Делимость. Свойства и признаки делимости

Числа и выражения

ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ

Натуральные числа – это числа, возникающие естественным образом при счете предметов.

Целые числа – это расширение множества натуральных чисел, получаемое добавлением к нему нуля и отрицательных чисел.

Целое число **m** делится на натуральное число **n** (или **n** делит **m**), если для числа **m** и числа **n** существует такое целое число **q**, что $m = n \cdot q$.

Число **n** – делитель числа **m**, делимое **m** – кратное числа **n**, а число **q** – частное от деления **m** на **n**.

Например

10 делится на натуральное число 5

$10 = 5 \cdot 2$

10 – кратное числа 5

5 – делитель 10

2 – частное от деления 10 на 5

Свойства делимости

1. Все целые числа делятся на единицу.
2. Каждое целое число, не равное нулю, делится на натуральное число, равное модулю от данного целого.
3. Все натуральные числа являются делителями нуля.
4. Если целое число **a** делится на натуральное число **b** и модуль числа **a** меньше **b**, то **a** равно нулю.
5. Если целое число **a** отлично от нуля и делится на натуральное число **b**, то модуль числа **a** не меньше числа **b**.
6. Единственный делитель единицы – сама единица.
7. Чтобы целое число **a** делилось на натуральное число **b**, необходимо и достаточно, чтобы модуль числа **a** делился на **b**.
8. Пусть целое число **a** делится на натуральное число **m**, а число **m**, в свою очередь, делится на натуральное число **k**, тогда **a** делится на **k** (свойство транзитивности деления).
9. Если натуральные числа делятся друг на друга без остатка, то они равны.

Если **n** – натуральное, то:

1) делится на **1**

2) делится на **n**

Простое число – это натуральное число, у которого есть лишь два различающихся натуральных делителя – само это число и единица.

Взаимно простые числа – два натуральных числа, у которых есть лишь один общий делитель – единица.

Числа 2018 и 2019 – взаимно простые.

НОД (n, m) = 1

n, m - взаимно простые

Наибольший общий делитель (НОД) чисел **n** и **m** – самое большое из натуральных чисел, которые являются одновременно делителями натуральных чисел **n** и **m**.

НОД (77, 14) = 7

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число $a > 1$ либо является простым, либо его можно записать в виде произведения простых чисел

$$a = p_1 p_2 \cdots p_k$$

причем единственным образом, с точностью до порядка сомножителей.

Замечание: $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ и $30 = 5 \cdot 2 \cdot 3$ считаются одним и тем же разложением числа 30.

Свойства делимости суммы, разности и произведения чисел

a и **b** – целые числа, **m, n, k** – натуральные числа

1) Пусть оба числа **a** и **b** делятся на **m**, тогда числа **a + b** и **a – b** также делятся на **m**.

2) Пусть оба числа **a** и **b** делятся на **m**, тогда при любых **k** и **n** число **k · a + n · b** делится на **m**.

3) Пусть число **a** делится на **m**, а число **b** не делится на **m**, тогда числа **a + b** и **a – b** не делятся на **m**.

4) Пусть число **a** делится на **m**, а число **b** делится на **n**, тогда **ab** делится на **mn**.

5) Пусть число **a** делится на **m** и **n**, и при этом **m** и **n** – взаимно простые числа, тогда **a** делится на **mn**.

6) Пусть число **a** делится на **m**, тогда a^k делится на m^k.

$$\mathbf{n = q \cdot m + r}$$

или

$\mathbf{n : m = q}$ (остаток $\mathbf{r}$)

q – целое неотрицательное число **(0, 1, 2, …)**

m – натуральное число

r – целое неотрицательное число,

меньшее **m (0, 1, 2, …, m – 1)**

$$\boxed{n = m \cdot q + r}$$

n – делимое

m – делитель

q – (неполное) частное

r – остаток

Пример

$23 = 2 \cdot 10 + 3$

23 – делимое

10 – делитель

2 – неполное частное

3 – остаток

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Пусть **a** и **b** – натуральные числа, не равные одновременно нулю,

и верна последовательность чисел

$A > b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n$

r_k – это остаток от деления числа, предшествовавшего предыдущему числу, на предыдущее число:

$a = bq_0 + r_1$

$b = r_1q_1 + r_2$

$r_1 = r_2q_2 + r_3$

$r_2 = r_3q_3 + r_4$

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

$a = bq_0 + r_1$

$b = r_1q_1 + r_2$

$r_1 = r_2q_2 + r_3$

$r_2 = r_3q_3 + r_4$

…

$r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k$

…

$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$

$r_{n-1} = r_nq_n$

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

...

$r_{k-2} = r_{k-1}q_{k-1} + r_k$

...

$r_{n-2} = r_{n-1}q_{n-1} + r_n$

$r_{n-1} = r_n q_n$

НОД (a, b) = r_n

АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

Пример

$2457 = 1 \cdot 1473 + 984$

$1473 = 1 \cdot 984 + 489$

$984 = 2 \cdot 489 + 6$

$489 = 81 \cdot 6 + 3$

$6 = 3 \cdot 2$

НОД $(2457, 1473) = 3$

Знакочередующаяся сумма – это сумма чисел, в которой каждый второй член умножен на –1.

$$0 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 = -5.$$

Трехзначные грани числа – это числа, которые получены разбиением исходного числа на трехзначные числа, начиная с его конца.

6 579 813

{6, 579, 813}

Число n	Число **a** делится на число n тогда и только тогда, когда
2	последняя цифра числа **a** делится на **2**
3	сумма всех цифр числа **a** делится на **3**
4	число, из двух последних цифр числа **a**, делится на **4**
5	число **a** оканчивается цифрой **0** или **5**
7	знакочередующаяся сумма граней **a** делится на **7**
8	число, из трех последних цифр числа **a**, делится на **8**
9	сумма всех цифр числа **a** делится на **9**
10	число **a** оканчивается цифрой **0**
11	знакочередующаяся сумма цифр числа **a** делится на **11**
13	знакочередующаяся сумма граней **a** делится на **13**
25	число, из двух последних цифр числа **a**, делится на **25**

Пример

17 943 646 = 7 · q, где **q** – целое

17|943|646

{17, 943, 646}

17 – 943 + 646 = –280

–280 = 7 · (–40)

17 943 646 = 7 · q, где **q**–целое

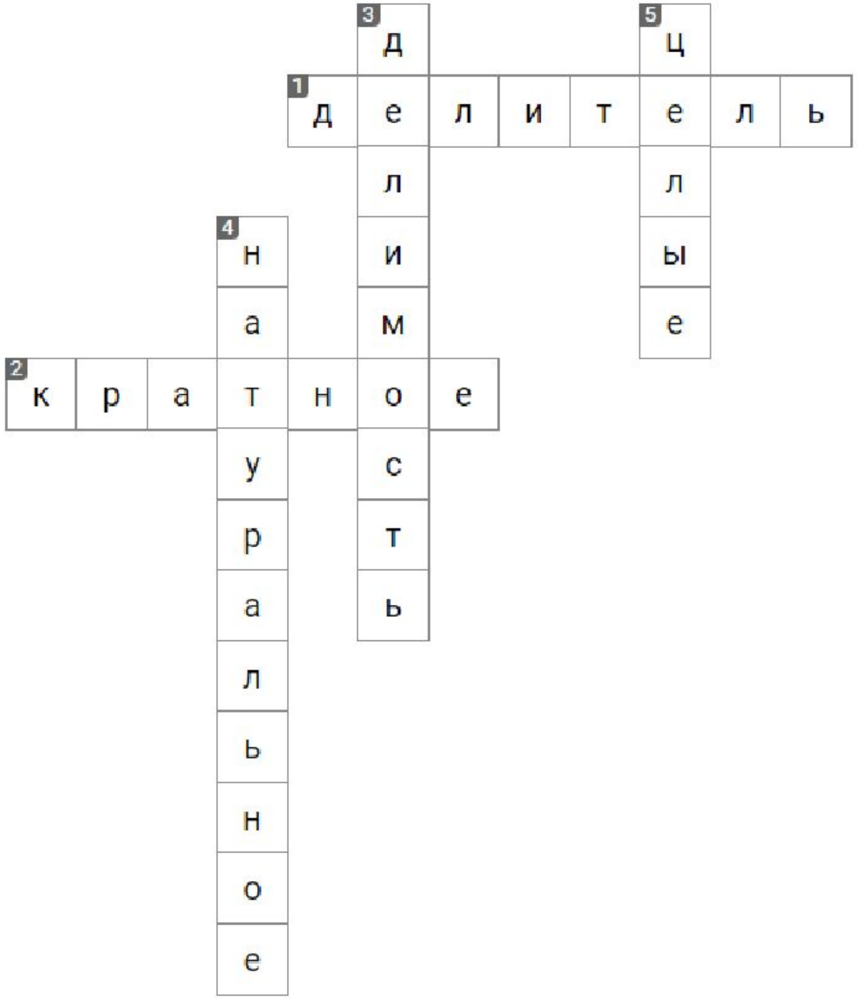
Вспомните понятия, связанные с делимостью чисел.

По горизонтали:

1. Натуральное число, на которое делится целое нацело.
2. Целое число, которое делится нацело на какое-то натуральное число.

По вертикали:

3. Понятие, задаваемое через определение: «целое число m делится на натуральное число n, если для числа m и числа n существует такое целое число q, что $m = n \cdot q$».
4. Число, возникающее при счёте предметов.
5. Расширение области натуральных чисел, включающее ноль и отрицательные числа.


1 делитель
2 кратное
3 делимость
4 натуральное
5 целые

1. $5 = 3 \cdot 1 + ...$

Ответ: ____________

2. $10 = 7 \cdot 1 + ...$

Ответ: ____________

3. $13 = 9 \cdot 1 + ...$

Ответ: ____________

4. $7 = 6 \cdot 1 + ...$

Ответ: ____________

5. $27 = 11 \cdot 2 + ...$

Ответ: ____________

Вывод

В этом уроке мы познакомились с понятиями, связанными с делимостью чисел, и их свойствами.

Мы определили натуральные числа как числа, возникающие естественным образом при счёте, а целые числа как множество чисел, включающее в себя, кроме натуральных, ноль и отрицательные.

Далее мы определили делимость целого числа m на натуральное n как существование целого q, для которого $m = n \cdot q$.

Затем мы ввели определение взаимно простых чисел как пары чисел, единственный общий делитель которых является единицей.

Также мы рассмотрели деление с остатком, алгоритм Евклида для нахождения НОДа и метод математической индукции для доказательства делимости.