

Подготовка к ЕГЭ по  
математике.  
Задание 16  
(Задачи по планиметрии)

Учитель математики:

Кубракова Ирина Анатольевна

# Свойства медианы треугольника.

Медиана треугольника делит его на два треугольника равной площади (равновеликих треугольника).

## Доказательство:

Проведем из вершины  $B$  треугольника  $ABC$  медиану  $BD$  и высоту  $BE$ .

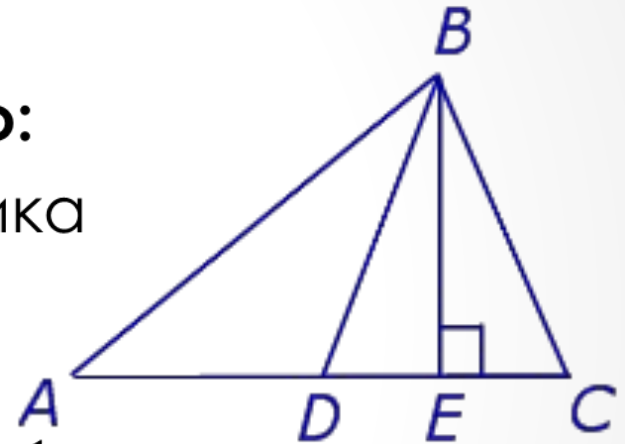
Заметим, что

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AD \cdot BE, S_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} DC \cdot BE.$$

Поскольку отрезок  $BD$  является медианой, то

$$AD = DC \Rightarrow S_{\triangle ABD} = S_{\triangle DBC},$$

что и требовалось доказать.



Медианы треугольника делят треугольник на 6 равновеликих треугольников.

### Доказательство:

Докажем, что площадь каждого из шести треугольников, на которые медианы разбивают треугольник  $ABC$ , равна  $\frac{1}{6}$  площади треугольника  $ABC$ . Для этого рассмотрим, например, треугольник  $AOF$  и опустим из вершины  $A$  перпендикуляр  $AK$  на прямую  $BF$ .

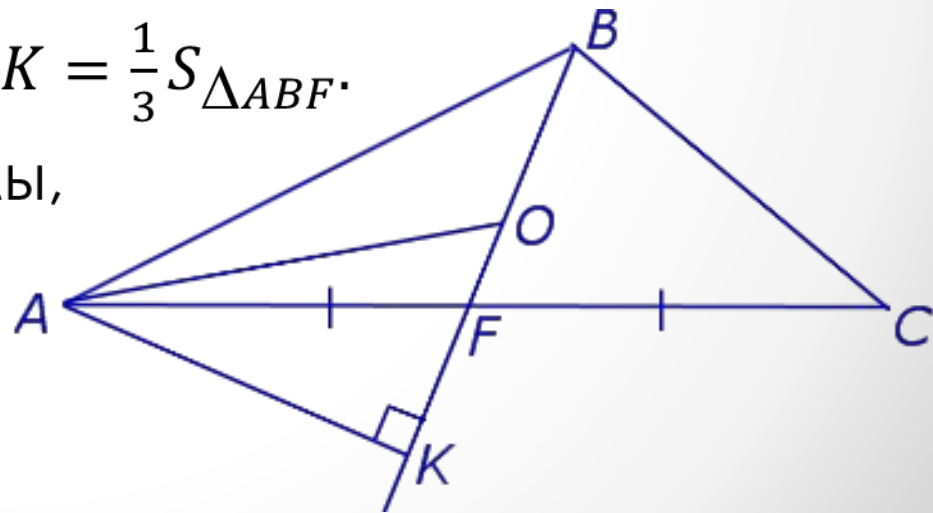
Тогда

$$S_{\Delta AOF} = \frac{1}{2} OF \cdot AK = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot BF \cdot AK = \frac{1}{3} S_{\Delta ABF}.$$

В силу предыдущей теоремы,

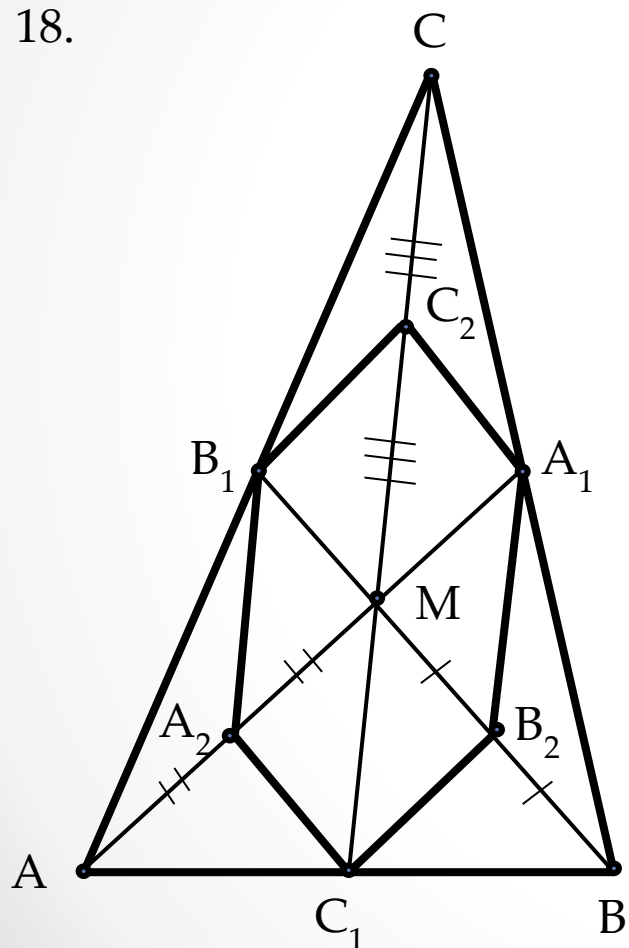
$$S_{\Delta ABF} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\Delta AOF} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABF} = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC}.$$



Тренировочная работа № 2  
(ЕГЭ. Математика. Типовые тестовые задания, под редакцией И.В. Ященко)

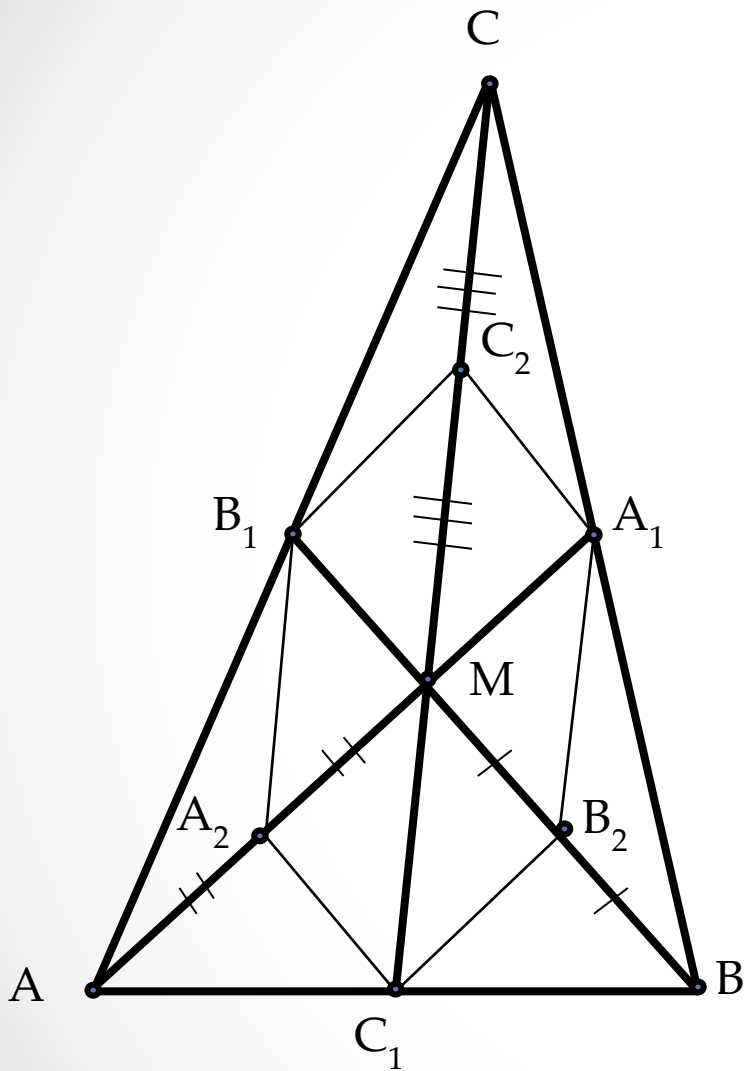
18.



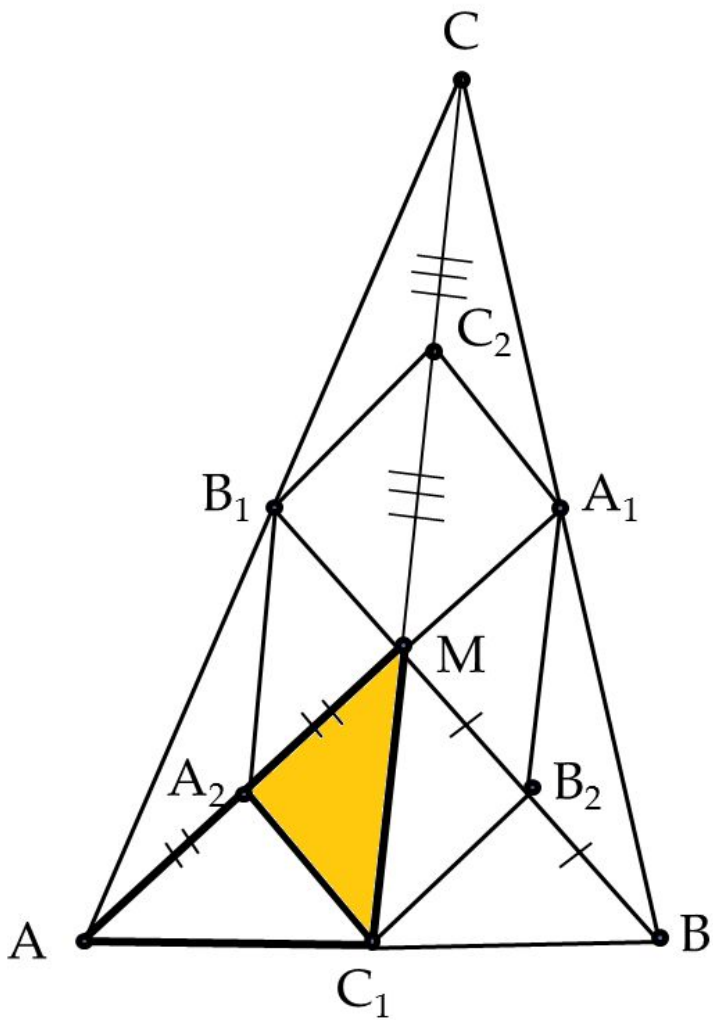
Медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Точки  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  - середины отрезков  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$  вдвое меньше площади треугольника  $ABC$ .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что  $AB = 4$ ,  $BC = 7$  и  $AC = 8$ .



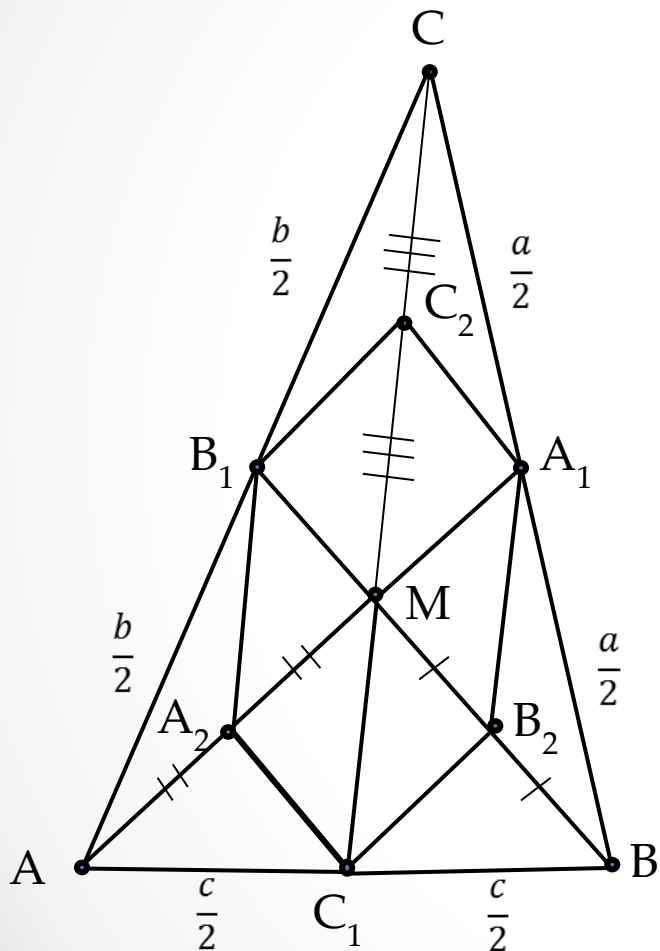
- Решение:  
а) Обозначим  $S_{\triangle ABC} = S$ .  
Тогда площадь каждого из  
треугольников, на которые  
медианы разбивают  
треугольник  $ABC$ , равна  $\frac{1}{6}S$ .



Заметим, что  $C_1A_2$  – медиана  
треугольника  $AC_1M$ , поэтому

$$S_{\Delta A_2MC_1} = \frac{1}{2} S_{\Delta AMC_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} = \frac{1}{12} S.$$

Аналогичные равенства  
выполняются для остальных пяти  
треугольников, составляющих  
шестиугольник  $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ .  
Следовательно, площадь этого  
шестиугольника равна  $6 \cdot \frac{1}{12} S = \frac{1}{2} S$ .



б) Обозначим

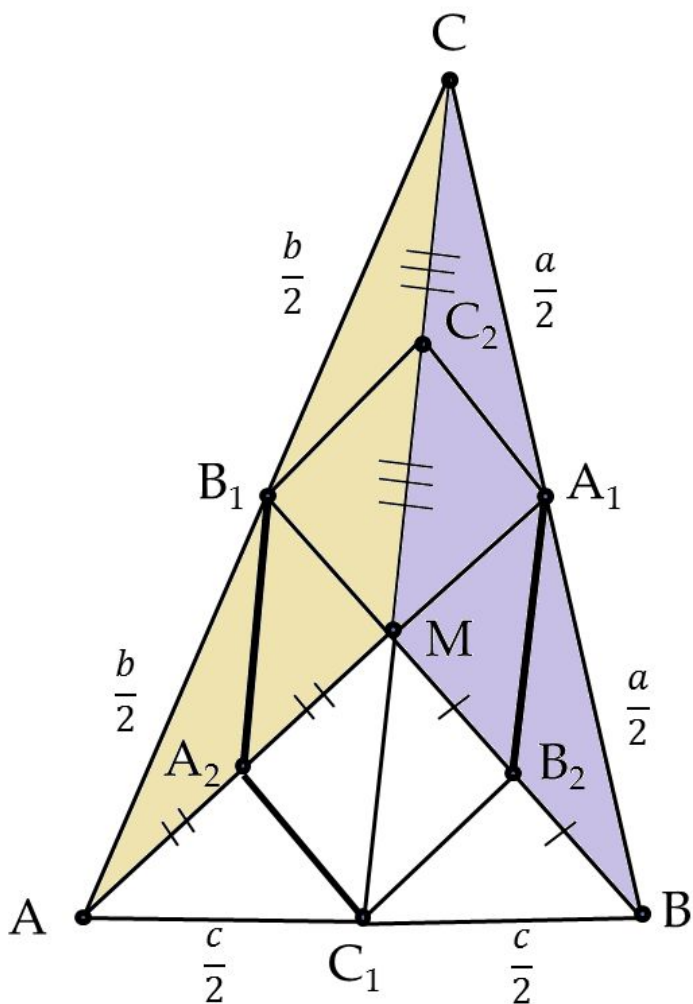
$$BC = a, AC = b, AB = c.$$

По формуле для квадрата медианы находим, что

$$AA_1^2 = \frac{1}{4} (2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$BB_1^2 = \frac{1}{4} (2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

$$CC_1^2 = \frac{1}{4} (2a^2 + 2b^2 - c^2)$$



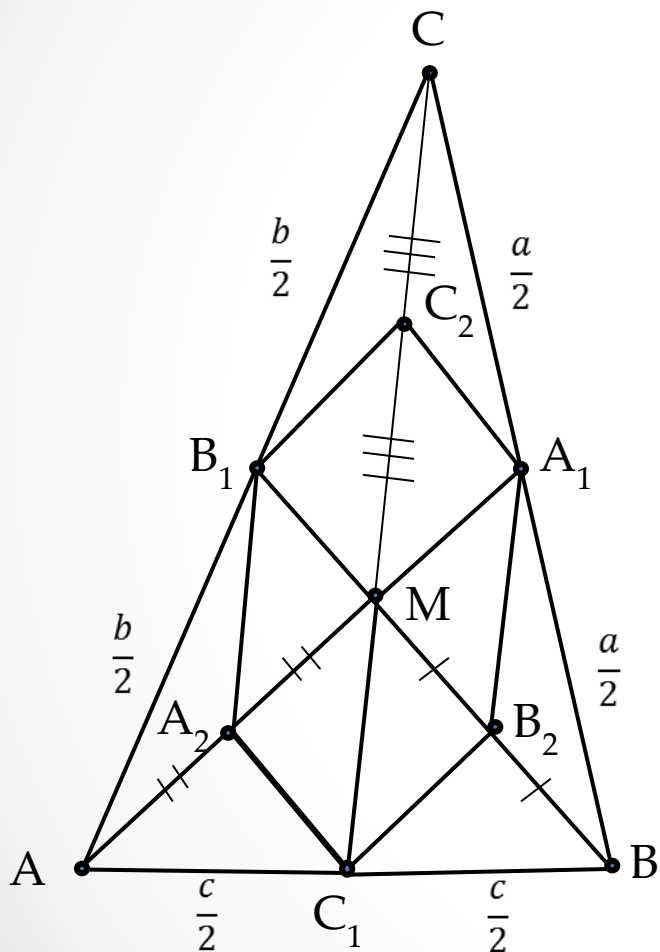
• Медианы треугольника делятся их точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины, поэтому

$$AM = \frac{2}{3}AA_1, BM = \frac{2}{3}BB_1, CM = \frac{2}{3}CC_1.$$

Стороны  $A_2B_1$  и  $A_1B_2$  – средние линии треугольников  $AMC$  и  $BMC$ ,

поэтому  $A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{2}CM$ .

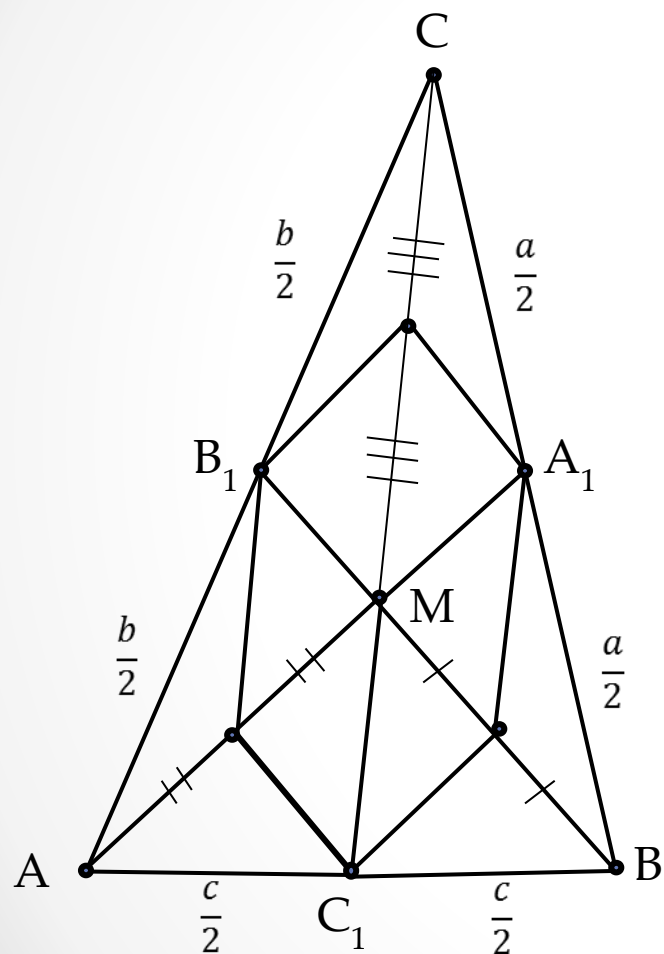




$$\begin{aligned}
 A_2B_1^2 &= A_1B_2^2 = \frac{1}{4} CM^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} CC_1^2 \\
 &= \frac{1}{36} (2a^2 + 2b^2 - c^2).
 \end{aligned}$$

АНАЛОГИЧНО,

$$\begin{aligned}
 C_2A_1^2 &= C_1A_2^2 = \frac{1}{36} (2a^2 + 2c^2 - b^2) \\
 B_2C_1^2 &= B_1C_2^2 = \frac{1}{36} (2b^2 + 2c^2 - a^2)
 \end{aligned}$$



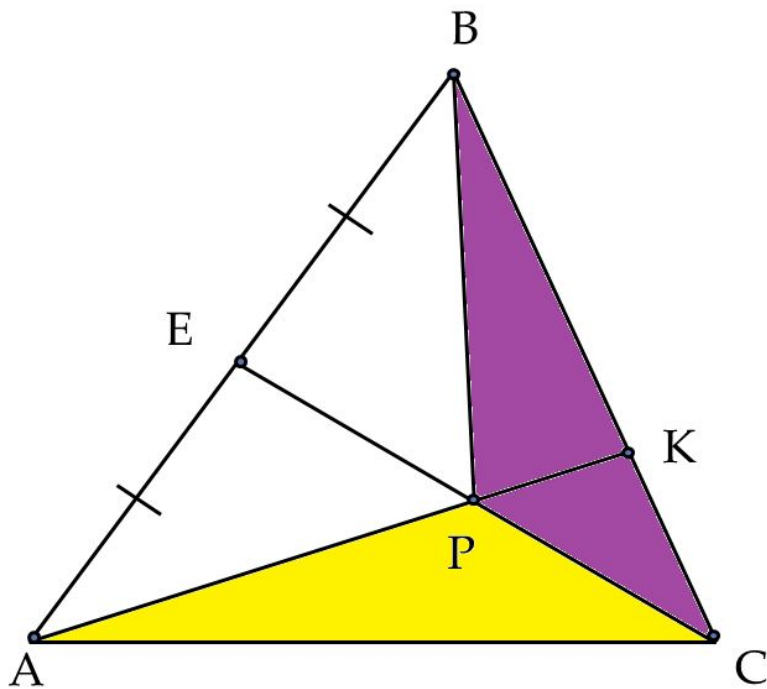
Следовательно, сумма квадратов всех сторон шестиугольника равна

$$\begin{aligned}
 & 2A_2B_1^2 + 2C_2A_1^2 + 2B_2C_1^2 = \\
 & = \frac{1}{18} (2a^2 + 2b^2 - c^2 + 2a^2 + \\
 & + 2c^2 - b^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2) = \\
 & = \frac{1}{18} (3a^2 + 3b^2 + 3c^2) = \\
 & = \frac{1}{6} (a^2 + b^2 + c^2) = \\
 & = \frac{1}{6} (49 + 64 + 16) = \frac{129}{6} = \frac{43}{2}.
 \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{43}{2}$ .

# Тренировочный вариант № 95

([alexlarin.net](http://alexlarin.net))



В треугольнике  $ABC$  на стороне  $BC$  выбрана точка  $K$  так, что  $CK:BK = 1:2$ . Точка  $E$  – середина стороны  $AB$ . Отрезки  $CE$  и  $AK$  пересекаются в точке  $P$ .

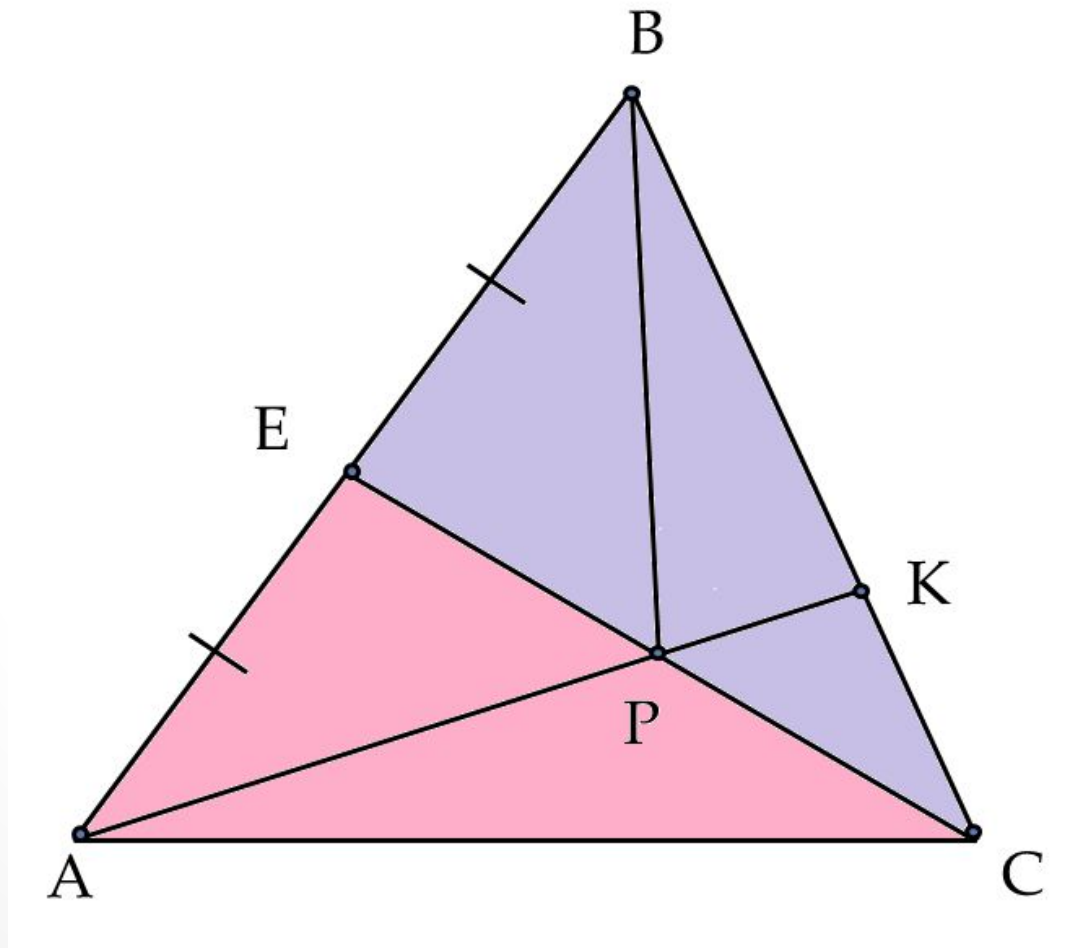
а) Докажите, что треугольники  $BPC$  и  $APC$  имеют равные площади.

б) Найдите площадь треугольника  $ABP$ , если площадь треугольника  $ABC$  равна 120.

Решение:

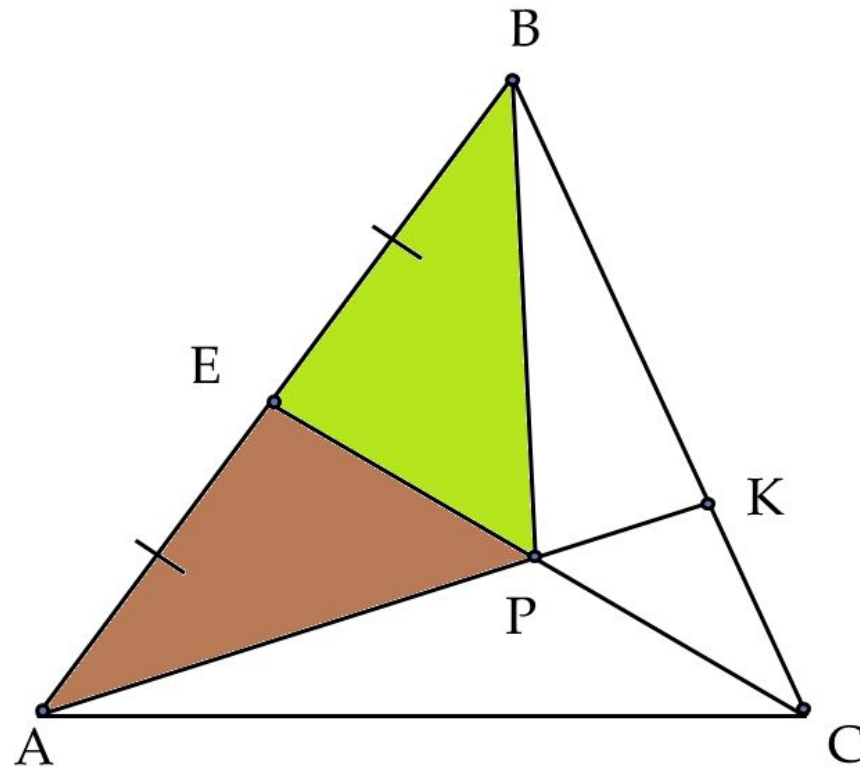
а)  $CE$  – медиана треугольника  $ABC$ .

Следовательно,  $S_{\triangle ACE} = S_{\triangle BCE}$ .



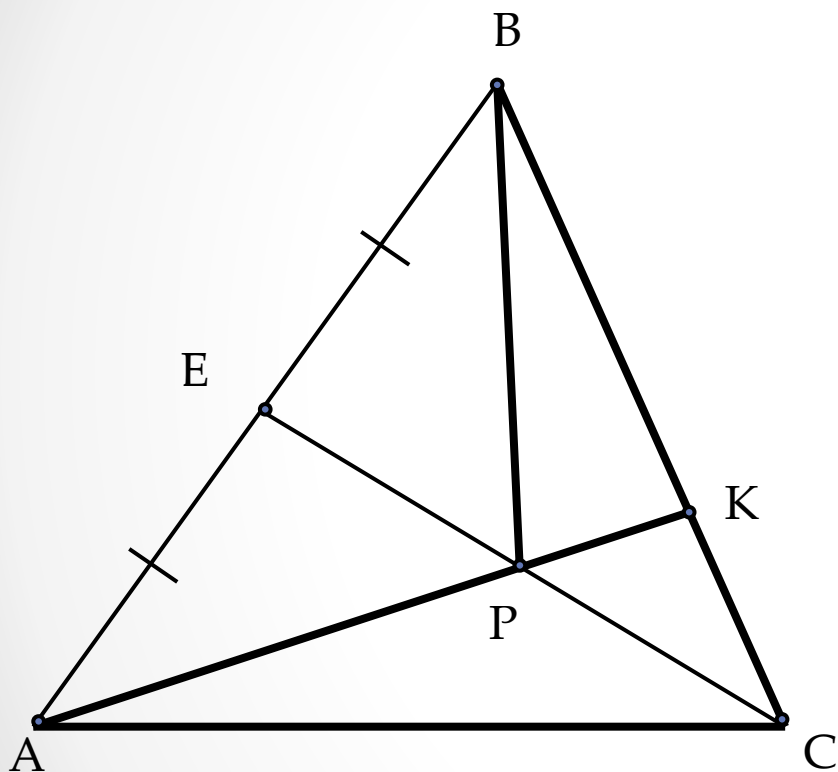
Аналогично,  $PE$  – медиана треугольника  $ABP$ .

Следовательно,  $S_{\triangle APE} = S_{\triangle BPE}$ .



$$S_{\triangle ACE} - S_{\triangle APE} = S_{\triangle BCE} - S_{\triangle BPE}$$

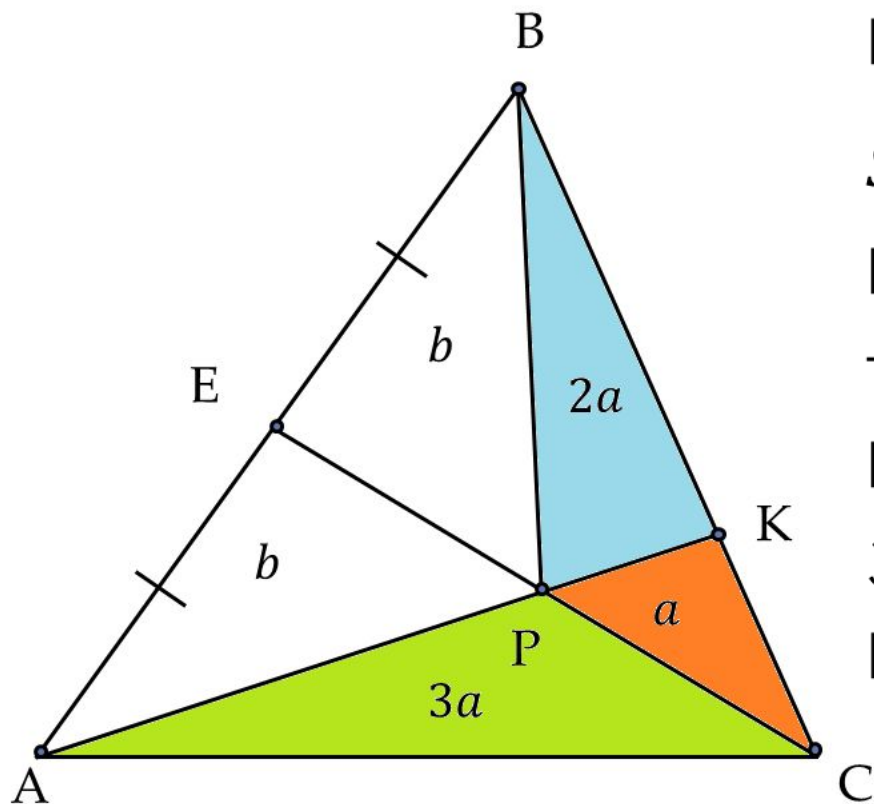
Или  $S_{\triangle APC} = S_{\triangle BPC}$ , что и требовалось доказать.



б) Из условия задачи относительно точки  $K$  также вытекает:

$$S_{\Delta ACK} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} = 40,$$

$$S_{\Delta BPK} = 2S_{\Delta CPK}.$$



Если  $S_{\Delta CPK} = a$ , то  $S_{\Delta BPK} = 2a$ ,

$S_{\Delta APC} = 3a$ .

Пусть  $S_{\Delta APE} = S_{\Delta BPE} = b$ ,

тогда  $S_{\Delta ACK} = 4a = 40 \Rightarrow a = 10$ .

Но  $S_{\Delta BCE} = 3a + b = 60$ .

Значит,  $b = 60 - 3a = 30$ .

В таком случае:

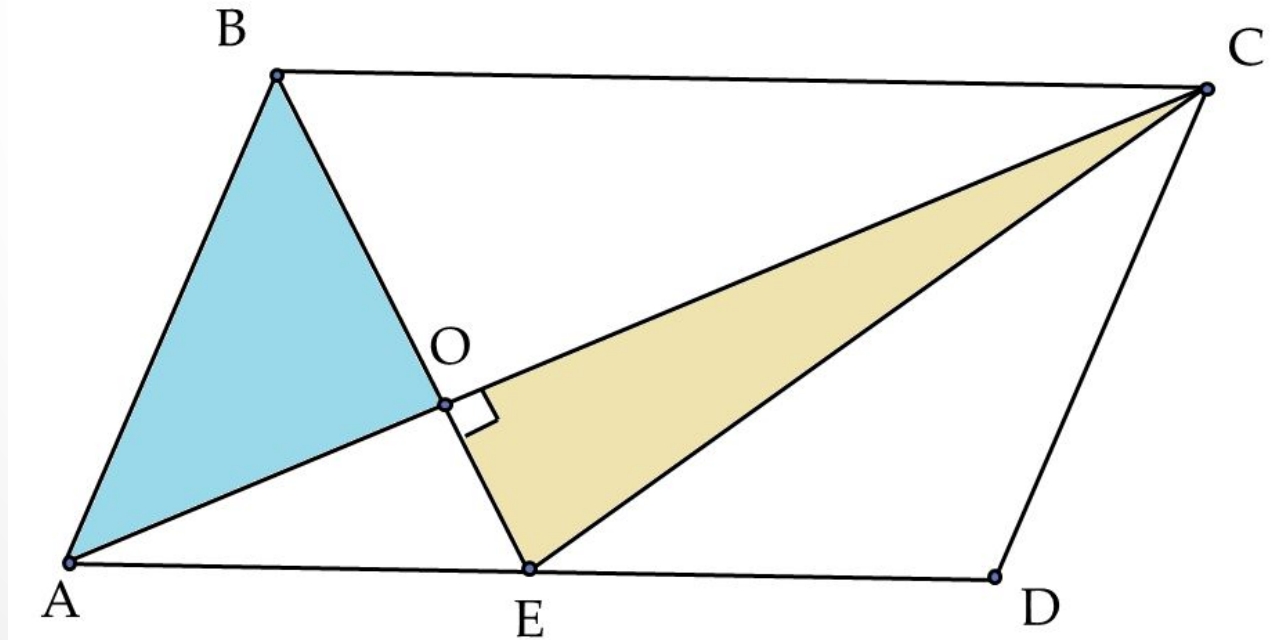
$$S_{\Delta ABP} = 2b = 60.$$

# Тренировочный вариант № 99

([alexlarin.net](http://alexlarin.net))

Точка  $E$  – середина стороны  $AD$  параллелограмма  $ABCD$ , прямые  $BE$  и  $AC$  взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке  $O$ .

- Докажите, что площади треугольников  $AOB$  и  $COE$  равны.
- Найдите площадь параллелограмма  $ABCD$ , если  $AB = 3$ ,  $BC = 4$ .





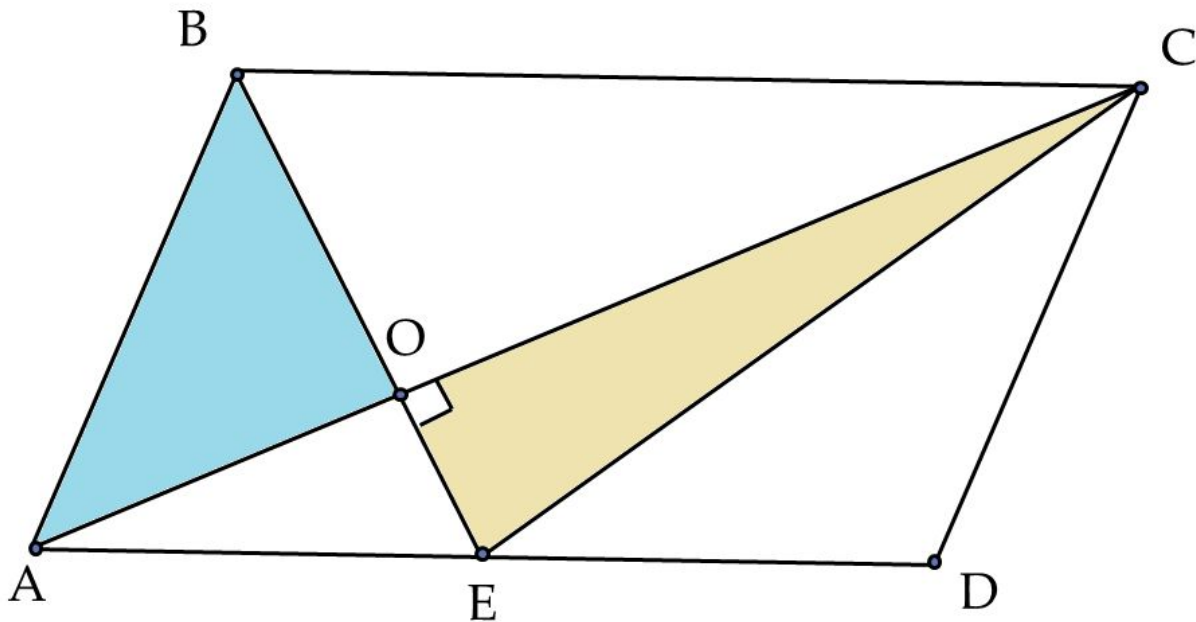
Решение:

$$a) S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABE} - S_{\triangle AOE},$$

$$S_{\triangle COE} = S_{\triangle ACE} - S_{\triangle AOE},$$

$S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ACE}$ , т.к. имеют общее основание  $AE$  и равные высоты.

Следовательно,  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COE}$



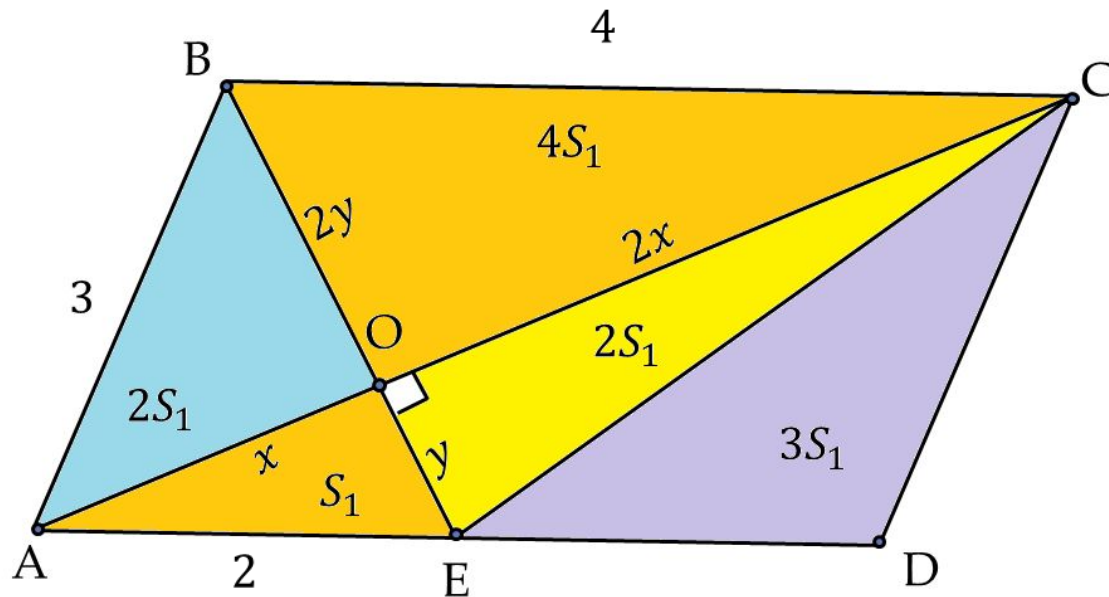
6) 1.  $\triangle COB \sim \triangle AOE$  с  $k = 2$ .

Пусть  $AO = x$ ,  $OE = y$ , тогда  $OC = 2x$ ,  $OB = 2y$ .

$$S_{\triangle AOE} = \frac{1}{2}xy = S_1, \text{ тогда } S_{\triangle AOB} = S_{\triangle EOC} = 2S_1$$

$$S_{\triangle BOC} = 4S_1; S_{\triangle DCE} = S_{\triangle ACE} = 3S_1.$$

$$S_{ABCD} = 12S_1 = 12 \cdot \frac{1}{2}xy = 6xy.$$

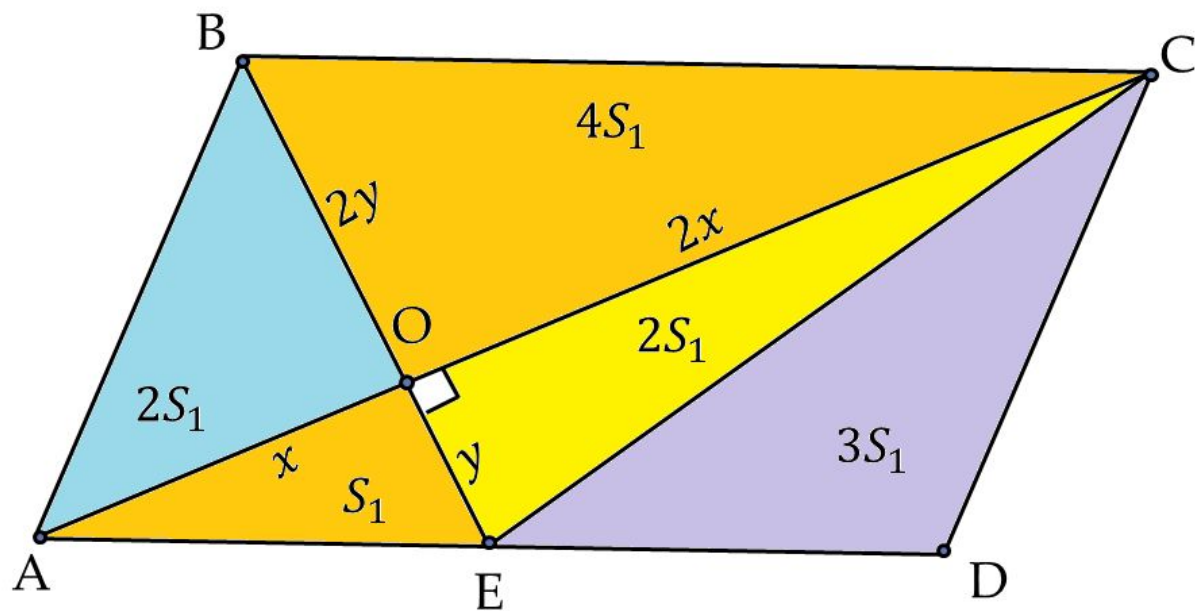


2. Из  $\triangle AOE$  имеем  $x^2 + y^2 = 4$ .

Из  $\triangle AOB$ :  $x^2 + 4y^2 = 9$ . Тогда  $y^2 = \frac{5}{3}$ ;  $x^2 = \frac{7}{3}$ .

$xy = \frac{\sqrt{35}}{3}$  и  $S_{ABCD} = 6 \cdot \frac{\sqrt{35}}{3} = 2\sqrt{35}$ .

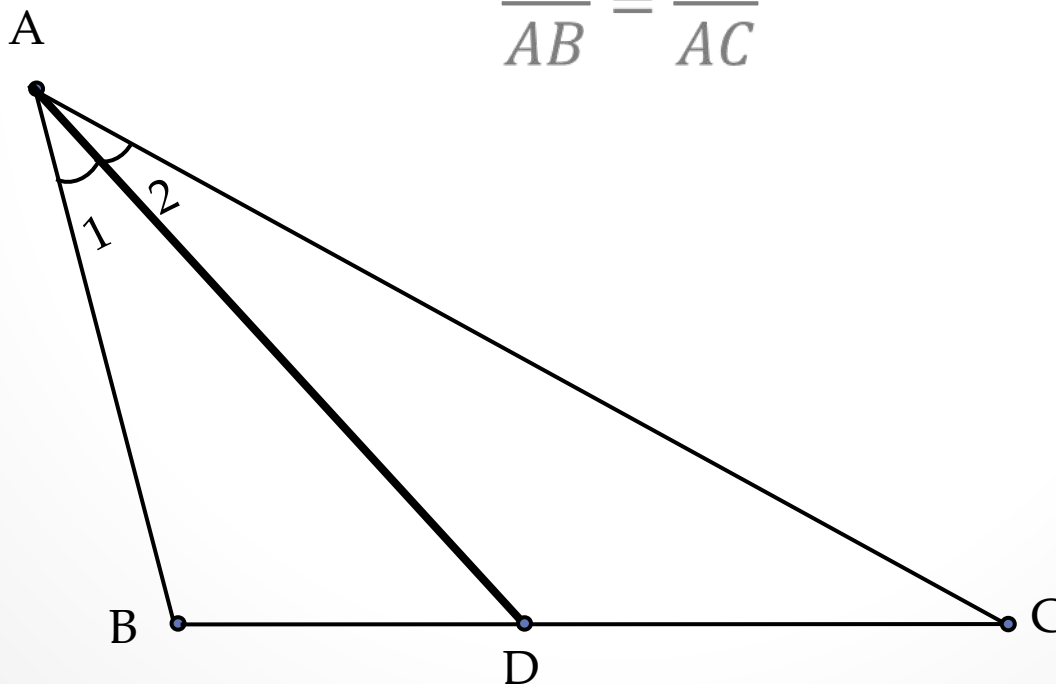
Ответ:  $2\sqrt{35}$



# Свойство биссектрисы треугольника.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

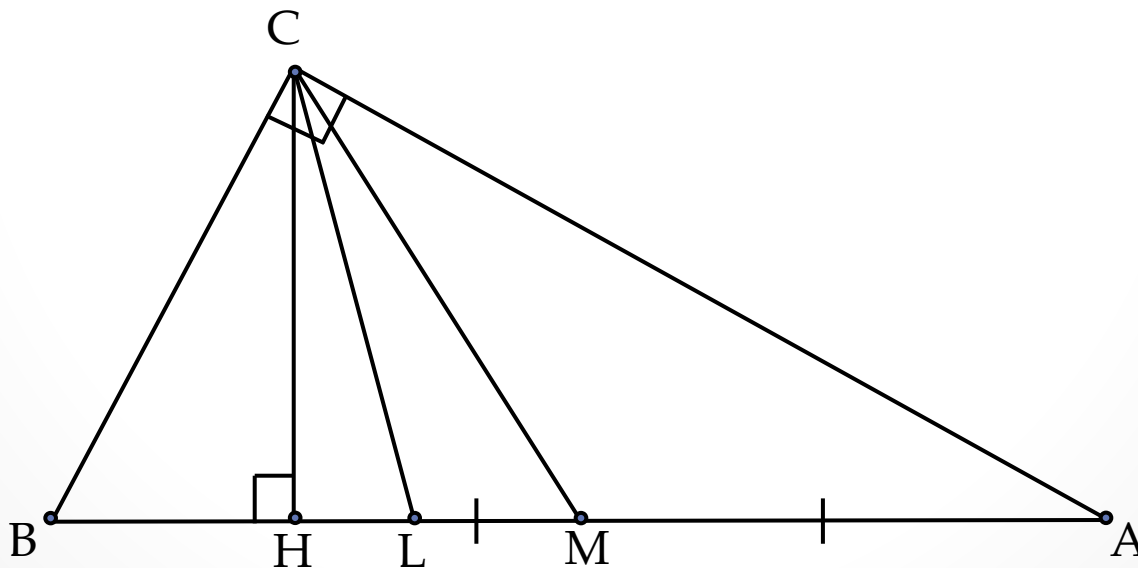


# Тренировочный вариант № 98

([alexlarin.net](http://alexlarin.net))

В прямоугольном неравнобедренном треугольнике  $ABC$  из вершины  $C$  прямого угла проведены высота  $CH$ , медиана  $CM$  и биссектриса  $CL$ .

- Докажите, что  $CL$  является биссектрисой угла  $MCH$ .
- Найдите длину биссектрисы  $CL$ , если  $CH = 3$ ,  $CM = 5$ .



Решение:

а) Пусть катет  $AC > BC$ .

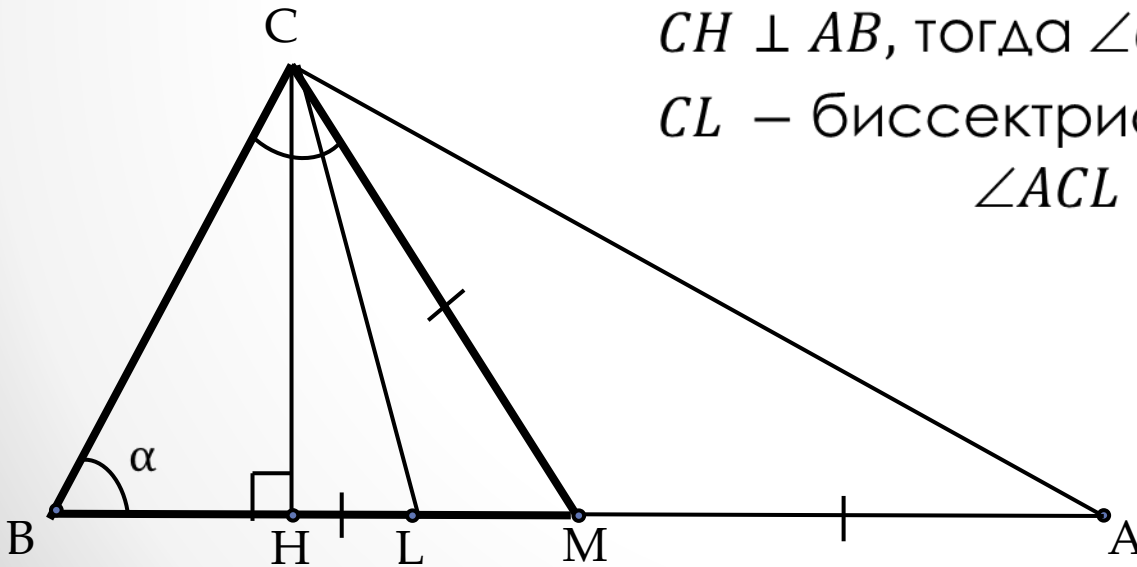
Медиана в прямоугольном треугольнике является радиусом описанной окружности.

Т.е.  $CM = AM = BM$ .

Значит,  $\triangle CMB$  – равнобедренный,  
 $\angle MBC = \angle MCB = \alpha$ .

$CH \perp AB$ , тогда  $\angle CHB = 90^\circ$ .

$CL$  – биссектриса, тогда  
 $\angle ACL = \angle BCL = 45^\circ$ .



Найдем углы  $MCL$  и  $LCH$  и покажем, что они равны.

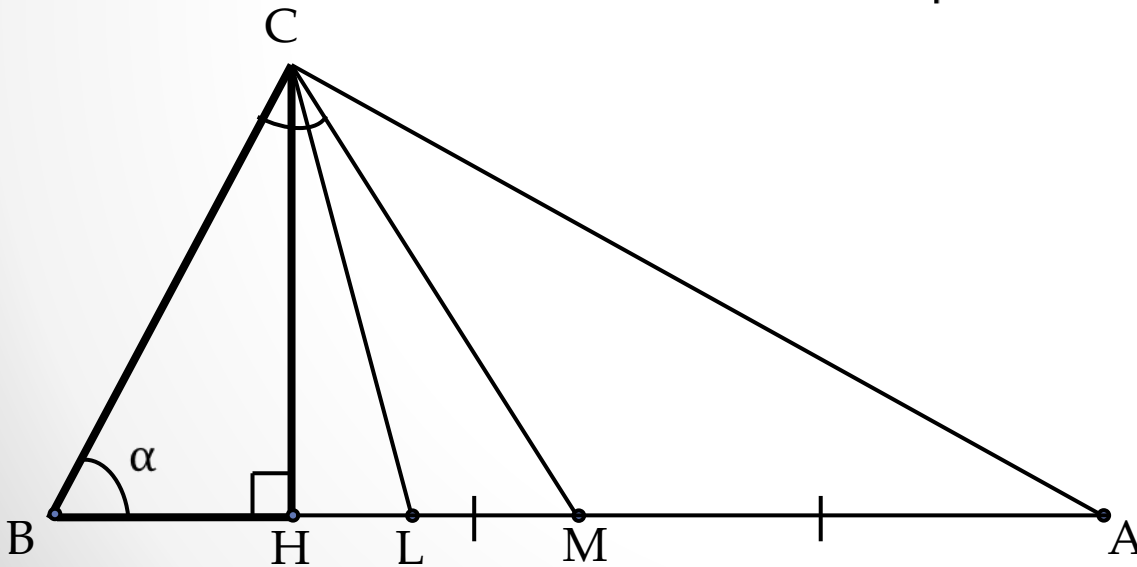
$$\angle LCH = \angle BCL - \angle BCH.$$

Из прямоугольного  $\triangle CHB$ :  $\angle BCH = 90^\circ - \alpha$ .

$$\angle LCH = 45^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha - 45^\circ;$$

$$\angle MCL = \angle MCB - \angle BCL = \alpha - 45^\circ;$$

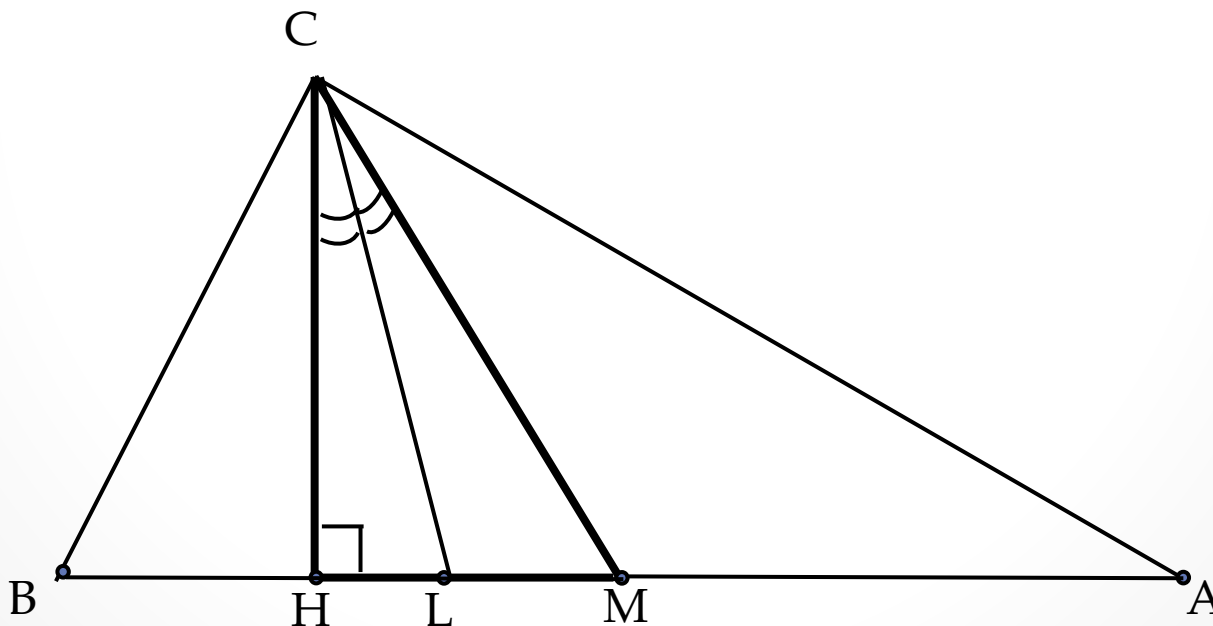
$\angle LCH = \angle MCL \mid \Rightarrow CL$  – биссектриса  $\angle MCH$ .



б) Биссектриса делит сторону на части,  
пропорциональные прилежащим сторонам, т.е.

$$\frac{CM}{CH} = \frac{ML}{LH} = \frac{5}{3}.$$

Пусть  $ML = 5x$ ,  $LH = 3x$ , тогда  $MH = 8x$ .





Из прямоугольного  $\triangle MHC$  имеем:

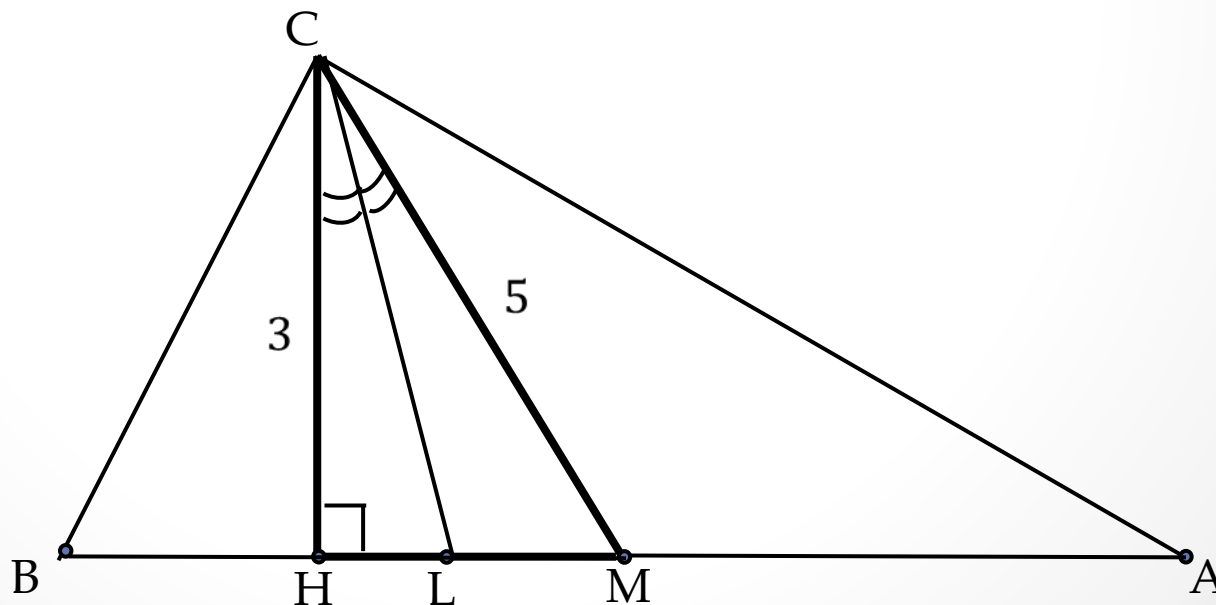
$$CM^2 = CH^2 + MH^2, \quad 9 + 64x^2 = 25, \quad 64x^2 = 16;$$

$$x^2 = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{1}{2}; \quad LH = \frac{3}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника  $CHL$ :

$$CL^2 = CH^2 + LH^2; \quad CL^2 = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}, \quad CL = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ:  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ .



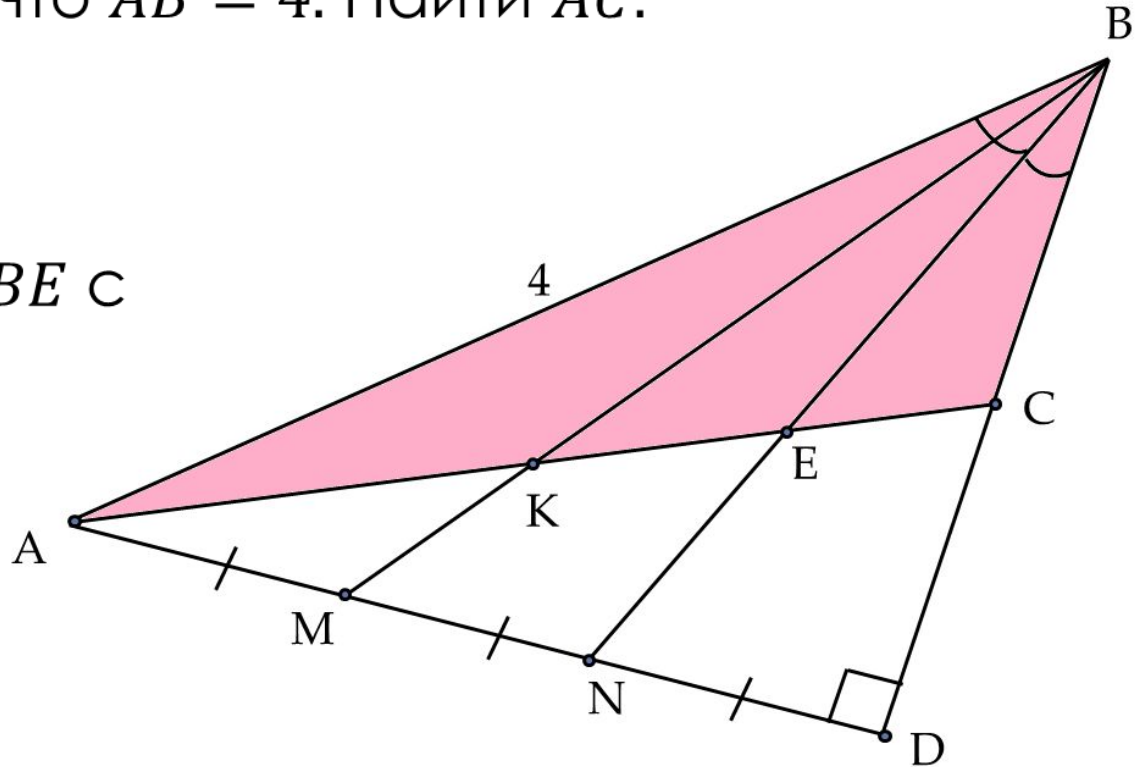
# Задача 6.20 (Р.К.Гордин, ЕГЭ 2014 Математика.)

## Решение задачи С4.)

В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $AD$ . Прямые, одна из которых содержит медиану  $BK$ , а вторая биссектрису  $BE$ , делят эту высоту на три равных отрезка. Известно, что  $AB = 4$ . Найти  $AC$ .

Решение:

Пусть  $M$  и  $N$  - точки пересечения  $BK$  и  $BE$  с отрезком  $AD$ ,  
 $AM = MN = ND$ .



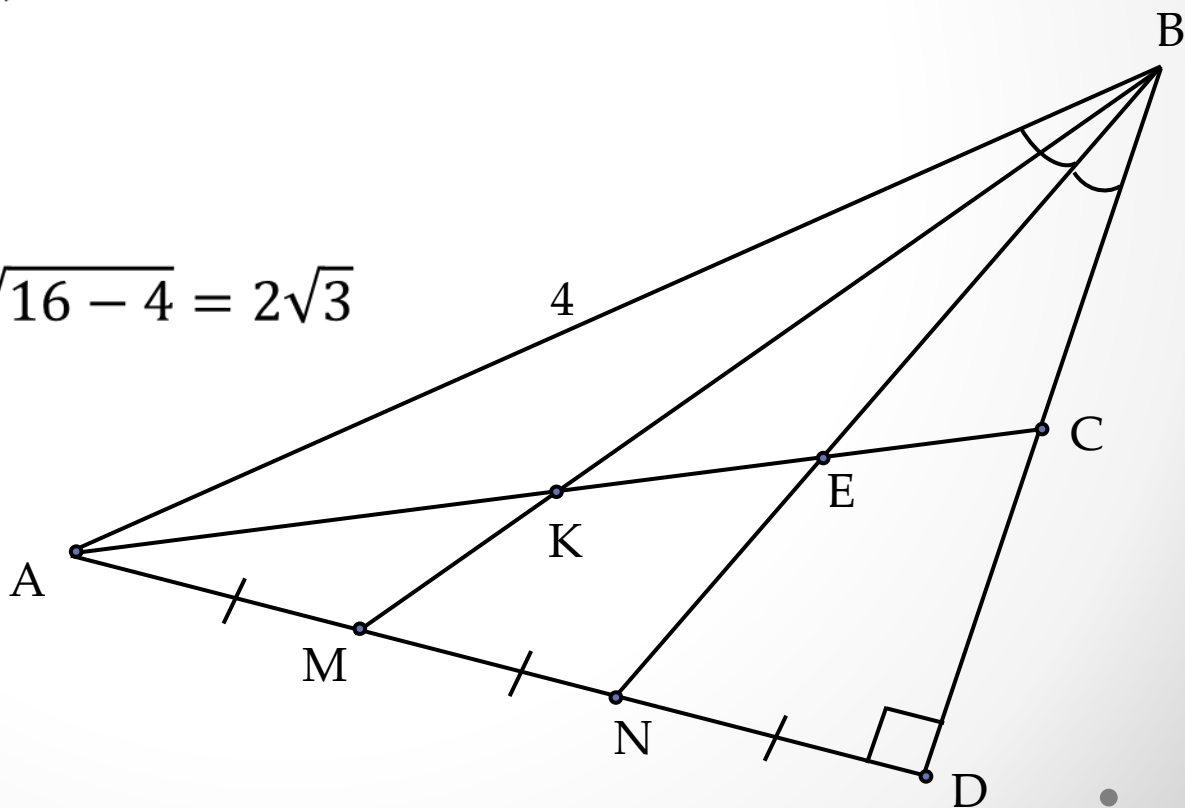
Заметим, что точка  $N$  не может лежать между точками  $A$  и  $M$ , т.к. по свойству биссектрисы в прямоугольном треугольнике  $ABD$  стороны  $AB$  и  $BD$  пропорциональны отрезкам  $AN$  и  $DN$ .

Т.о.  $BD = 2AB$ , т.е. гипотенуза меньше катета, что невозможно. Следовательно, точка  $N$  лежит между  $D$  и  $M$ .

Тогда, т.к.  $\frac{BD}{AB} = \frac{DN}{NA} = \frac{1}{2}$ , то

$$BD = \frac{1}{2} AB = 2,$$

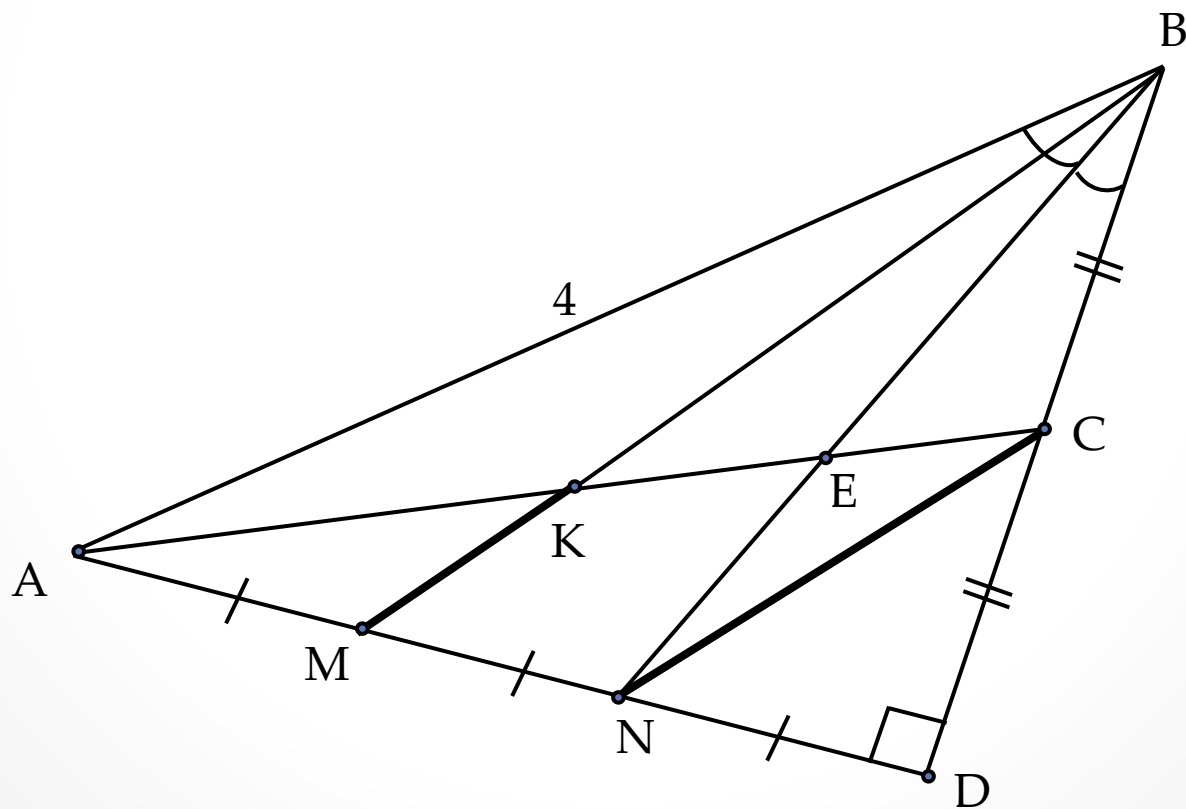
$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$$



Поскольку  $M$  – середина  $AN$ , а  $K$  – середина  $AC$ ,  
отрезок  $MK$  – средняя линия треугольника  $ACN$ .

Значит,  $MK \parallel CN$ .

Т.к.  $N$  – середина  $DM$  и  $CN \parallel BM$ , то  $CN$  – средняя  
линия  $\triangle DBM$ .



Следовательно,  $C$  – середина  $BD$ .

Тогда,  $CD = \frac{1}{2}BD = 1$  и из прямоугольного треугольника  $ACD$  находим, что

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{12 + 1} = \sqrt{13}.$$

Ответ:  $\sqrt{13}$ .