Подготовка к ЕГЭ:
B9
Производная и

Производной функции в точке называют число, равное пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при стремящемся к нулю приращении аргумента.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим рисунок 1 (см. с. 34). Здесь $\Delta x = x - x_0$ — это приращение (изменение) аргумента, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ — приращение функции.

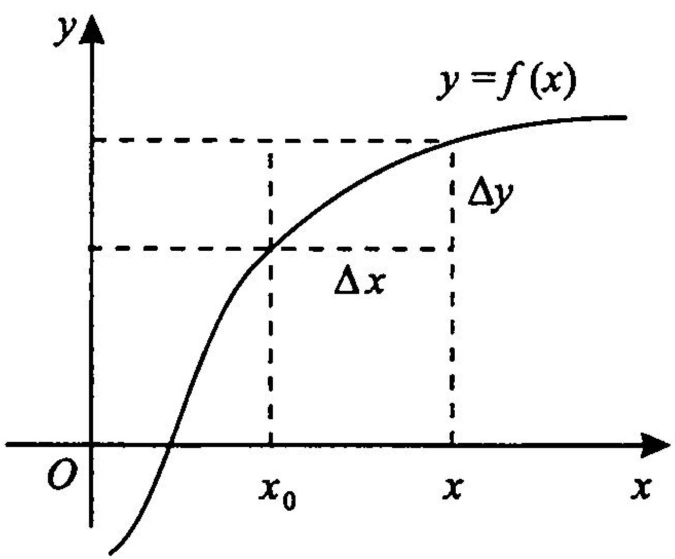


Рис. 1.

По определению производной

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной, проведённой к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Производные некоторых элементарных функций

$$(c)' = 0, \text{ где } c = const;$$

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \text{ где } \alpha = const;$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$$

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a;$$

$$(e^x)' = e^x;$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Правила дифференцирования

$$(c \cdot u)' = c \cdot u', \ \ c - const;$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

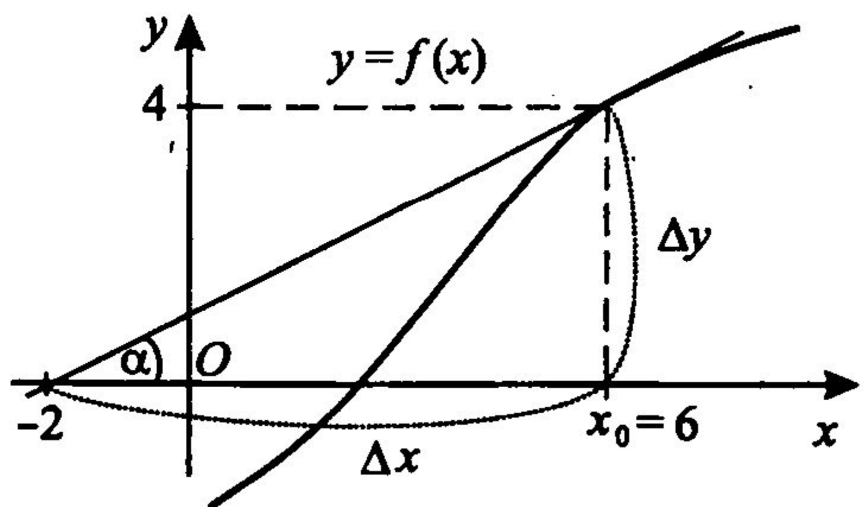
$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$y = f\big(g(x)\big), \ \ y' = f'_u(u) \cdot g'_x(x), \text{ где } u = g(x).$$

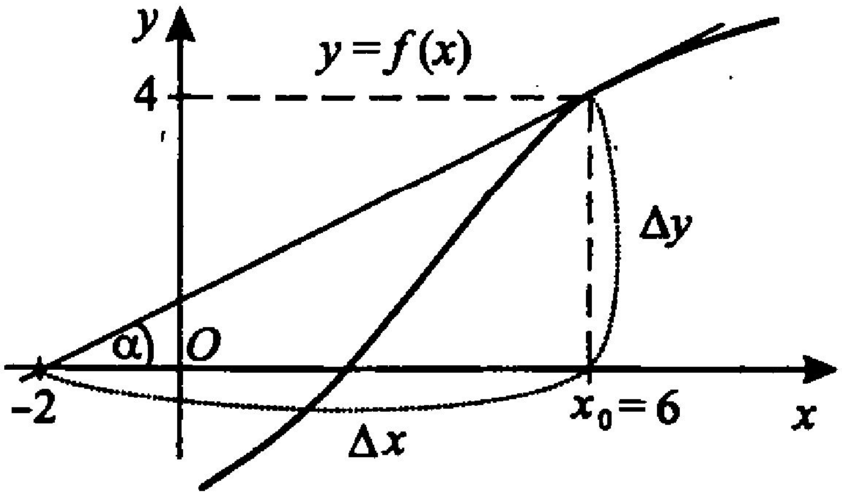
Геометрический смысл производной

Значение производной функции в точке $x = x_0$ равно угловому коэффициенту касательной, проведённой к графику этой функции в точке с абсциссой x_0. Нужно помнить, что угловой коэффициент равен тангенсу угла наклона касательной (или, другими словами, тангенсу угла, образованного касательной и положительным направлением оси Ox).



$$f'(x_0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg}\alpha = k_{\text{кас}}.$$

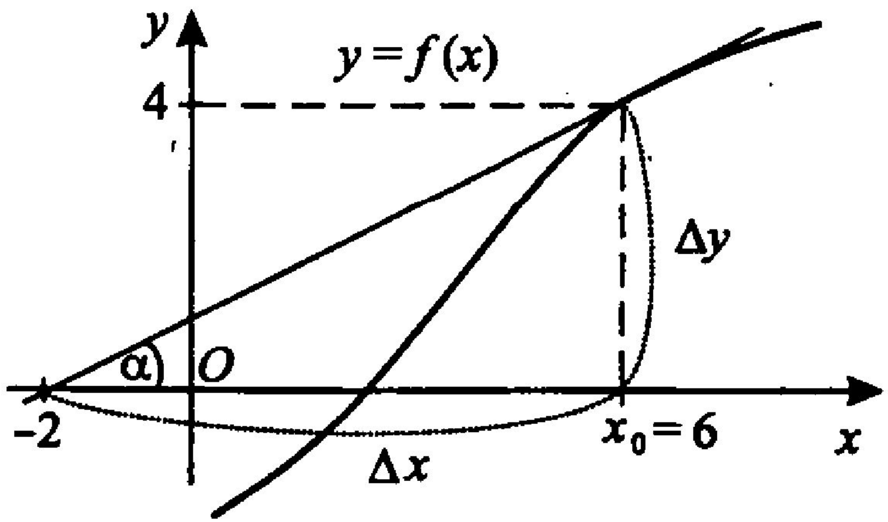
Видим, что $\Delta y = 4$, $\Delta x = 8$. Тогда $f'(x_0) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{4}{8} = 0{,}5$.



Обратите внимание, что Δy и Δx вместе с отрезком касательной образуют прямоугольный треугольник. Если в этом треугольнике мы разделим Δy на Δx, то получим абсолютное значение производной. Знак производной мы можем определить тремя способами.

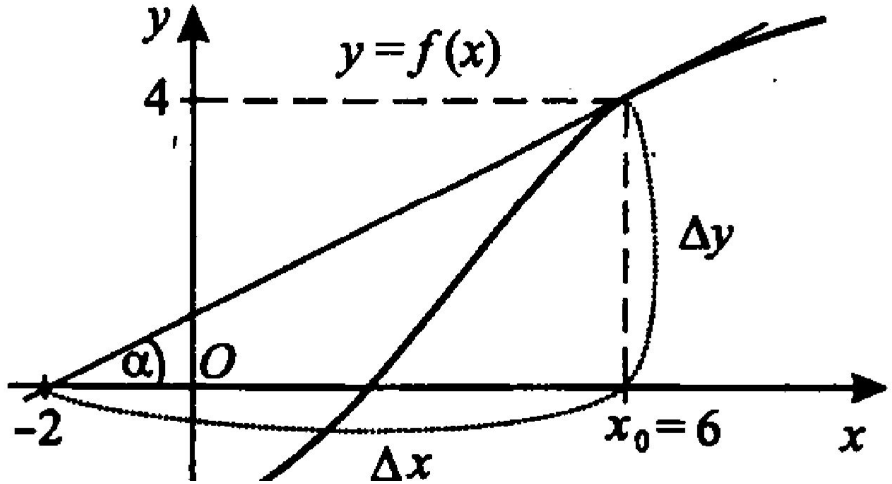
1-й способ.

Если точка принадлежит промежутку возрастания функции, то значение производной в этой точке положительно, а если промежутку убывания, то значение производной отрицательно.



2-й способ.

Рассмотрим угол между касательной к графику функции в некоторой точке и осью абсцисс (это угол, отсчитываемый в положительном направлении — против часовой стрелки — от положительного направления оси Ox до касательной). Если угол острый, то значение производной в этой точке положительно, а если угол тупой, то значение производной в этой точке отрицательно.



3-й способ.

Возьмём координаты произвольной точки касательной (x_1, y_1). Теперь рассмотрим любую точку касательной, абсцисса которой x_2 больше, чем абсцисса первой точки. Если при этом и её ордината y_2 больше y_1, то производная положительна, если меньше — производная отрицательна.

Полезно знать, что угловые коэффициенты параллельных прямых равны и что прямая, параллельная оси абсцисс Ox, имеет угловой коэффициент, равный нулю.

1. На рисунке 3 изображён график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

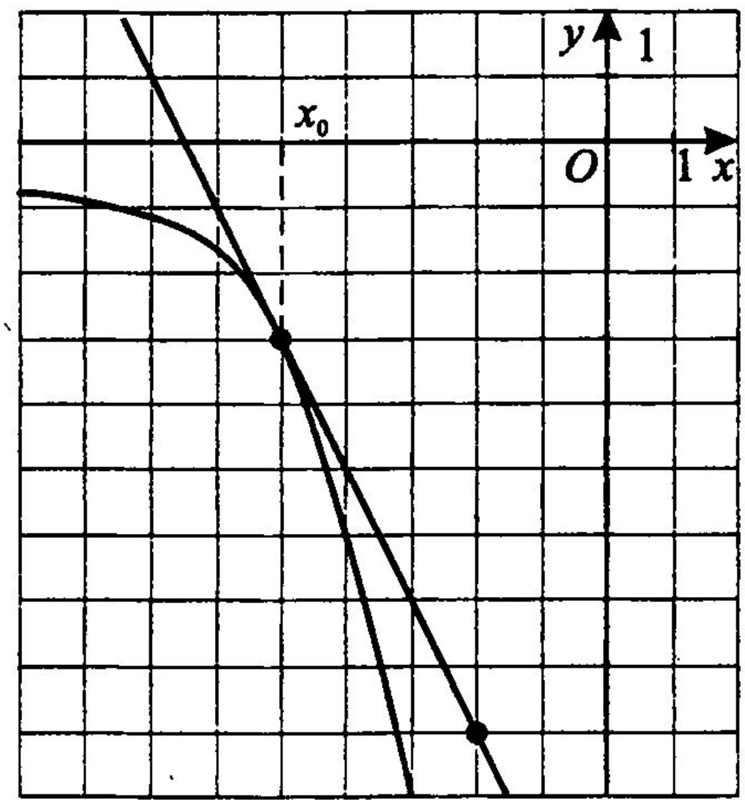
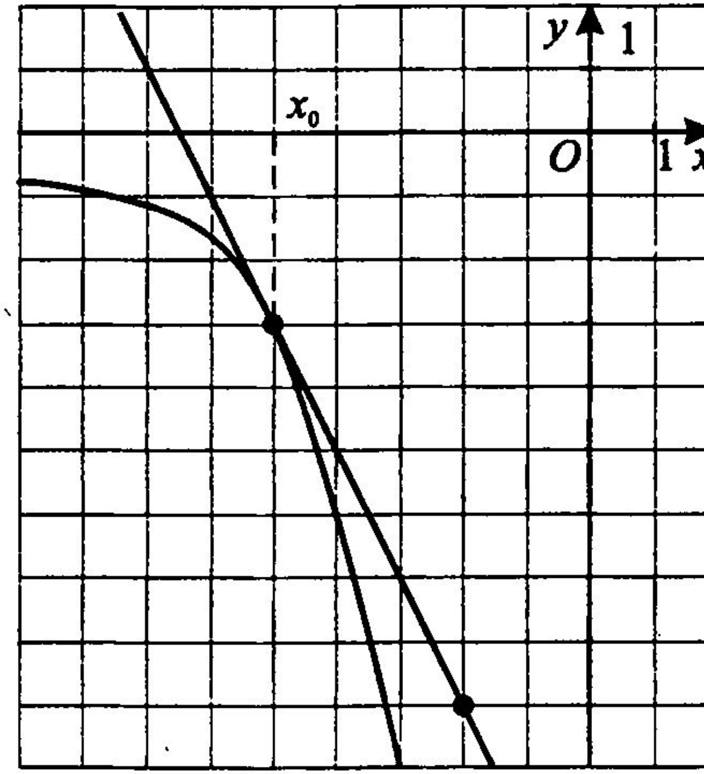


Рис. 3.



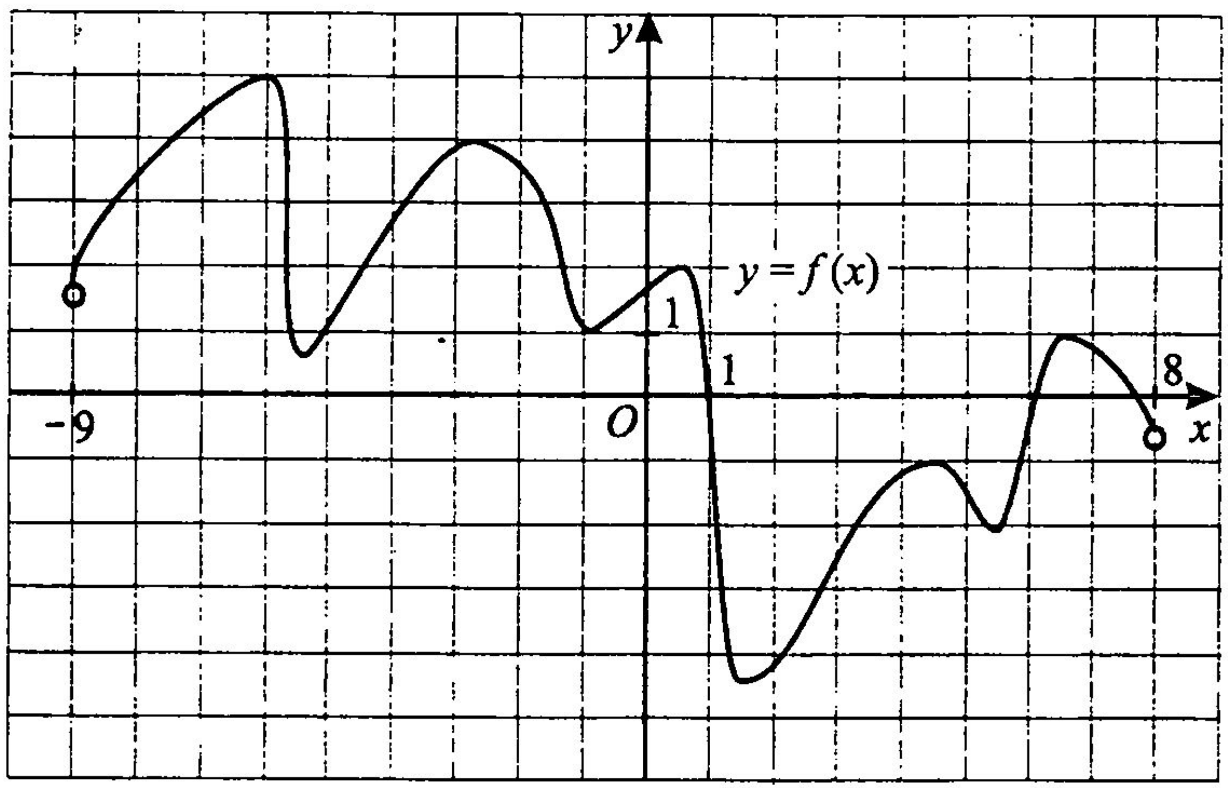
Решение.

2. Прямая $y = 3x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

3. Прямая $y = -4x + 15$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 4x + 11$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

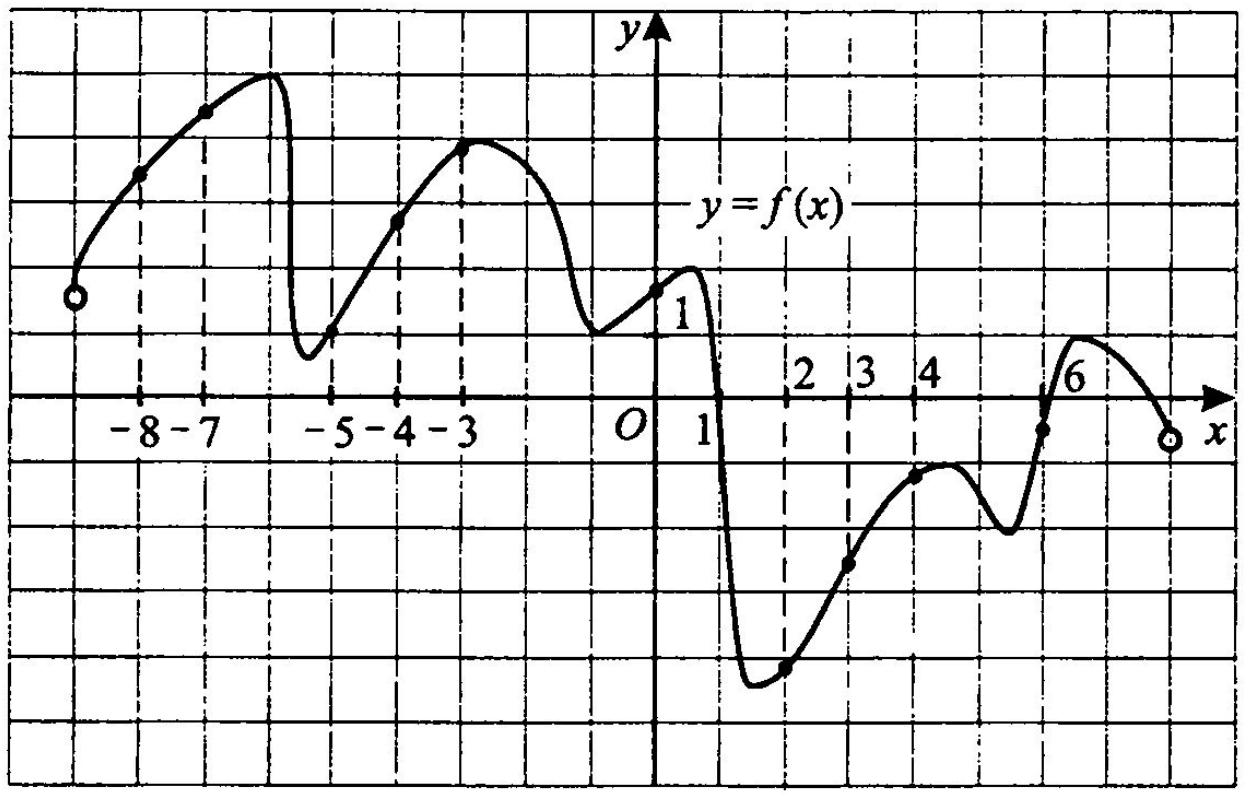
4. На рисунке 4 (см. с. 40) изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Определите количество целых точек на этом интервале, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



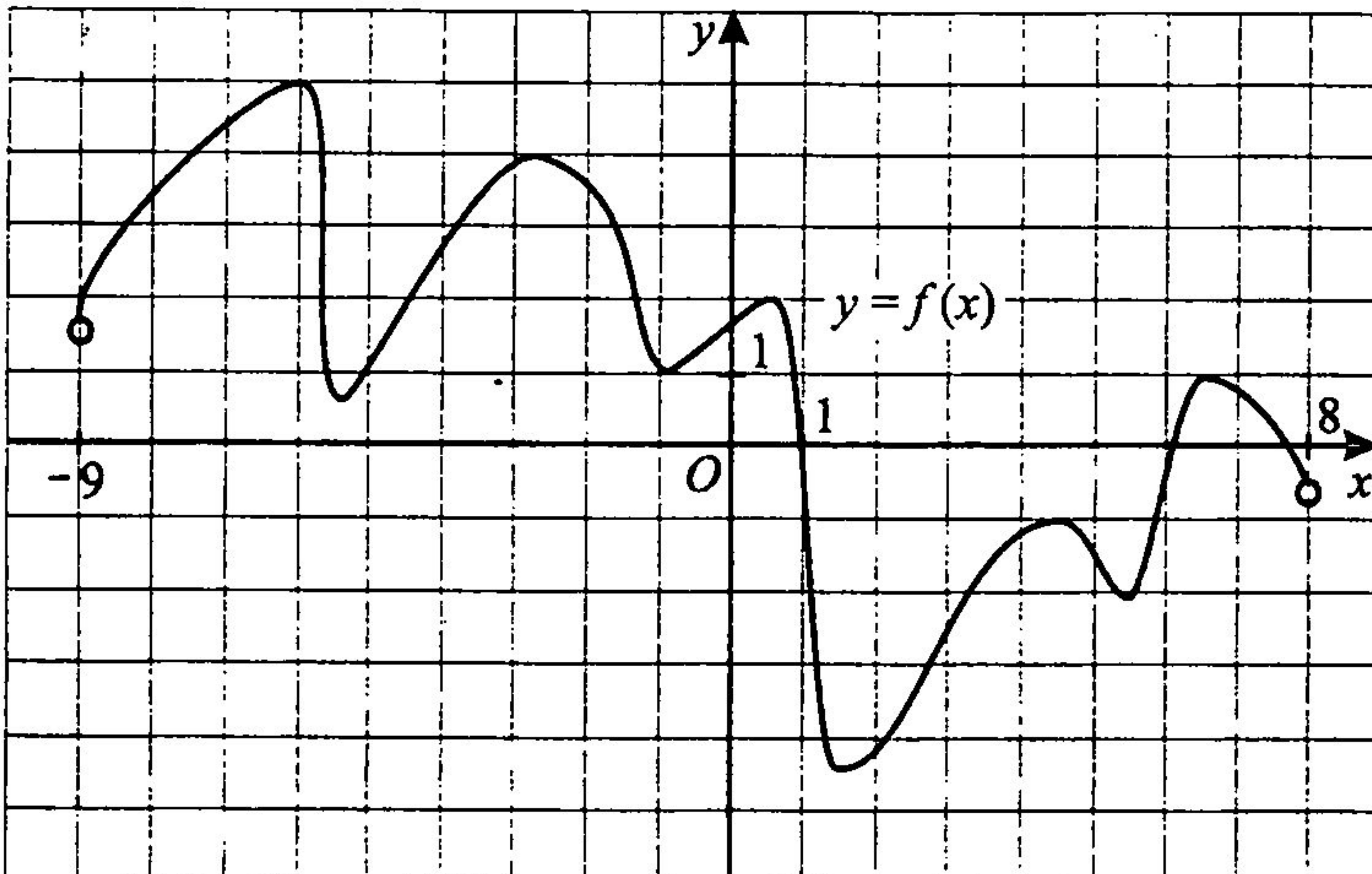
Решение.

Целые точки — это точки с целочисленными значениями абсцисс (x). Производная функции $f(x)$ положительна, если функция возрастает.

Рис. 4.



5. На рисунке 4 изображён график функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ $f(x)$ принимает наибольшее значение?

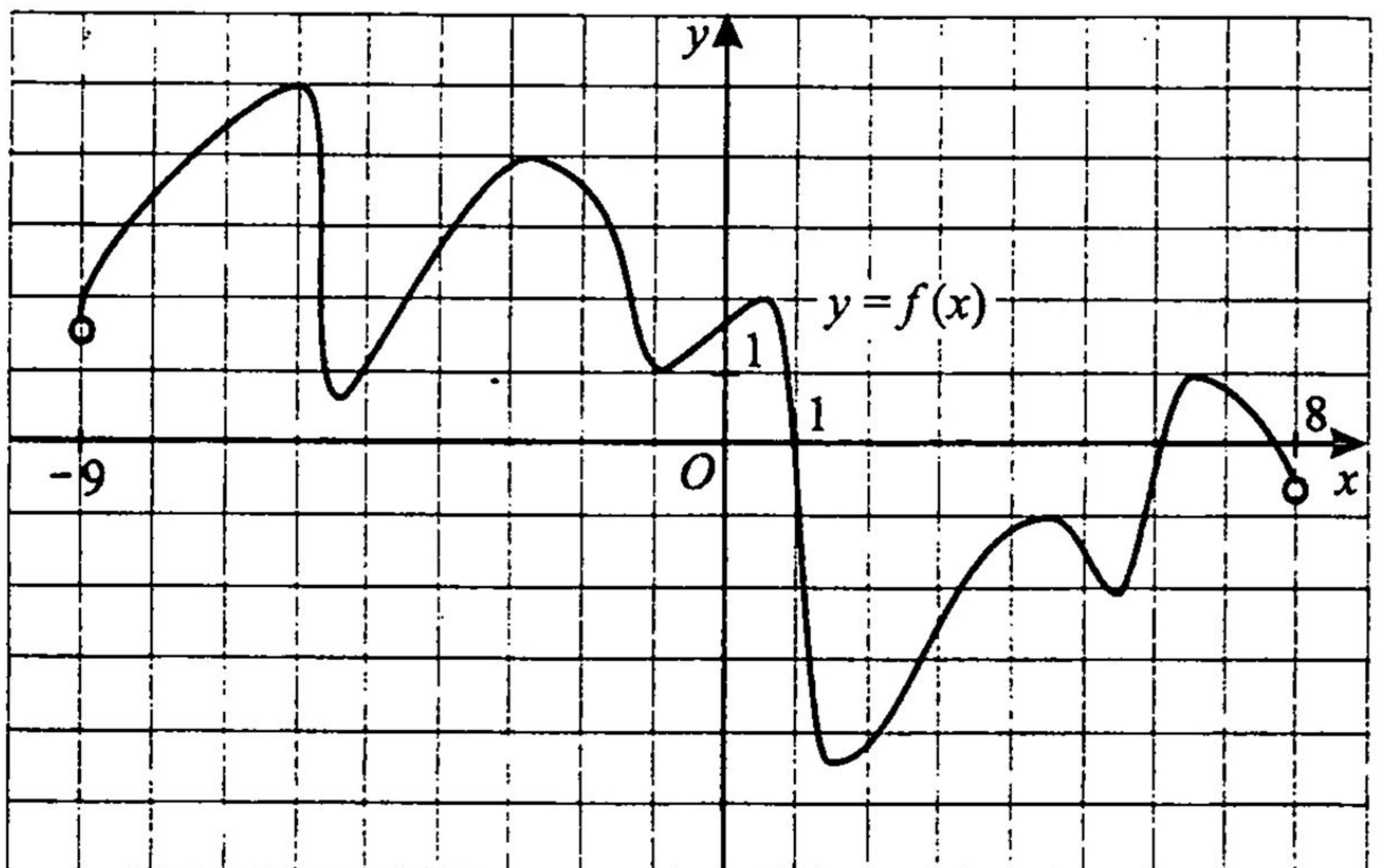


Решение.

Определяем точку на графике, у которой абсцисса x лежит на отрезке $[-8, -4]$, а ордината y наибольшая из возможных, то есть эта точка «самая высокая». Для данного графика это точка $(-6; 5)$. Значит, $f(x)$ принимает наибольшее значение в точке $x = -6$.

Ответ: -6.

6. На рисунке 4 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 8)$. Найдите количество точек на отрезке $[-8; 3]$, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$.



Решение.

Нарисуем прямую $y = 3$ (см. рис. 6 на с. 42). Посчитаем количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 3$. По рисунку видно, что число таких точек равно 6.

Ответ: 6.

7. На рисунке 7 (см. с. 42) изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-2; 10)$. Найдите сумму точек экстремума функции $y = f(x)$.

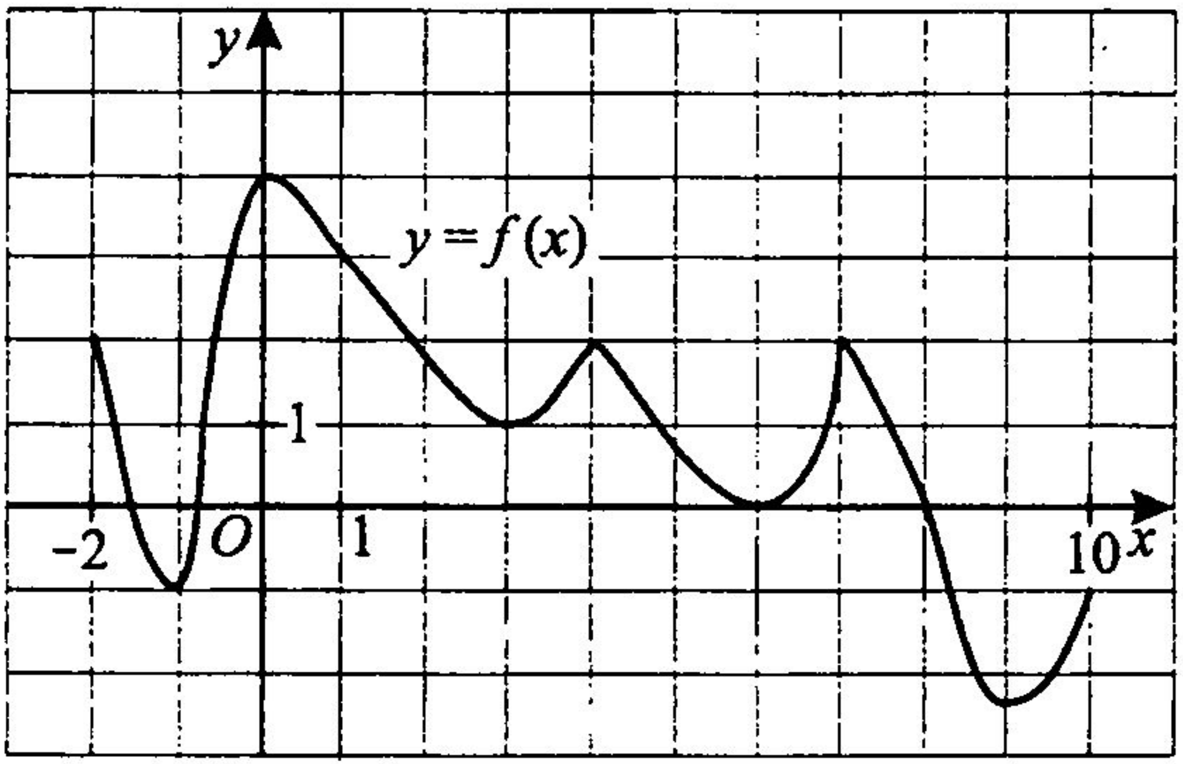


Рис. 7.

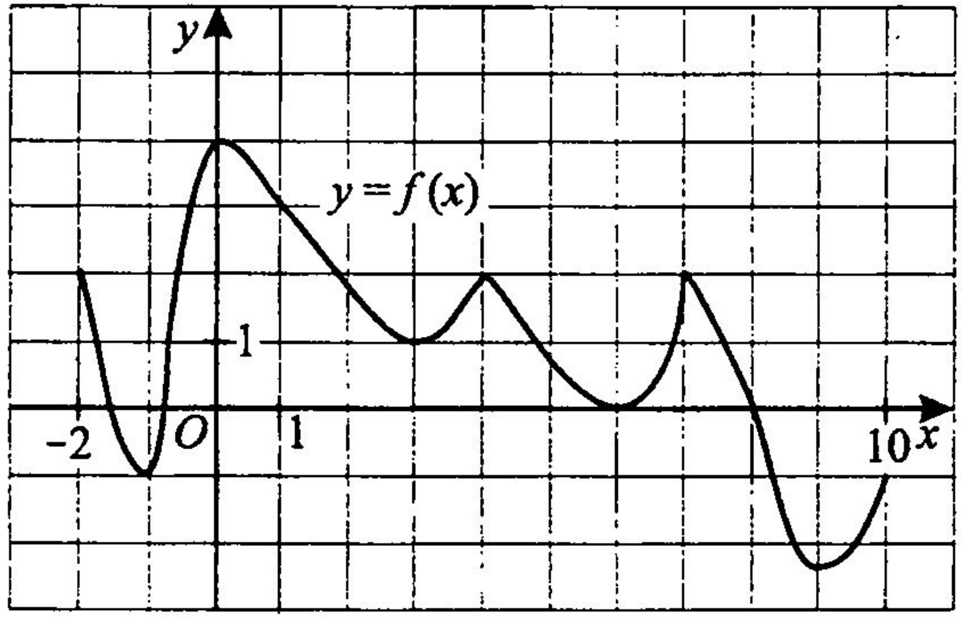


Рис. 7.

Решение.

На рисунке 7 изображён график функции $y = f(x)$. Говоря образно, точки экстремума — это те значения x, при которых на графике видны «горбики» и «впадинки». Видим, что точками экстремума данной функции являются точки $x = -1$, $x = 0$, $x = 3$, $x = 4$, $x = 6$, $x = 7$ и $x = 9$. Сумма точек экстремума функции $y = f(x)$ равна $-1 + 0 + 3 + 4 + 6 + 7 + 9 = 28$.

Ответ: 28.

8. На рисунке 8 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7{,}5; 7)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

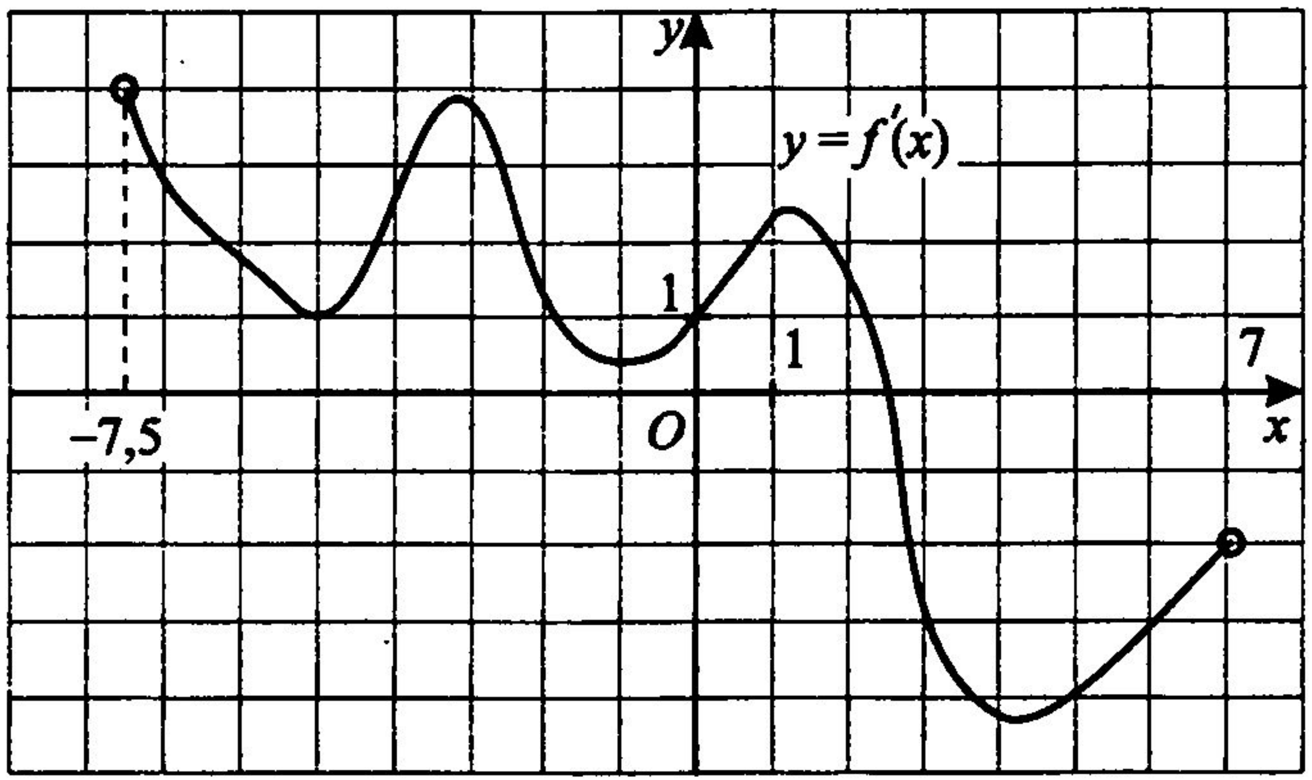


Рис. 8.

Решение.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней, если её угловой коэффициент $k = 1$. Но значение углового коэффициента касательной равно значению производной в точке касания, то есть нам нужно найти точки, в которых производная $f'(x) = 1$. Построим прямую $y = 1$, параллельную оси Ox (см. рис. 9 на с. 44). Видим, что прямая и график функции имеют 4 общие точки. Это и значит, что $f'(x) = 1$ в этих четырёх точках, и в них касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 1$ или совпадает с ней.

Ответ: 4.

9. На рисунке 8 (см. с. 43) изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-7{,}5; 7)$. Найдите промежутки возрастания функции. В ответе запишите количество целых точек, входящих в эти промежутки.

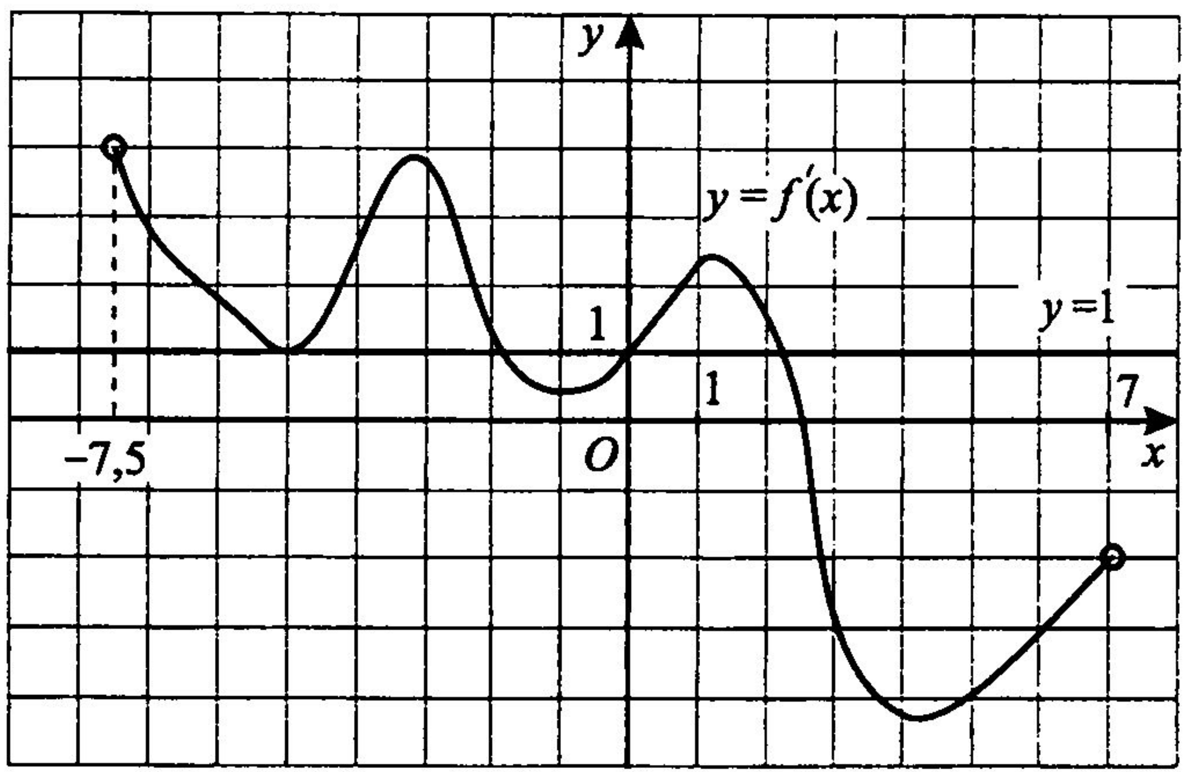


Рис. 9.

Решение.

Функция возрастает на промежутках, в которых её производная положительна. Найдём те целые точки на графике, в которых производная положительна (лежит выше оси абсцисс Ox). Видим, что эти точки лежат в интервале от $-7{,}5$ до $2{,}5$. Целых среди них 10.

Ответ: 10.

10. На рисунке 8 (см. с. 43) изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на отрезке $(-7{,}5; 7)$. В какой точке отрезка $[-5; -2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

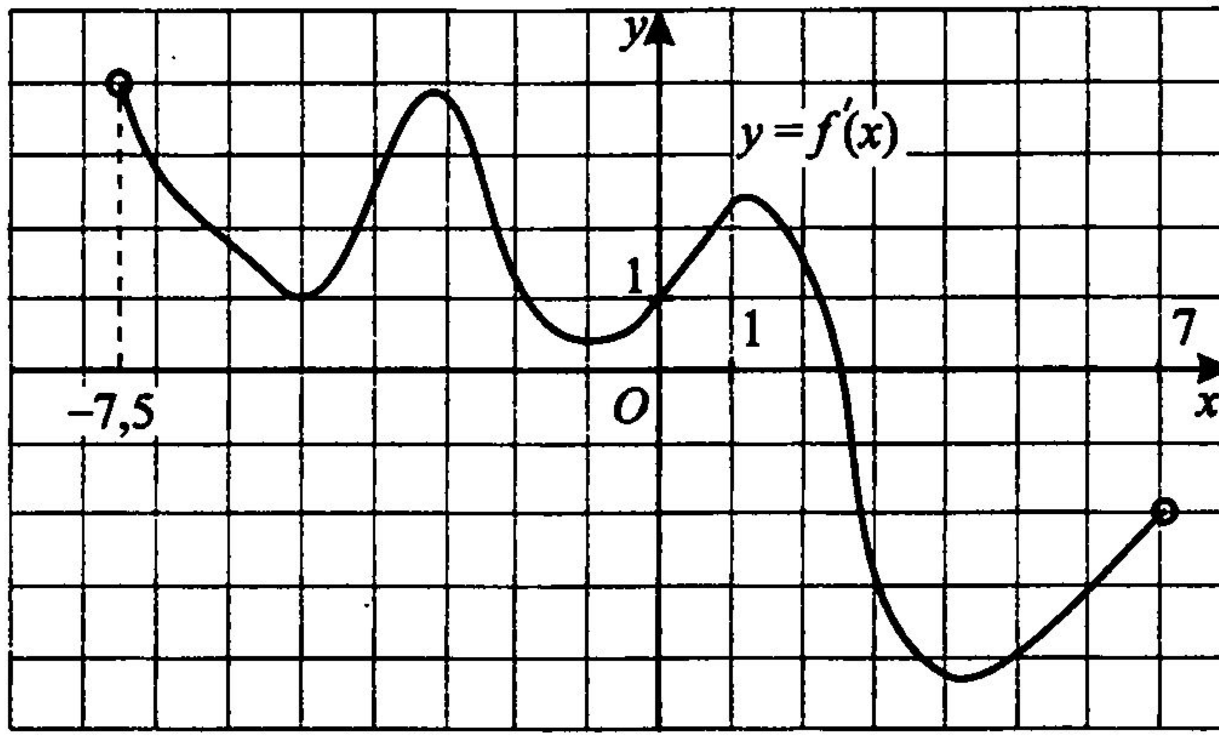


Рис. 8.

Решение.

На отрезке $[-5; -2]$ производная функции $y = f'(x)$ положительна, следовательно, $f(x)$ на этом отрезке возрастает и принимает наименьшее значение на левом конце отрезка (или, другими словами, при наименьшем значении x). В данном случае это $x = -5$.

Ответ: -5.

11. На рисунке 10 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 3]$.

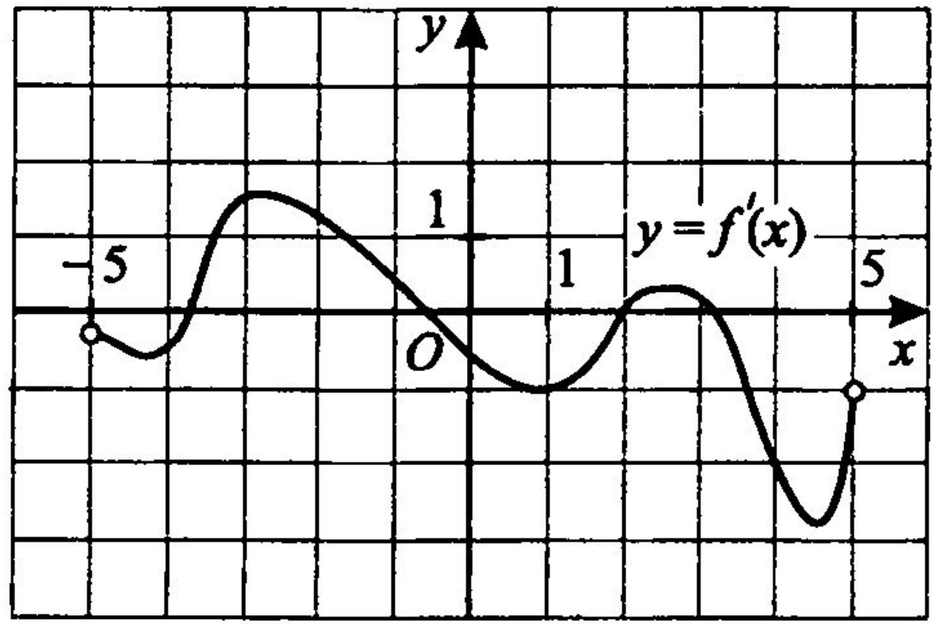


Рис. 10.

Решение.

Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку производная меняет знак, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox. Производная функции $y = f'(x)$ на отрезке $[-4; 3]$ меняет знак три раза, поэтому количество точек экстремума функции $y = f(x)$ на данном промежутке равно 3.

Ответ: 3.

12. На рисунке 11 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите точку максимума функции $y = f(x)$ на интервале $(-3; 3)$.

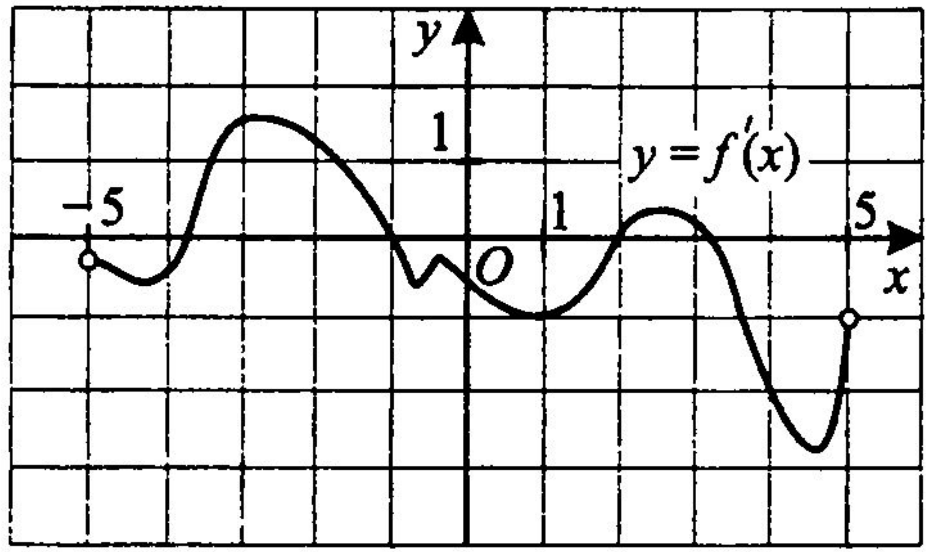


Рис. 11.

Решение.

Точка является точкой экстремума непрерывной функции, если при прохождении через неё знак производной меняется, то есть график производной пересекает ось абсцисс Ox. Таких точек на интервале $(-3; 3)$ две: $x = -1$ и $x = 2$.

Точка является точкой максимума непрерывной функции, если при прохождении через эту точку знак производной меняется с «+» на «−». В данном случае точкой максимума является точка $x = -1$ (см. рис. 12).

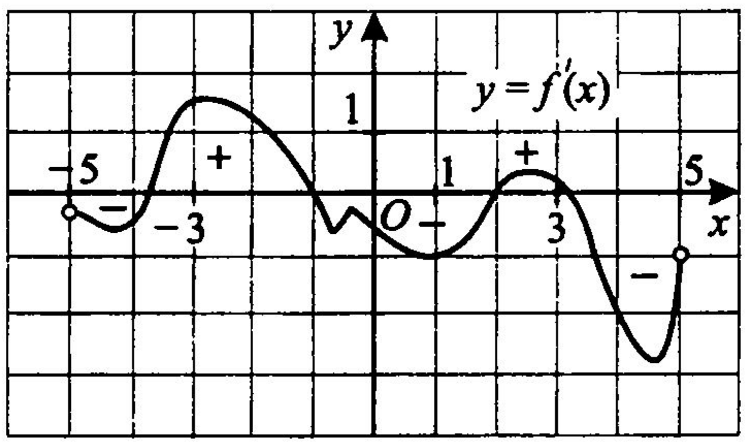


Рис. 12.

Ответ: -1.

13. На рисунке 11 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-5; 5)$. Найдите промежутки возрастания функции $y = f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.

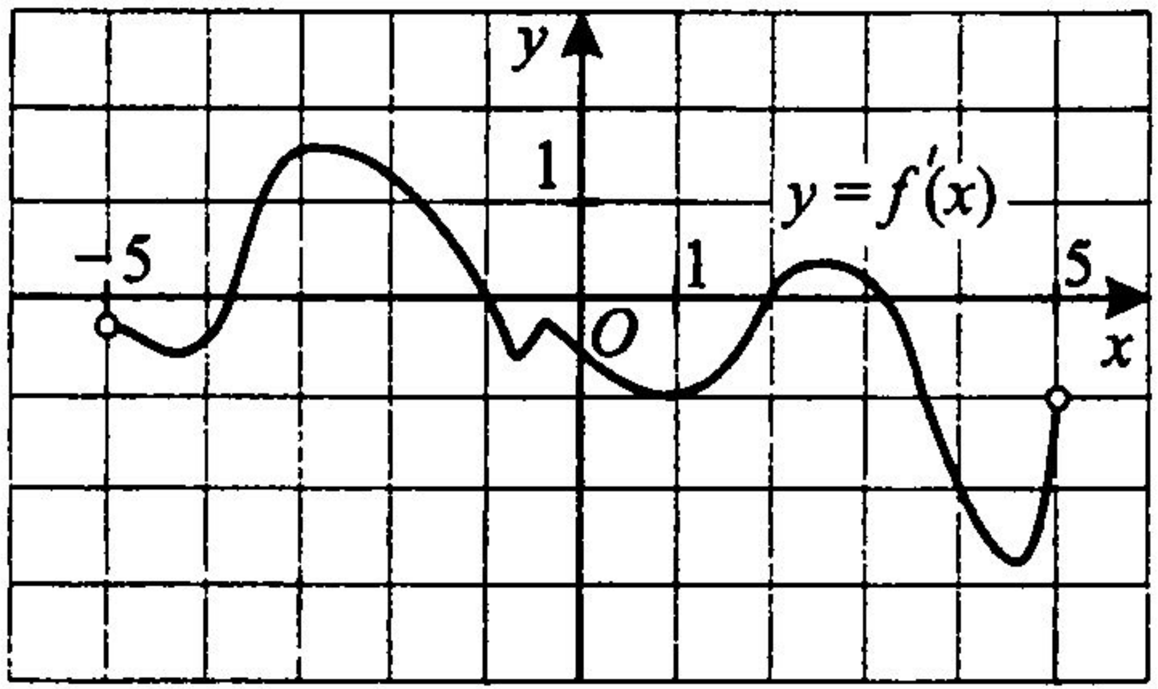


Рис. 11.

Решение.

Расставим знаки производной (см. рис. 12) и выберем промежутки, где производная положительна (на них функция возрастает). К точкам возрастания функции относятся так же концы этих промежутков.

Видим, что целые точки, входящие в промежутки возрастания, — это $-3, -2, -1, 2$ и 3. Их сумма равна -1.

Ответ: -2.

14. На рисунке 13 изображён график производной функции $y = f'(x)$, определённой на интервале $(-2; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $y = f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

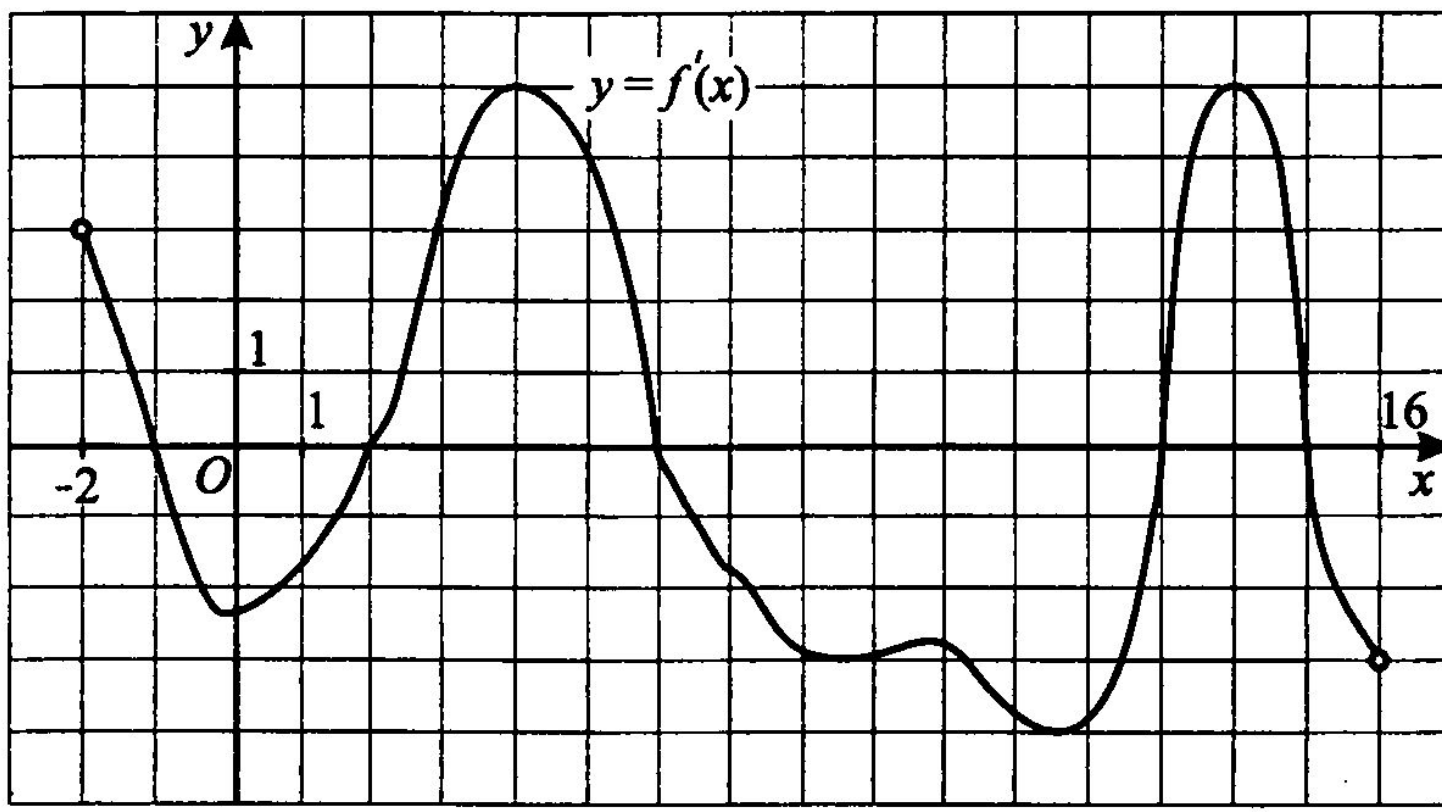


Рис. 13.

Решение.

Расставим знаки производной (см. рис. 14) и выберем промежутки, где производная отрицательна (на них функция убывает). Это и бу́дут промежутки убывания: $[-1; 2]$, $[6; 13]$, $[15; 16)$. Длина наибольшего из них равна $13 - 6 = 7$.

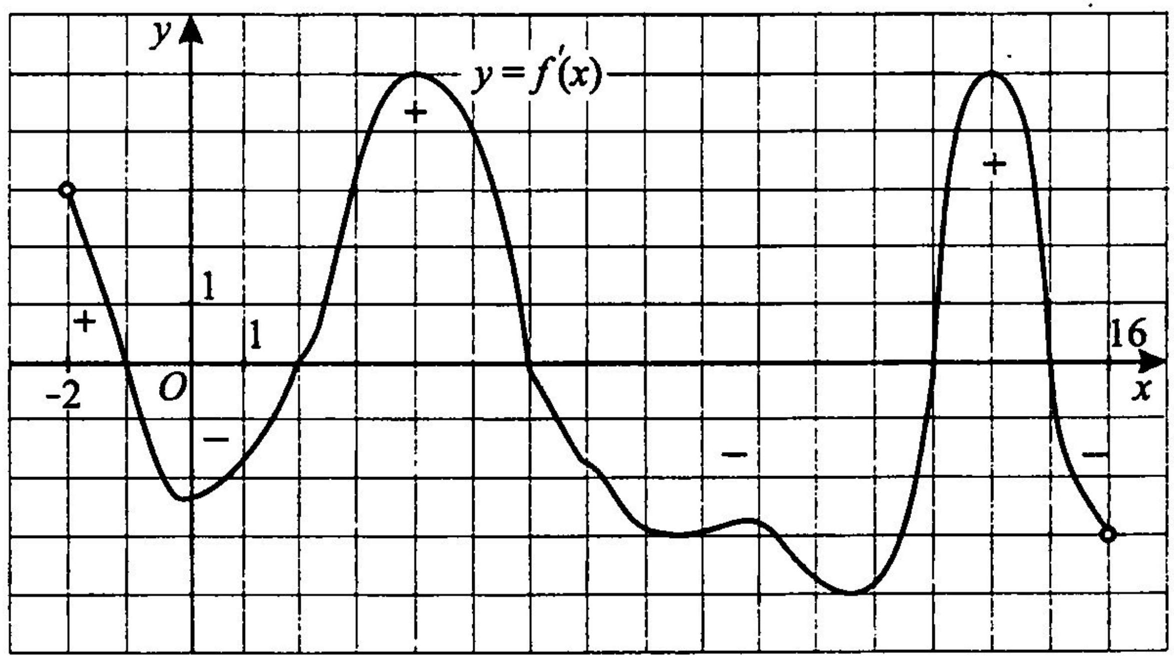


Рис. 14.

Ответ: 7.

Вариант 1

1. Прямая $y = 4x + 8$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 2x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

2. На рисунке 15 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. В какой точке отрезка $[-7; -2]$ $f(x)$ принимает наименьшее значение?

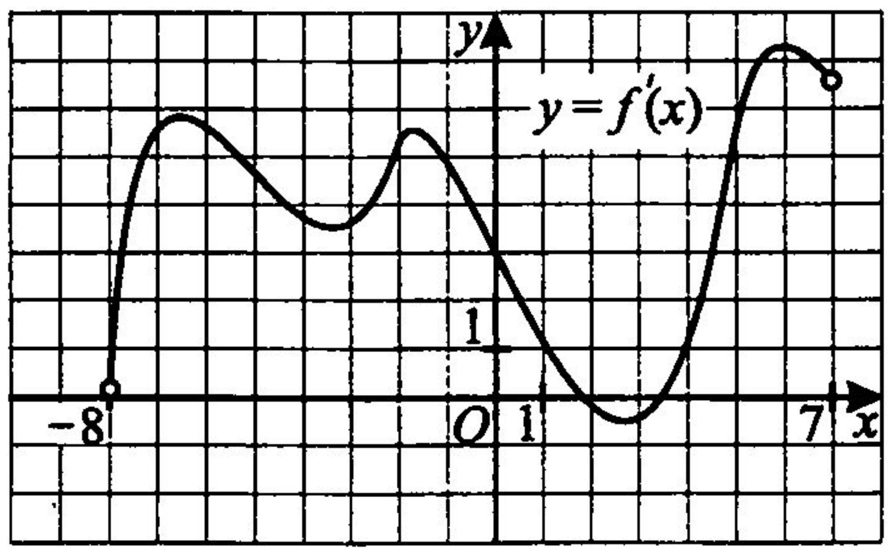


Рис. 15.

3. На рисунке 16 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-8; 7)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.

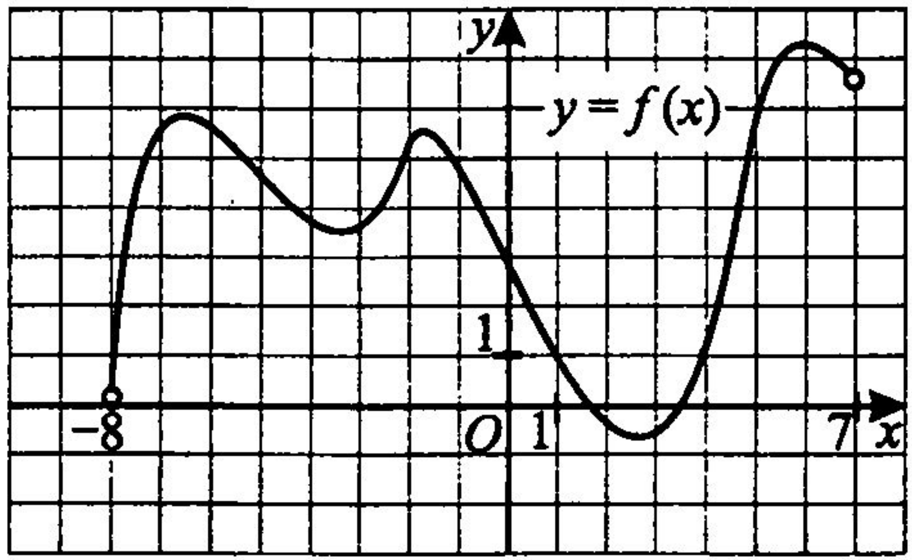


Рис. 16.

4. На рисунке 17 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 4)$.

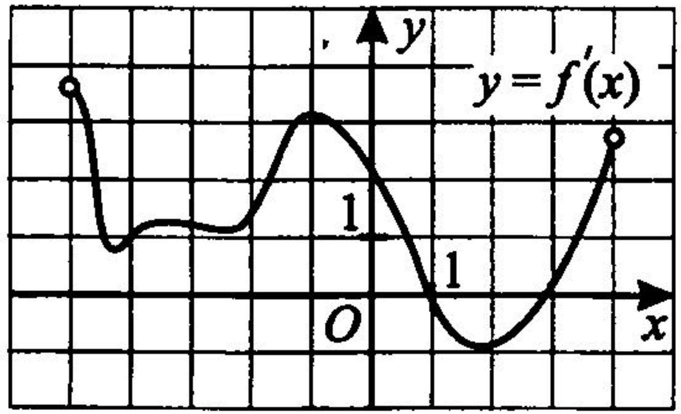


Рис. 17.

Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 14$ или совпадает с ней.

5. На рисунке 18 изображён график производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 4]$.

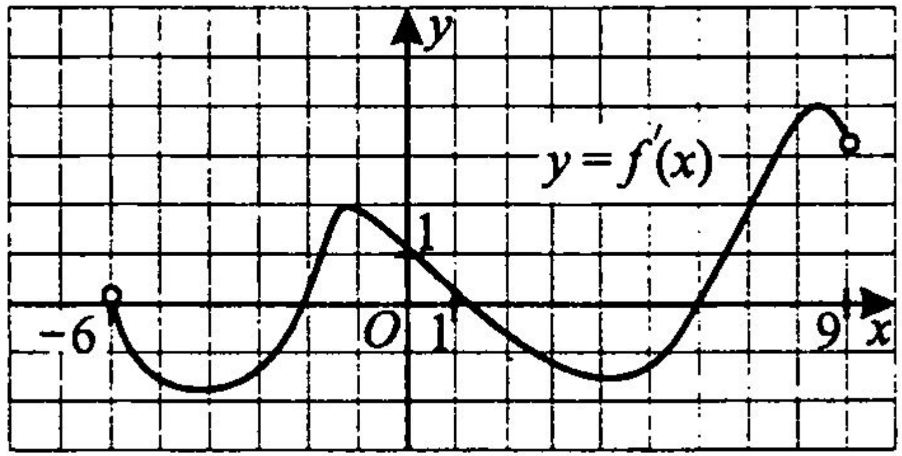


Рис. 18.

6. На рисунке 19 изображён график функции $f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

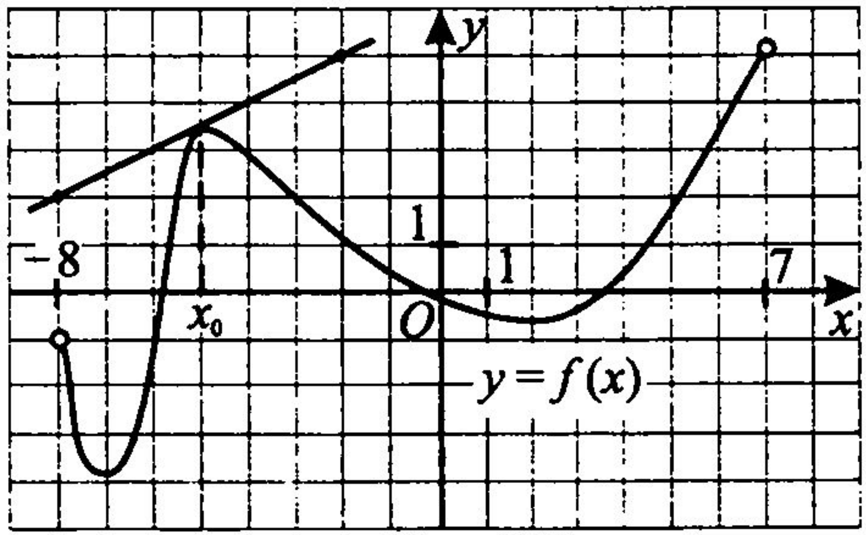


Рис. 19.