

Обобщение понятия о показателе степени



Рассмотрим числа вида a^n

1) Если $n=1$, то $a^1=a$;

2) если $n=0$ и $a \neq 0$, то $a^0=1$;

3) если $n=2, 3, 4, 5, \dots$, то
 $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$ (n множителей);

4) если $n=1, 2, 3, 4, \dots$ и $a \neq 0$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Рассмотрим пример $2^{\frac{3}{5}}$

$$\left(2^{\frac{3}{5}}\right)^5 = 2^{\frac{3}{5} * 5} = 2^3 \quad \text{Поскольку } \frac{3}{5} * 5 = 3 \quad \text{Пусть } a = 2^{\frac{3}{5}}$$

Тогда $a^5 = 2^3 \Rightarrow a = \sqrt[5]{2^3}$

$$2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$$

Определение 1:

Если $\frac{p}{q}$ - обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a \geq 0$, то под $a^{\frac{p}{q}}$ понимают $\sqrt[q]{a^p}$, т.е.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad a \geq 0, \quad q \neq 1.$$

Например, $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

$$7^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{7^5}$$

$$\sqrt[8]{x^3} \cdot \sqrt[12]{x^{11}} = x^{\frac{3}{8}} \cdot x^{\frac{11}{12}} = x^{\frac{31}{24}} = \sqrt[24]{x^{31}}$$

Если $\frac{p}{q}$ - обыкновенная дробь ($q \neq 1$) и $a > 0$, то под $a^{-\frac{p}{q}}$ понимают $\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}$, т.е.

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}, \quad a > 0.$$

Например, $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$

$$7^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^5}}$$

Если $a > 0$, $b > 0$, s и t – произвольные рациональные числа, то

$$1) a^t \cdot a^s = a^{s+t};$$

$$2) a^s : a^t = a^{s-t};$$

$$3) (a^s)^t = a^{st};$$

$$4) (ab)^s = a^s \cdot b^s;$$

$$5) \left(\frac{a}{b} \right)^s = \frac{a^s}{b^s}.$$

Рассмотрим пример $a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{3}}$

$$a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{3}} = \sqrt{a} * \sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^3} * \sqrt[6]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} * a^2 = \sqrt[6]{a^5} = a^{\frac{5}{6}}$$

$$a^{\frac{1}{2}} * a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{3+2}{6}} = a^{\frac{5}{6}}$$

Вычислить :

а) $64^{\frac{1}{6}}$; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $0^{\frac{51}{4}}$; г) $(-8)^{\frac{1}{3}}$

□ Извлекать корень с дробным показателем мы можем только из положительного числа, т.к

□ $(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2$ - верная запись
С другой стороны:

получили противоречие

$$(-8)^{\frac{1}{3}} \neq \sqrt[6]{(-8)^2} = 2$$

В дробную степень мы можем возводить только положительные числа!

Упростите выражение:

$$\left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\sqrt[3]{xy} - \frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}}.$$

$$1) \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}.$$

$$2) \sqrt[3]{xy} = (xy)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}.$$

$$3) \frac{1}{\left(\sqrt[3]{y}\right)^{-2}} = \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \left(y^{\frac{1}{3}}\right)^2 = y^{\frac{2}{3}}$$

$$4) \left(x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right) - 2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

Проверь себя

$$5^{\frac{2}{3}}$$

$$\sqrt[3]{5^2}$$

$$9^{\frac{5}{3}}$$

$$\sqrt[3]{9^5}$$

$$\sqrt[5]{a^2}$$

$$a^{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt[11]{c^5}$$

$$c^{\frac{5}{11}}$$

$$27^{\frac{1}{3}}$$

$$3$$

$$64^{\frac{1}{3}}$$

$$4$$

$$\sqrt[4]{c^{-3}}$$

$$c^{-\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[7]{a^{-5}}$$

$$a^{-\frac{5}{7}}$$

$$8^{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$32^{-\frac{1}{5}}$$

$$\frac{1}{2}$$

Решите примеры:

$$1) 49^{\frac{1}{2}}; 2) 1000^{\frac{1}{3}}; 3) 27^{\frac{1}{3}}; 4) 25^{\frac{1}{2}}$$

$$5) 9^{2\frac{1}{2}}; 6) 0.16^{2\frac{1}{12}}; 7) \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{3}{4}}; 8) 0.001^{\frac{2}{3}}$$

$$9) (27 * 3^{-4})^2; 10) 16 * (2^{-3})^2; 11) \frac{6^{-4} * 6^{-9}}{6^{-12}}$$

$$12) \frac{7^{-7} * 7^{-8}}{7^{-13}}; 13) \frac{5^4 * 49^{-3}}{7^{-7} * 25^3}; 14) \frac{81^{12} * 10^{-7}}{10^{-5} * 27^{17}}$$