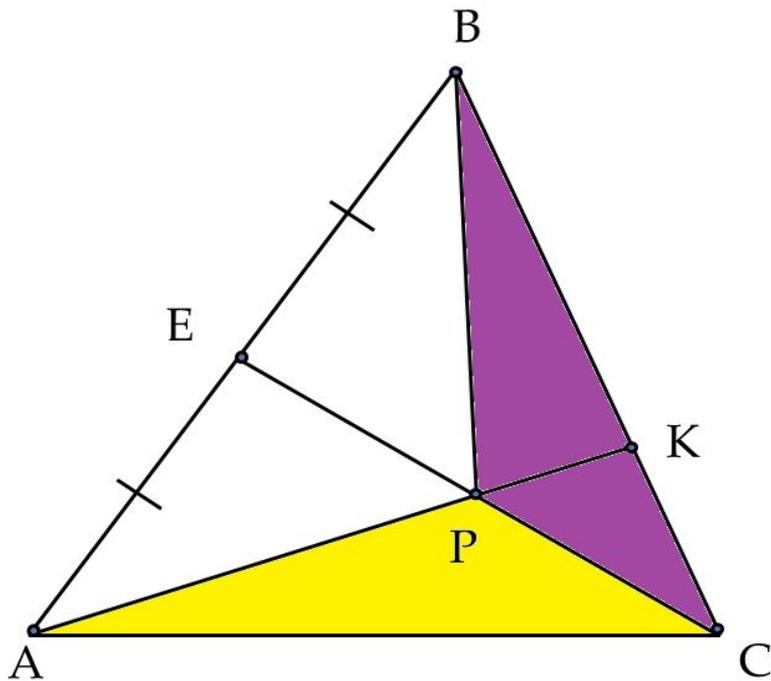
Следовательно, сумма квадратов всех сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned}
 & 2A_2B_1^2 + 2C_2A_1^2 + 2B_2C_1^2 = \\
 & = \frac{1}{18} (2a^2 + 2b^2 - c^2 + 2a^2 + \\
 & + 2c^2 - b^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2) = \\
 & = \frac{1}{18} (3a^2 + 3b^2 + 3c^2) = \\
 & = \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2) = \\
 & = \frac{1}{6} (49 + 64 + 16) = \frac{129}{6} = \frac{43}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{43}{2}$.

Тренировочный вариант № 95

(alexlarin.net)



В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка K так, что $CK:BK = 1:2$. Точка E – середина стороны AB . Отрезки CE и AK пересекаются в точке P .

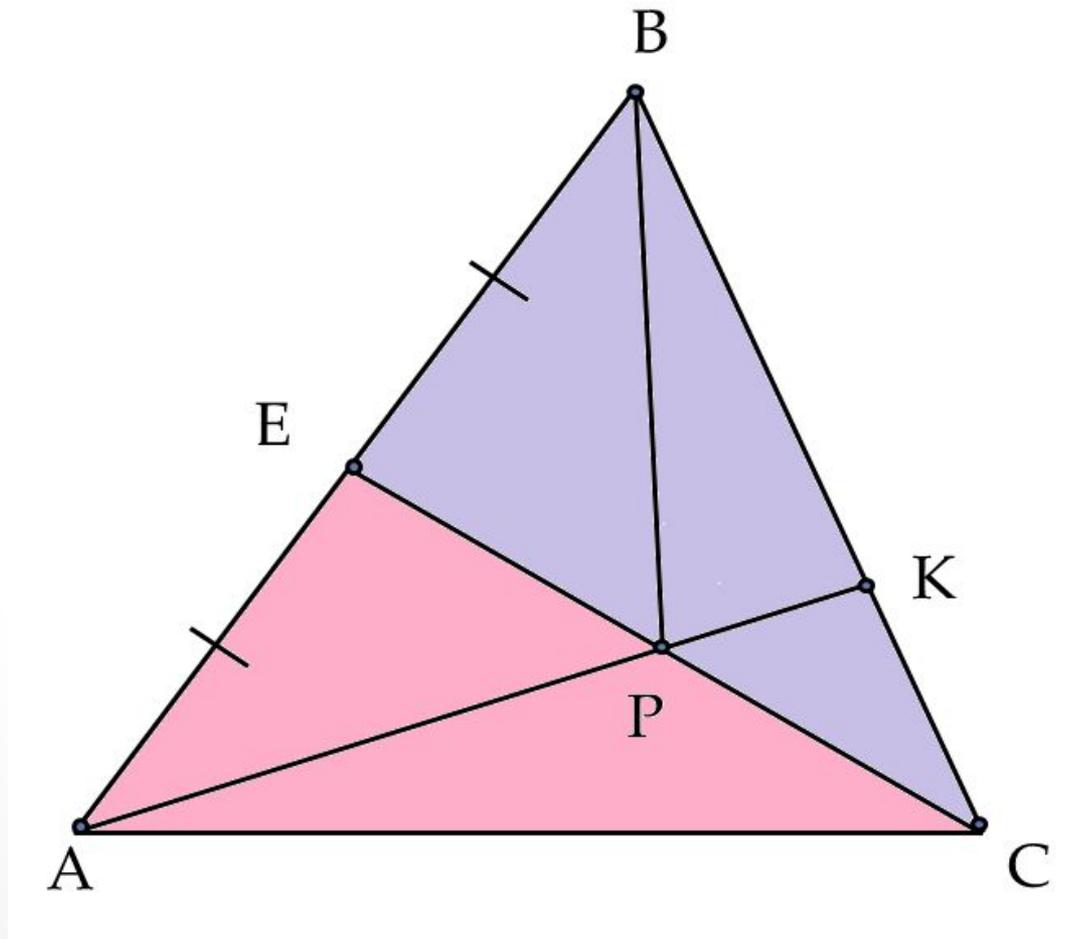
а) Докажите, что треугольники BPC и APC имеют равные площади.

б) Найдите площадь треугольника ABP , если площадь треугольника ABC равна 120.

Решение:

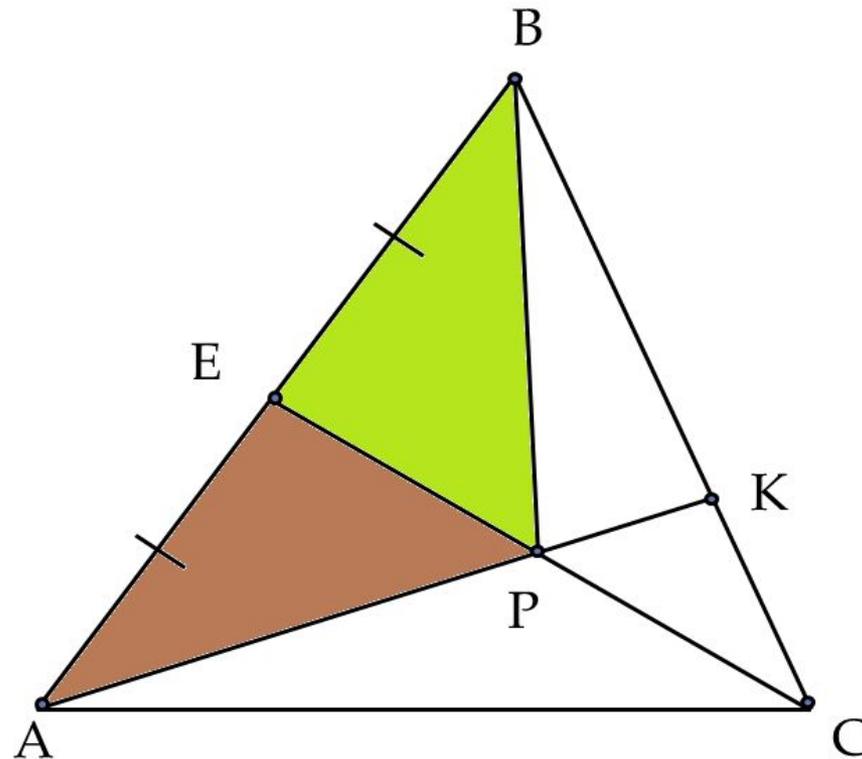
а) CE – медиана треугольника ABC .

Следовательно, $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle BCE}$.



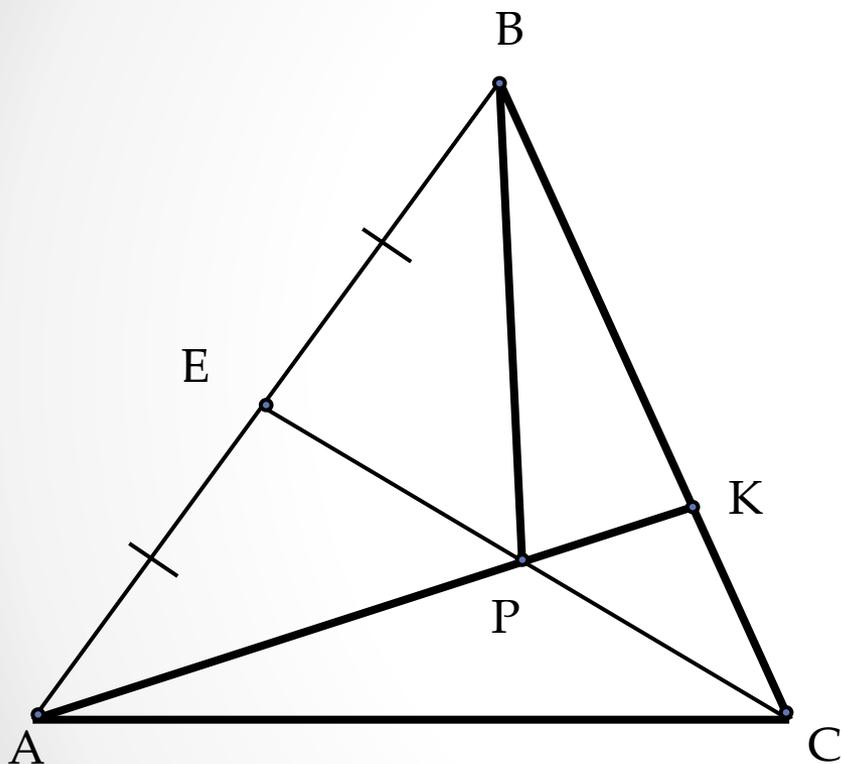
Аналогично, PE – медиана треугольника ABP .

Следовательно, $S_{\triangle APE} = S_{\triangle BPE}$.



$$S_{\triangle ACE} - S_{\triangle APE} = S_{\triangle BCE} - S_{\triangle BPE}$$

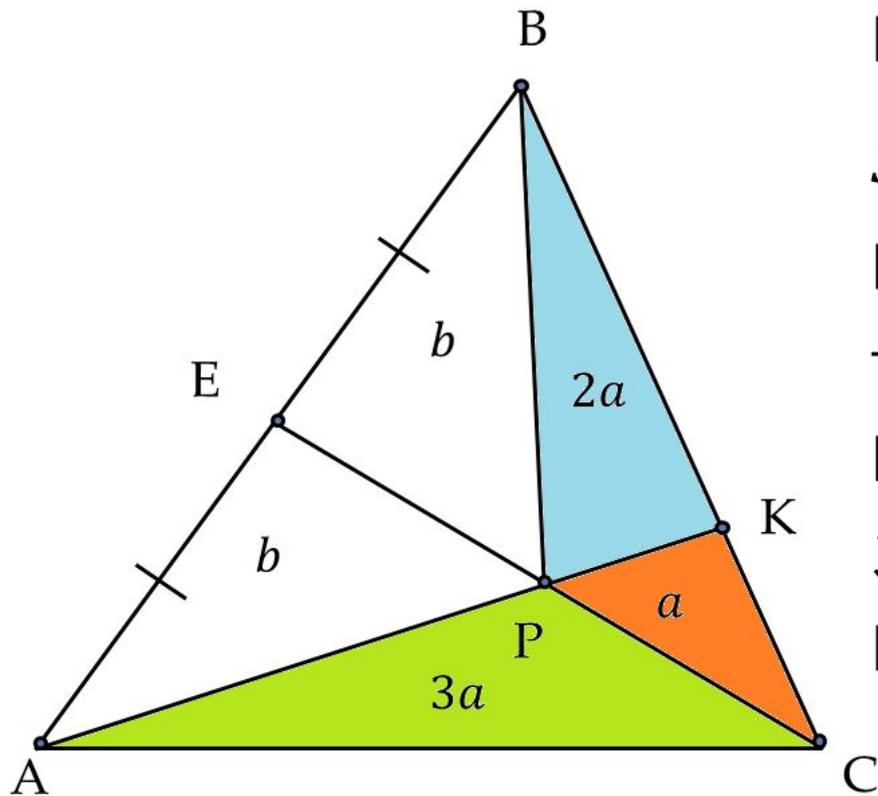
Или $S_{\triangle APC} = S_{\triangle BPC}$, что и требовалось доказать.



б) Из условия задачи относительно точки K также вытекает:

$$S_{\Delta ACK} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = 40,$$

$$S_{\Delta BPK} = 2S_{\Delta CPK}.$$



Если $S_{\Delta CPK} = a$, то $S_{\Delta BPK} = 2a$,

$S_{\Delta APC} = 3a$.

Пусть $S_{\Delta APE} = S_{\Delta BPE} = b$,

тогда $S_{\Delta ACK} = 4a = 40 \Rightarrow a = 10$.

Но $S_{\Delta BCE} = 3a + b = 60$.

Значит, $b = 60 - 3a = 30$.

В таком случае:

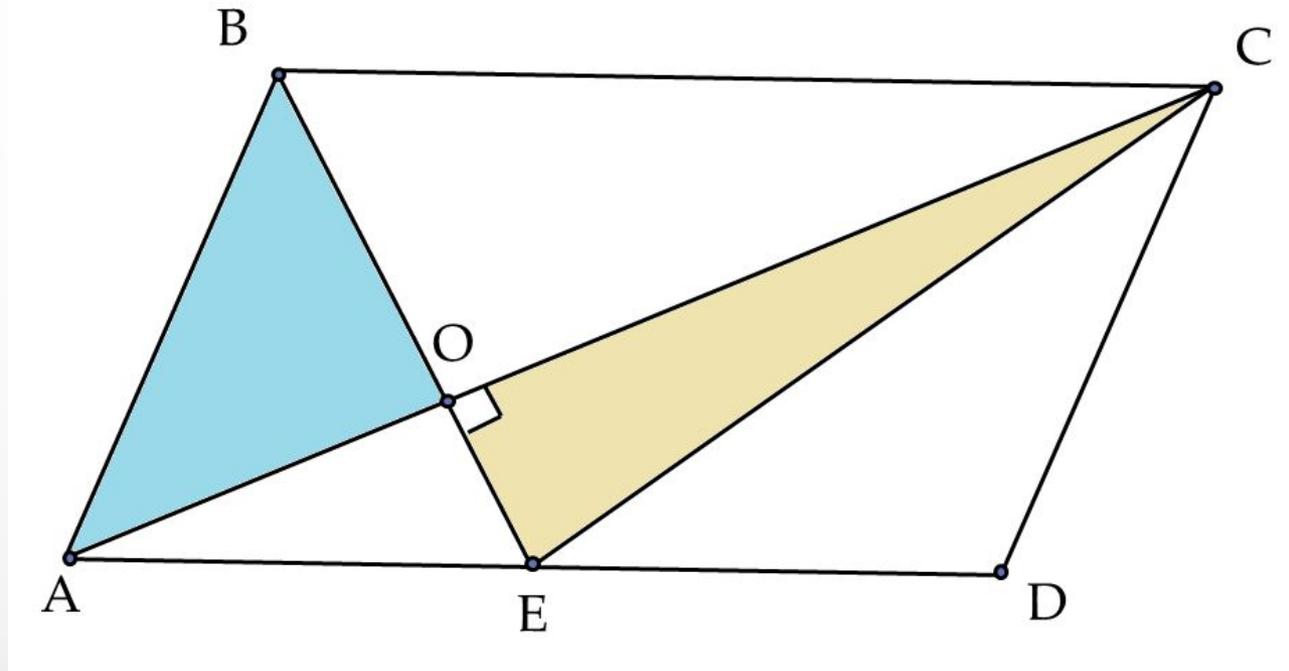
$$S_{\Delta ABP} = 2b = 60.$$

Тренировочный вариант № 99

(alexlarin.net)

Точка E – середина стороны AD параллелограмма $ABCD$, прямые BE и AC взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O .

- Докажите, что площади треугольников AOB и COE равны.
- Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $AB = 3$, $BC = 4$.



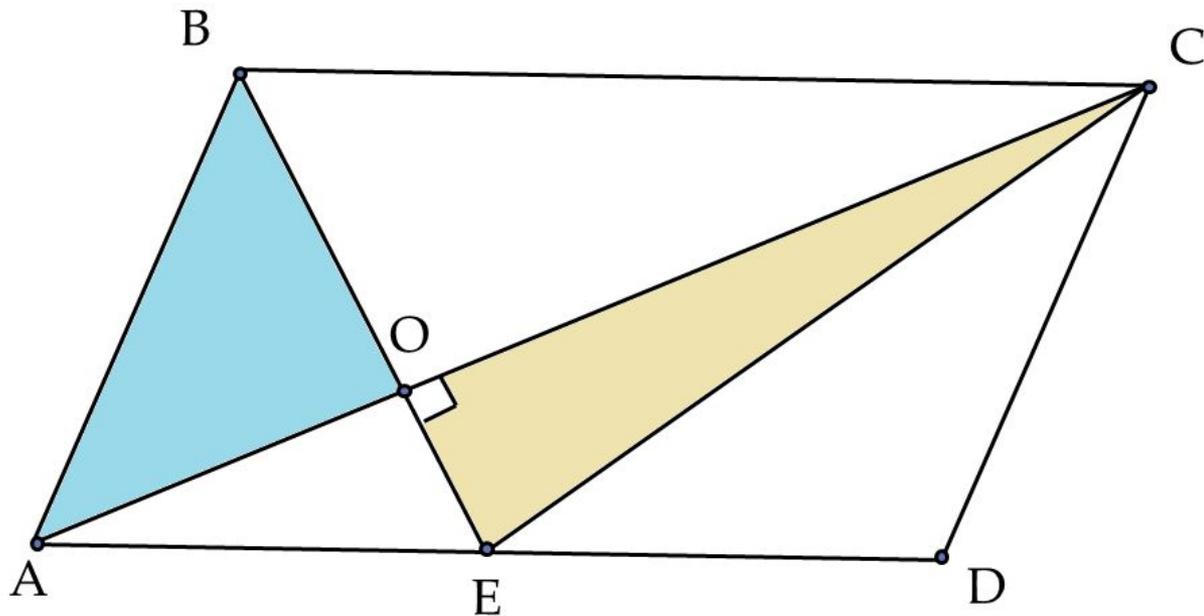
Решение:

$$a) S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABE} - S_{\Delta AOE},$$

$$S_{\Delta COE} = S_{\Delta ACE} - S_{\Delta AOE},$$

$S_{\Delta ABE} = S_{\Delta ACE}$, т.к. имеют общее основание AE и равные высоты.

Следовательно, $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta COE}$



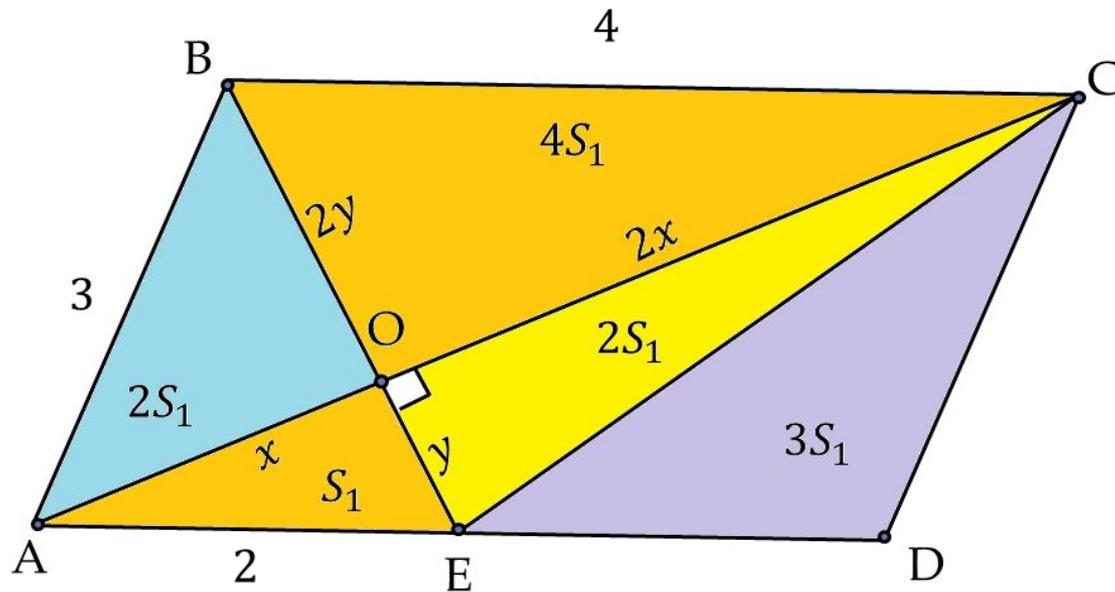
6) 1. $\triangle COB \sim \triangle AOE$ с $k = 2$.

Пусть $AO = x$, $OE = y$, тогда $OC = 2x$, $OB = 2y$.

$$S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2}xy = S_1, \text{ тогда } S_{\triangle AOB} = S_{\triangle EOC} = 2S_1$$

$$S_{\triangle BOC} = 4S_1; S_{\triangle DCE} = S_{\triangle ACE} = 3S_1.$$

$$S_{ABCD} = 12S_1 = 12 \cdot \frac{1}{2}xy = 6xy.$$

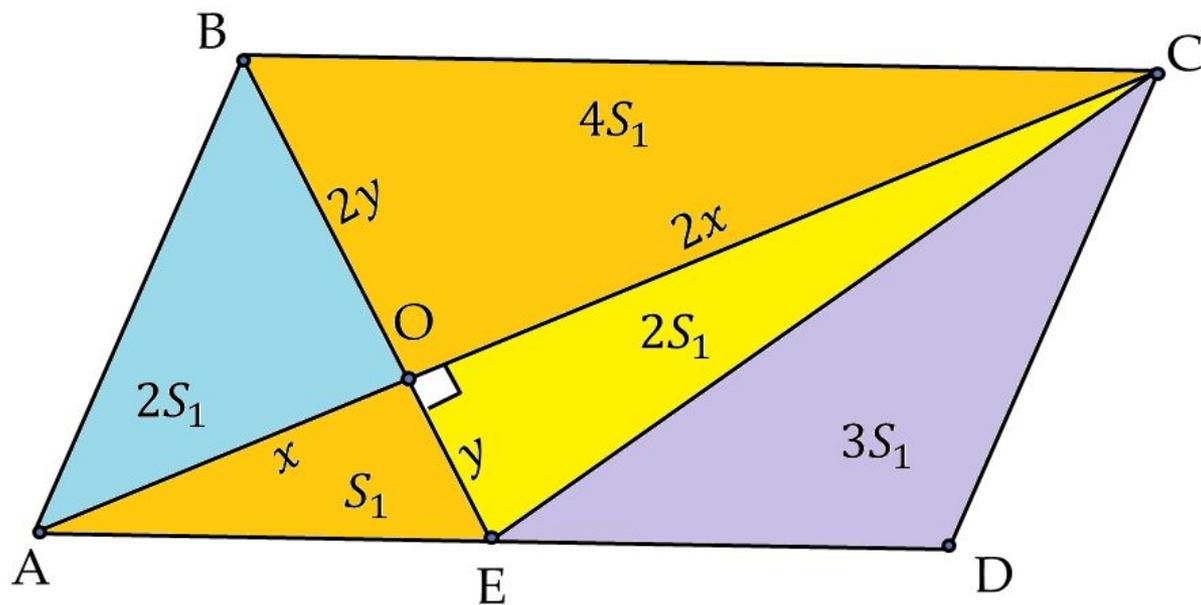


2. Из $\triangle AOE$ имеем $x^2 + y^2 = 4$.

Из $\triangle AOB$: $x^2 + 4y^2 = 9$. Тогда $y^2 = \frac{5}{3}$; $x^2 = \frac{7}{3}$.

$xy = \frac{\sqrt{35}}{3}$ и $S_{ABCD} = 6 \cdot \frac{\sqrt{35}}{3} = 2\sqrt{35}$.

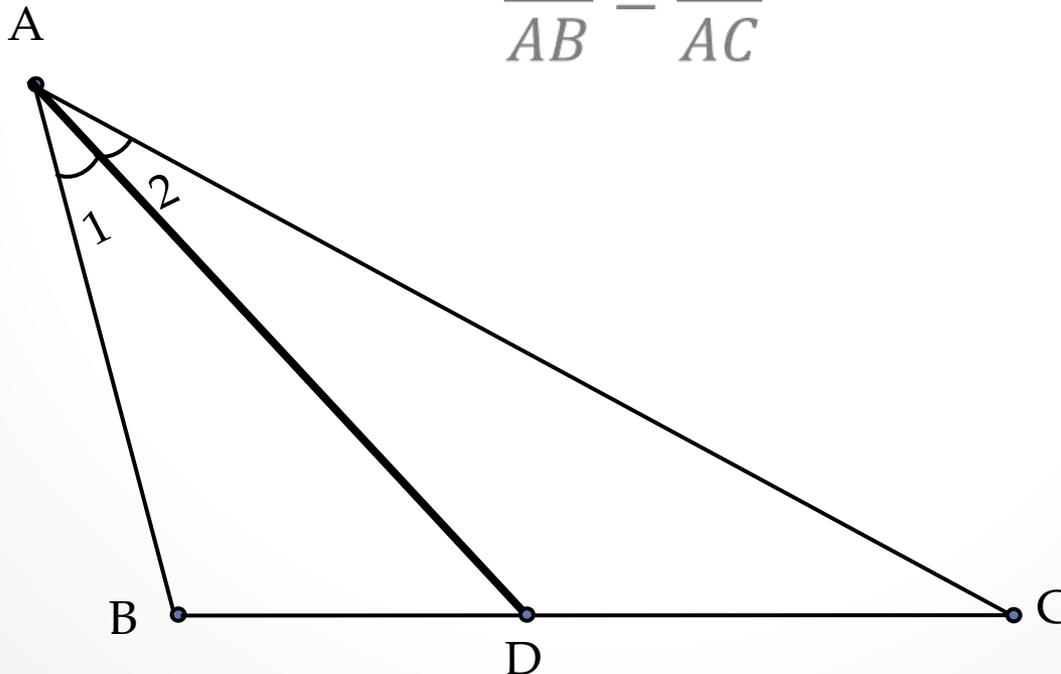
Ответ: $2\sqrt{35}$



Свойство биссектрисы треугольника.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

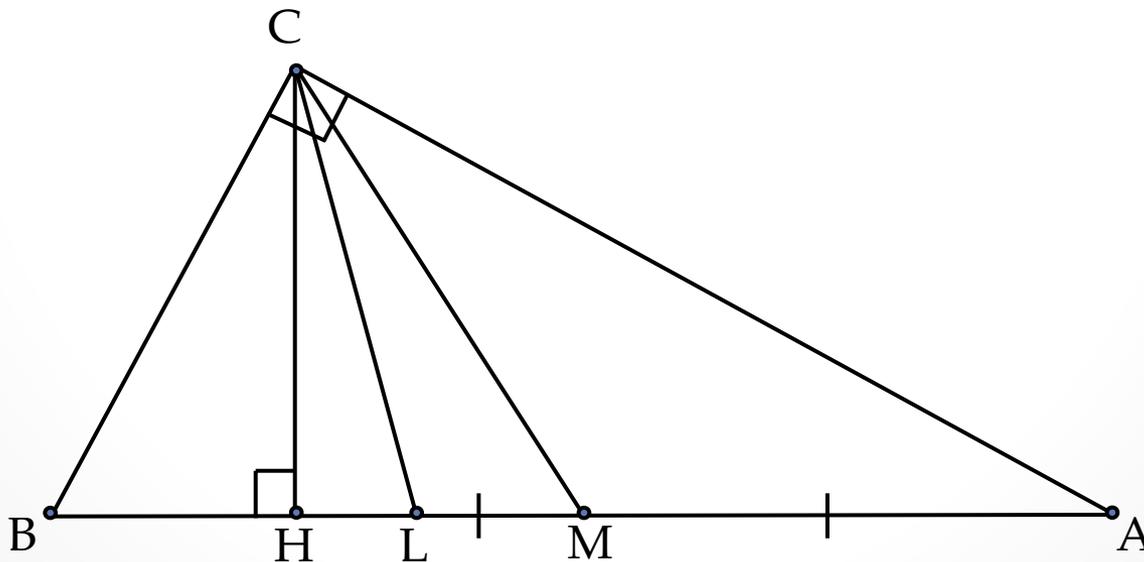


Тренировочный вариант № 98

(alexlarin.net)

В прямоугольном неравнобедренном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведены высота CH , медиана CM и биссектриса CL .

- Докажите, что CL является биссектрисой угла MCH .
- Найдите длину биссектрисы CL , если $CH = 3$, $CM = 5$.



Решение:

а) Пусть катет $AC > BC$.

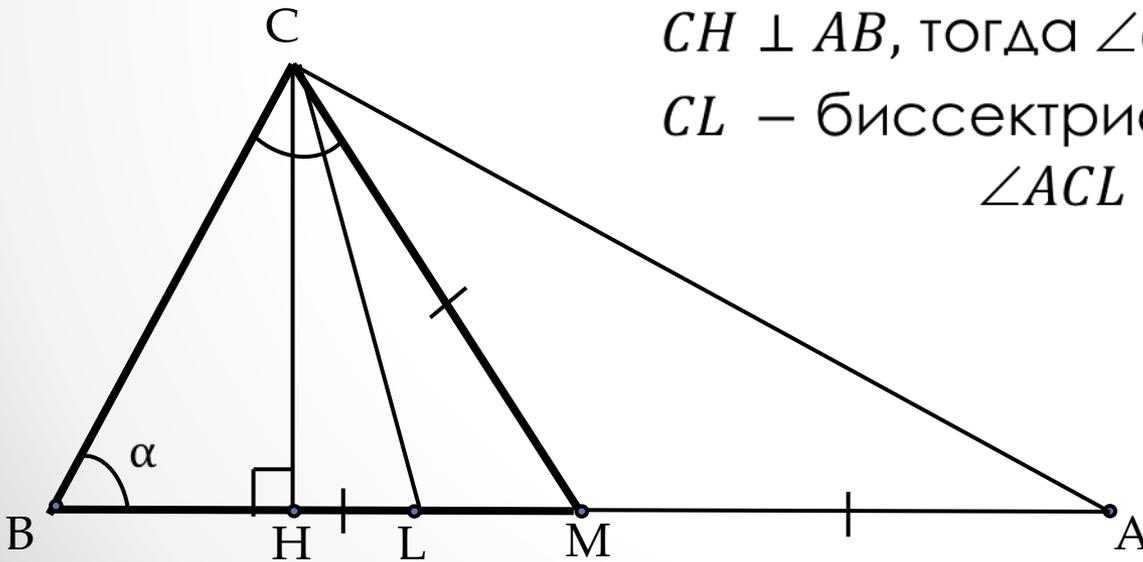
Медиана в прямоугольном треугольнике является радиусом описанной окружности.

Т.е. $CM = AM = BM$.

Значит, $\triangle CMB$ – равнобедренный,
 $\angle MBC = \angle MCB = \alpha$.

$CH \perp AB$, тогда $\angle CHB = 90^\circ$.

CL – биссектриса, тогда
 $\angle ACL = \angle BCL = 45^\circ$.



Найдем углы MCL и LCH и покажем, что они равны.

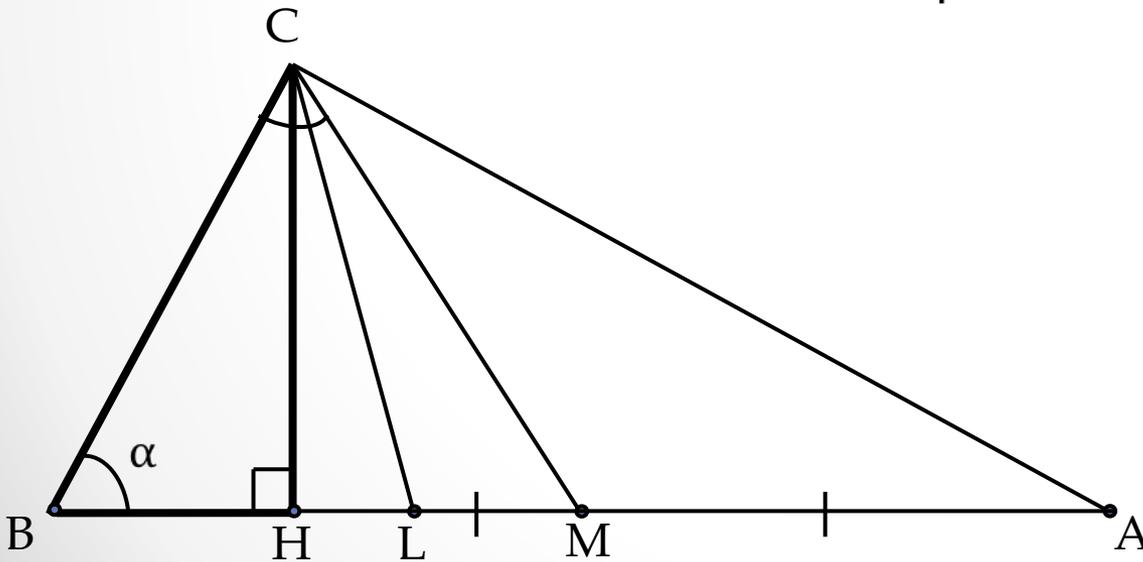
$$\angle LCH = \angle BCL - \angle BCH.$$

Из прямоугольного $\triangle CHB$: $\angle BCH = 90^\circ - \alpha$.

$$\angle LCH = 45^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha - 45^\circ;$$

$$\angle MCL = \angle MCB - \angle BCL = \alpha - 45^\circ;$$

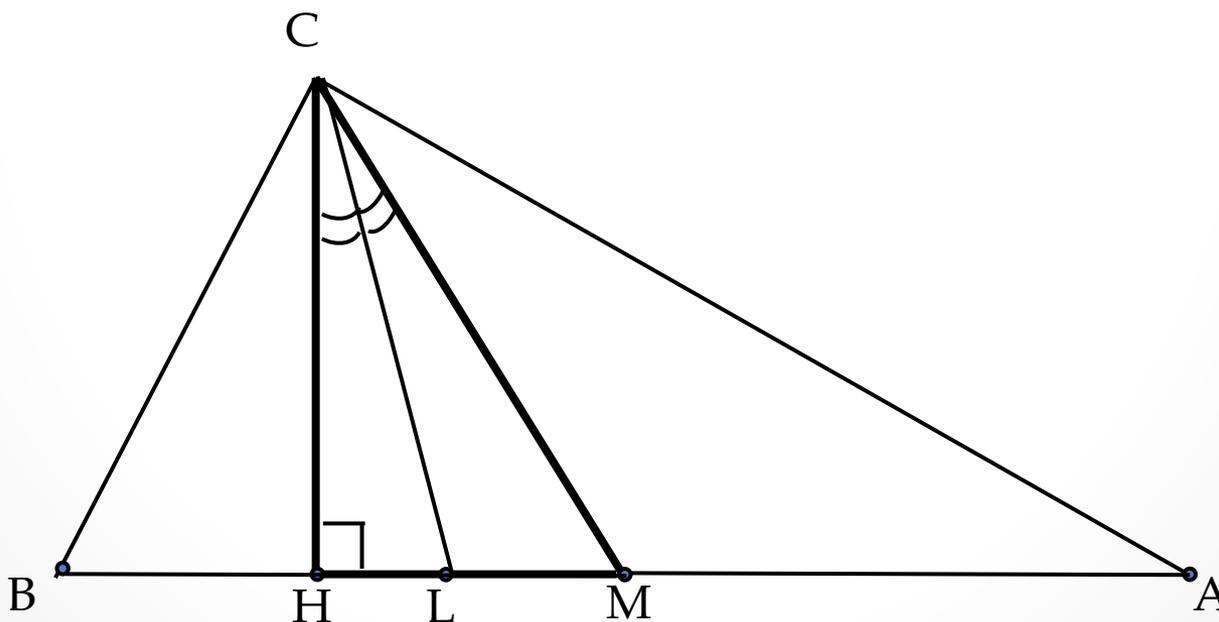
$\angle LCH = \angle MCL \mid \Rightarrow CL$ – биссектриса $\angle MCH$.



б) Биссектриса делит сторону на части,
пропорциональные прилежащим сторонам, т.е.

$$\frac{CM}{CH} = \frac{ML}{LH} = \frac{5}{3}.$$

Пусть $ML = 5x$, $LH = 3x$, тогда $MH = 8x$.



Из прямоугольного $\triangle MHC$ имеем:

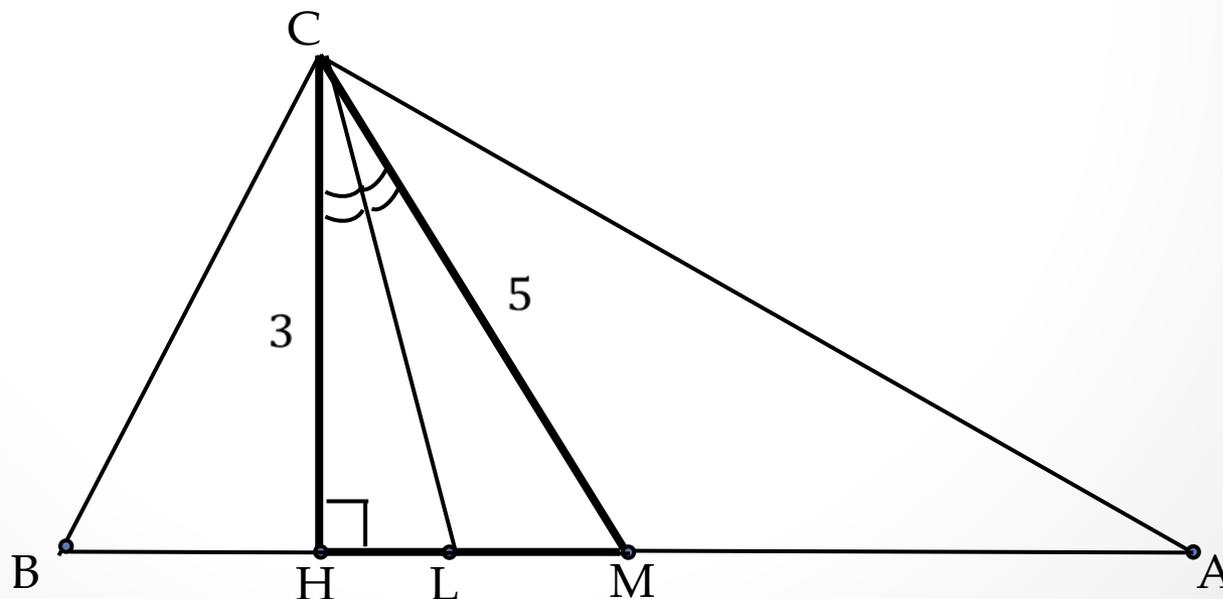
$$CM^2 = CH^2 + MH^2, \quad 9 + 64x^2 = 25, \quad 64x^2 = 16;$$

$$x^2 = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{1}{2}; \quad LH = \frac{3}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника CHL :

$$CL^2 = CH^2 + LH^2; \quad CL^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}, \quad CL = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.



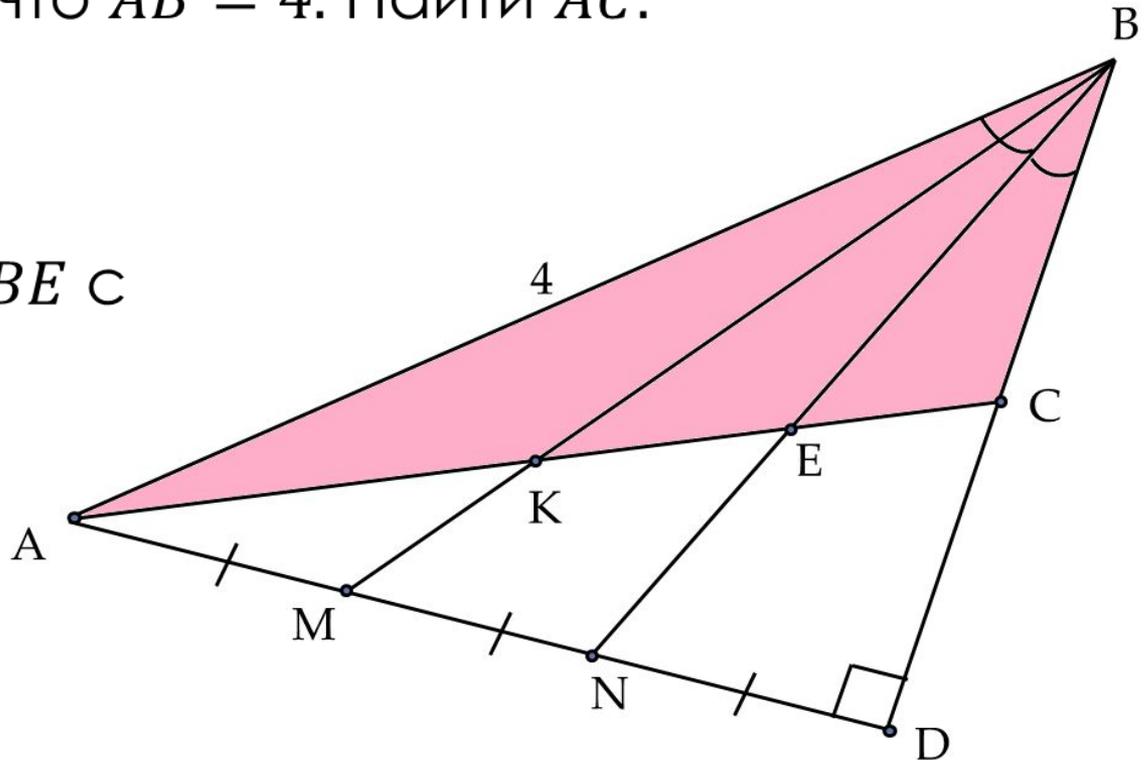
Задача 6.20 (Р.К.Гордин, ЕГЭ 2014 Математика.)

Решение задачи С4.)

В треугольнике ABC проведена высота AD . Прямые, одна из которых содержит медиану BK , а вторая биссектрису BE , делят эту высоту на три равных отрезка. Известно, что $AB = 4$. Найти AC .

Решение:

Пусть M и N - точки пересечения BK и BE с отрезком AD ,
 $AM = MN = ND$.



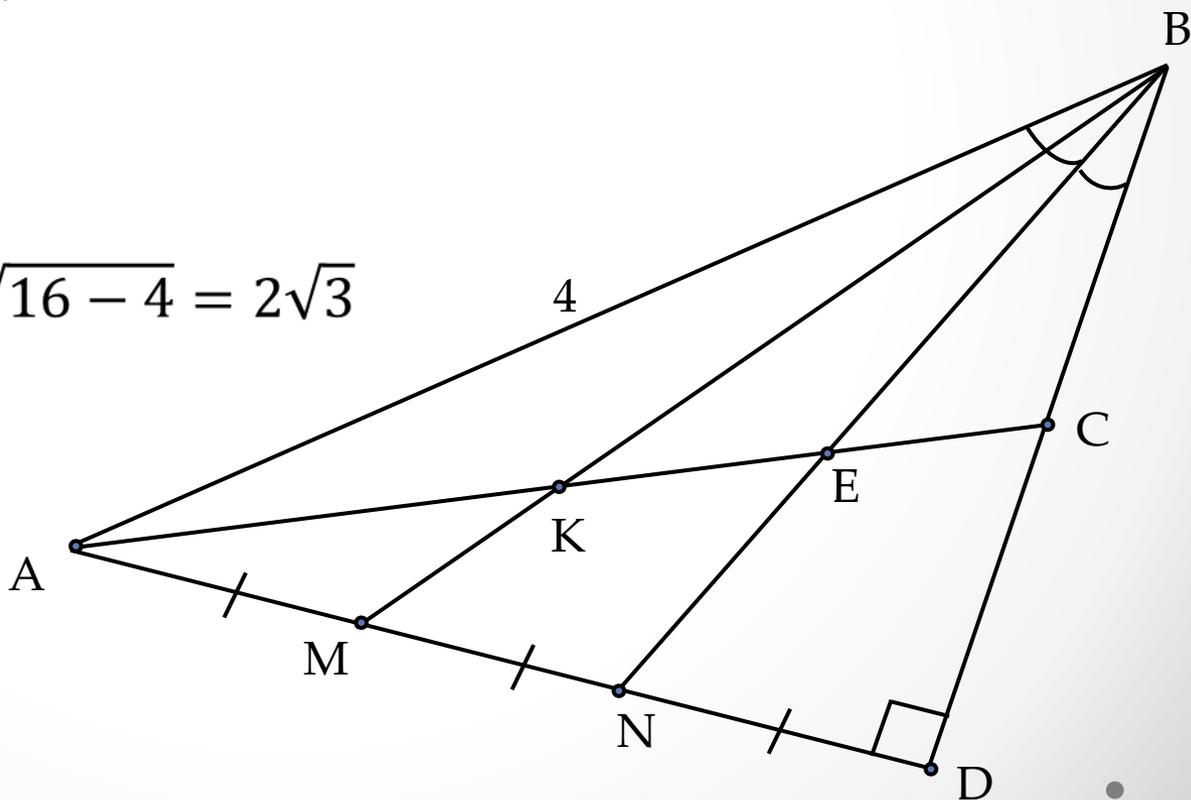
Заметим, что точка N не может лежать между точками A и M , т.к. по свойству биссектрисы в прямоугольном треугольнике ABD стороны AB и BD пропорциональны отрезкам AN и DN .

Т.о. $BD = 2AB$, т.е. гипотенуза меньше катета, что невозможно. Следовательно, точка N лежит между D и M .

Тогда, т.к. $\frac{BD}{AB} = \frac{DN}{NA} = \frac{1}{2}$, то

$$BD = \frac{1}{2} AB = 2,$$

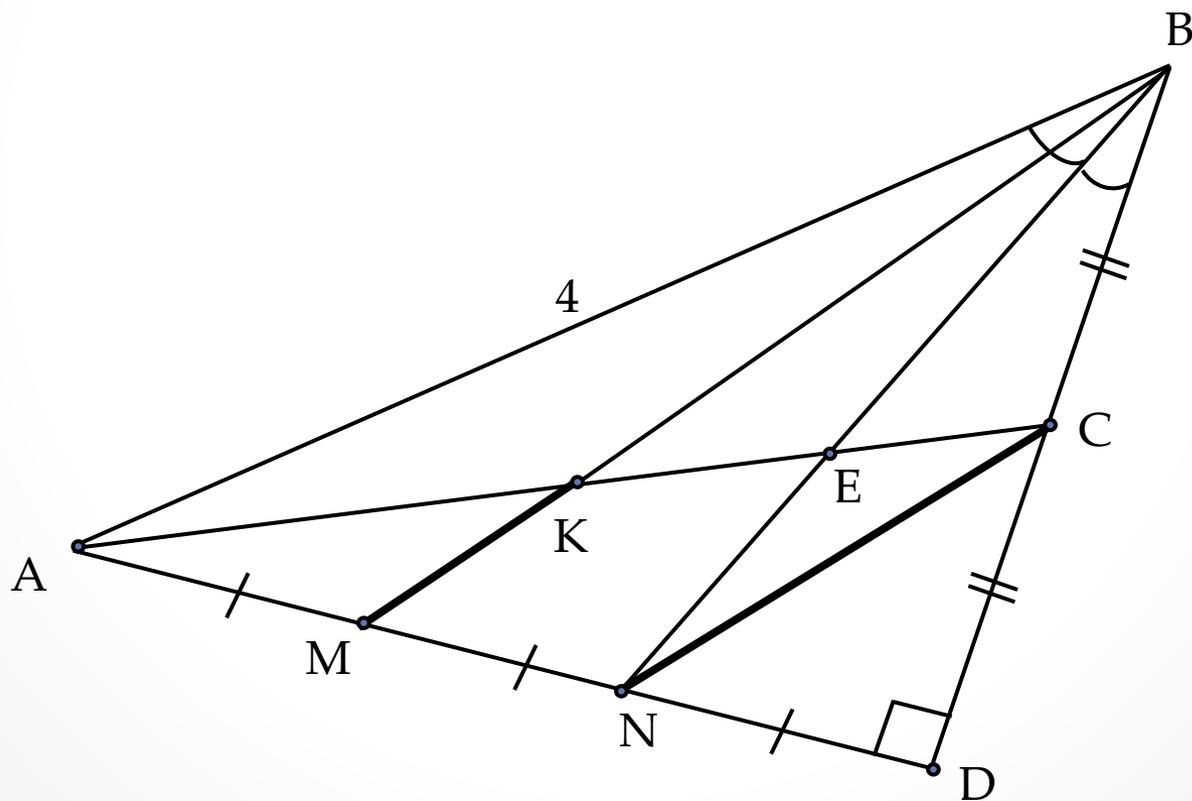
$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$



Поскольку M – середина AN , а K – середина AC ,
отрезок MK – средняя линия треугольника ACN .

Значит, $MK \parallel CN$.

Т.к. N – середина DM и $CN \parallel BM$, то CN – средняя
линия $\triangle DBM$.



Следовательно, C – середина BD .

Тогда, $CD = \frac{1}{2}BD = 1$ и из прямоугольного треугольника ACD находим, что

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13}.$$

Ответ: $\sqrt{13}$.