Обобщение понятия о показателе степени

Рассмотрим числа вида a^n

1)Если $n=1$, то $a^1=a$;

2)если $n=0$ и $a\neq 0$, то $a^0=1$;

3)если $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$, то
$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n множителей);

4)если $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ и $a\neq 0$, то $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

Рассмотрим пример $2^{\frac{3}{5}}$

$\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 2^{\frac{3}{5}*5} = 2^3$ Поскольку $\frac{3}{5}*5 = 3$ Пусть $a = 2^{\frac{3}{5}}$

Тогда $a^5 = 2^3 \Rightarrow a = \sqrt[5]{2^3}$

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$$

Определение 1:

Если $\frac{p}{q}$ **- обыкновенная дробь (q≠1) и a≥0 , то под** $a^{\frac{p}{q}}$ **понимают** $\sqrt[q]{a^p}$ **, т.е.**

$$\boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}\ , a \ge 0,\ q \ne 1.}$$

Например , $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{x^{31}}$$

Если $\frac{p}{q}$ - обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a>0$, то под $a^{-\frac{p}{q}}$ понимают $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$, т.е.

$$\boxed{a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} \quad , a > 0.}$$

Например, $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

$$7^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^5}}$$

Если $a>0$, $b>0$, s и t – произвольные рациональные числа, то

$$1) a^t \cdot a^s = a^{s+t};$$

$$2) a^s : a^t = a^{s-t};$$

$$3) (a^s)^t = a^{st};$$

$$4) (ab)^s = a^s \cdot b^s;$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}.$$

Рассмотрим пример $a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{3}}$

$$a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} * \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} * \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a^3 * a^2} = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}$$

$$a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{3+2}{6}} = a^{\frac{5}{6}}$$

Вычислить :

а) $64^{\frac{1}{6}}$; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $0^{\frac{51}{4}}$;г) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

- Извлекать корень с дробным показателем мы можем только из положительного числа, т.к
- $\left(-8\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ - верная запись

С другой стороны:

$$\left(-8\right)^{\frac{1}{3}} = \left(-8\right)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{\left(-8\right)^{2}} = 2$$

получили противоречие

В дробную степень мы можем возводить только положительные числа!

Упростите выражение: $\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2-2\sqrt[3]{xy}-\frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}}.$

$$1)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+\left(y^{\frac{1}{2}}\right)^2=x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}.$$

$$2)\sqrt[3]{xy}=\left(xy\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

$$3)\frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}}=\left(\sqrt[3]{y}\right)^2=\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2=y^{\frac{2}{3}}$$

$$4)\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)-2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}$$

Проверь себя

$5^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[3]{5^2}$	$9^{\frac{5}{3}}$	$\sqrt[3]{9^5}$
$\sqrt[5]{a^2}$	$a^{\frac{2}{5}}$	$\sqrt[11]{c^5}$	$c^{\frac{5}{11}}$
$27^{\frac{1}{3}}$	3	$64^{\frac{1}{3}}$	4
$\sqrt[4]{c^{-3}}$	$c^{-\frac{3}{4}}$	$\sqrt[7]{a^{-5}}$	$a^{-\frac{5}{7}}$
$8^{-\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{2}$	$32^{-\frac{1}{5}}$	$\frac{1}{2}$

Решите примеры:

$$1)49^{\frac{1}{2}};2)1000^{\frac{1}{3}};3)27^{\frac{1}{3}};4)25^{\frac{1}{2}}$$

$$5)9^{2\frac{1}{2}};6)0.16^{2\frac{1}{12}};7)\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{3}{4}};8)0.001^{\frac{2}{3}}$$

$$9)\left(27*3^{-4}\right)^{2};10)16*\left(2^{-3}\right)^{2};11)\frac{6^{-4}*6^{-9}}{6^{-12}}$$

$$12)\frac{7^{-7}*7^{-8}}{7^{-13}};13)\frac{5^{4}*49^{-3}}{7^{-7}*25^{3}};14)\frac{81^{12}*10^{-7}}{10^{-5}*27^{17}}$$