Функции нескольких переменных

- Производная от функции, заданной неявно
- Частные производные различных порядков
- Производная по направлению
- Градиент

Производная от функции, заданной неявно

Теорема

Пусть непрерывная функция y от x задана неявно уравнением:

$$F(x;y)=0$$

где $F(x;y)$, F'_x, F'_y – непрерывные функции в некоторой области D, содержащей точку $(x;\ y)$; кроме того, в этой точке F'_y не равно нулю. Тогда функция y от x имеет производную:

$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_y}} \qquad (1)$$

Найти производную неявно заданной функции $e^y-e^x+xy=0$

$F(x;y)=e^y-e^x+xy \qquad F'_x=-e^x+y \qquad F'_y=e^y+x$

По формуле (1) получаем:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=\frac{e^x-y}{e^y+x}$$

Производная от функции, заданной неявно

Рассмотрим теперь уравнение вида:

$$F(x;y;z)=0 \qquad (2)$$

Если каждой паре *x, y* из некоторой области соответствует одно или несколько значений *z*, удовлетворяющих уравнению (2), то это уравнение неявно определяет одну или несколько однозначных функций *z* от *x, y*. Частные производные функции *z* по *x, y* находятся по формулам:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}} \qquad (3)$$

Найти частные производные функции ***z*** *по* ***x*** *и* ***y*** $\qquad e^z+x^2y+z+5=0$

$$F(x;y;z)=e^z+x^2y+z+5 \qquad F'_x=\ 2xy \qquad F'_y=\ x^2 \qquad F'_z=e^z+1$$

По формулам (3) получаем:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

Частные производные различных порядков

Пусть имеем функцию двух переменных

$$z = f(x; y)$$

Частные производные z'_x, z'_y также являются функциями двух переменных x и y. Поэтому от них можно снова находить частные производные.

Частных производных от ФДП четыре, так как каждую из функций z'_x, z'_y можно дифференцировать по x и по y.

Вторые частные производные обозначаются так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}$$

функция z дифференцируется последовательно два раза по x

функция z сначала дифференцируется по x, а потом результат дифференцируется по y.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}$$

функция z дифференцируется последовательно два раза по y

функция z сначала дифференцируется по y, а потом результат дифференцируется по x.

Частные производные различных порядков

Найти частные производные второго порядка $z = y^2e^x + x^2y^3 + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(y^2e^x + x^2y^3 + 1\right)'_x = y^2e^x + 2xy^3$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(y^2e^x + x^2y^3 + 1\right)'_y = 2ye^x + 3x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\qquad\qquad\right)'_x = y^2e^x + 2y^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left(\qquad\qquad\right)'_x = 2ye^x + 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\qquad\qquad\right)'_y = 2ye^x + 6xy^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\qquad\qquad\right)'_y = 2e^x + 6x^2y$$

Частные производные различных порядков

Производные второго порядка можно снова дифференцировать как по *x*, так и по *y*.

Частной производной *n* – ого порядка называется первая производная от производной *n -1* порядка, например: $$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$$

функция z сначала дифференцируется p раз по x , а

Для функции любого числа переменных частные производные высших порядков определяются аналогично:

$$u = z^2 e^{2x+y^2}$$ *Найти* $$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\qquad \right)'_x = 2z^2 e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\qquad \right)'_x = 4z^2 e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \left(\qquad \right)'_y = 8yz^2 e^{2x+y^2}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \left(\qquad \right)'_z = 16yze^{2x+y^2}$$

Частные производные различных порядков

Теорема

Если функция $z = f(x; y)$ и ее частные производные f'_x ; f'_y ; f''_{xy} ; f''_{yx} определены и непрерывны в точке $M(x; y)$ и в некоторой ее окрестности, то в этой точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Следствие

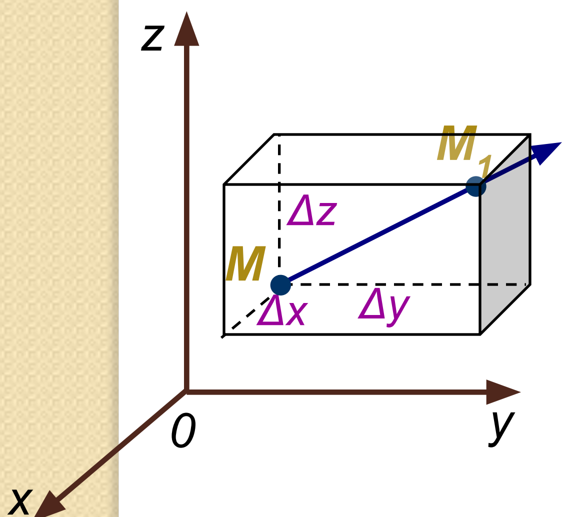
Если частные производные $\dfrac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}}$; $\dfrac{\partial^n z}{\partial y^{n-p} \partial x^p}$ непрерывны, то

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^p \partial y^{n-p}} = \frac{\partial^n z}{\partial y^{n-p} \partial x^p}$$

Производная по направлению

Пусть в пространстве имеется область D , в которой задана функция трех переменных $u = f(x; y; z)$. В этом случае говорят, что в области D задано ***скалярное поле***.

Возьмем в области D точку $M(x; y; z)$.



Проведем из точки M вектор $\vec{s}$, направляющие косинусы которого равны:

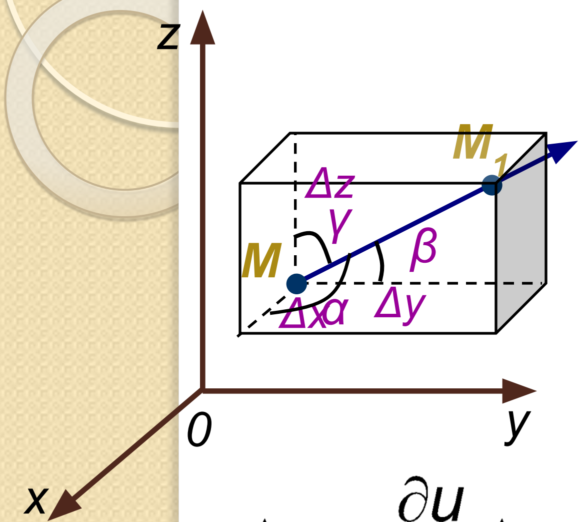
$$\cos\alpha; \quad \cos\beta; \quad \cos\gamma$$

На векторе $\vec{s}$ на расстояние Δs от его начала рассмотрим точку $M_1(x+\Delta x; y+\Delta y; z+\Delta z)$

Таким образом, $$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Будем предполагать, что функция u непрерывна и имеет непрерывные частные производные в области D.

Производная по направлению



Аналогично функции двух переменных, приращение функции $u = f(x; y; z)$ можно представить:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \boxed{\varepsilon_1}\Delta x + \boxed{\varepsilon_2}\Delta y + \boxed{\varepsilon_3}\Delta z \qquad (4)$$

Бесконечно малые величины при Δs стремящемся к нулю

Разделим все члены равенства (4) на Δs:

$$\frac{\Delta u}{\Delta s} = \frac{\partial u}{\partial x}\boxed{\frac{\Delta x}{\Delta s}} + \frac{\partial u}{\partial y}\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta s}} + \frac{\partial u}{\partial z}\boxed{\frac{\Delta z}{\Delta s}} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s} \qquad (5)$$

Очевидно, что: $\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha; \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta; \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma$

Производная по направлению

Предел отношения $\dfrac{\Delta u}{\Delta s}$ при стремлении Δs к нулю называется ***производной от функции*** $u = f(x;\, y;\, z)$ ***в точке*** $(x;\, y;\, z)$ ***по направлению вектора*** $\vec{s}$ и обозначается: $\dfrac{\partial u}{\partial s} = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta s}$

Таким образом, переходя к пределу в равенстве (5), получим:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos\gamma} \qquad (6)$$

Производная по направлению $\vec{s}$ характеризует скорость изменения функции (поля) в точке M.

Если $\dfrac{\partial u}{\partial s} \gtrless 0 \Rightarrow$ функция ***возрастает*** ***убывает*** в направлении s

Величина $\left|\dfrac{\partial u}{\partial s}\right|$ представляет собой мгновенную скорость изменения функции в направлении $\vec{s}$

Производная по направлению

Дана функция $u = x^2 + y^3 + z$

Найти производную от функции u в точке M(1; 1; 1) по направлению вектора

$$\bar{s} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$$

Находим направляющие косинусы вектора s: $|\bar{s}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}} \qquad \cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}} \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Найдем частные производные в точке M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\Big|_{(1;1;1)} = 2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2\Big|_{(1;1;1)} = 3 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 1$$

По формуле (6) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad + \quad \cdot \quad = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

Градиент

В каком направлении $\frac{\partial u}{\partial s}$ имеет наибольшее значение?

Это направление указывает вектор, который называется ***градиентом скалярного поля.***

Можно заметить, что правая часть равенства (6) представляет собой скалярное произведение единичного вектора $\overline{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ и некоторого вектора $\overline{g} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right\}$

Вектор, координатами которого являются значения частных производных функции $u = f(x; y; z)$ в точке $(x; y; z)$, называют ***градиентом функции*** и обозначают:

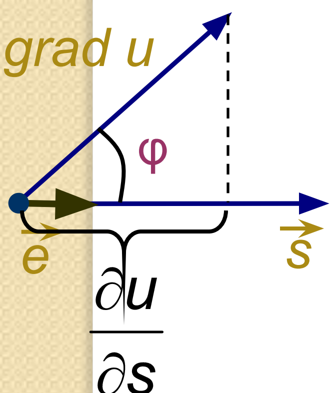
$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}$$

Градиент

Отметим, что *grad u* есть векторная величина. Говорят, что скалярное поле *U* порождает векторное поле градиента. Теперь равенство (6) можно записать так:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial s} = \overline{e} \cdot grad\ u} \quad (7) \qquad \text{или} \qquad \boxed{\frac{\partial u}{\partial s} = |grad\ u| \cdot \cos\varphi} \quad (8)$$

угол между направлением градиента и вектором s



Из формулы (8) следует, что производная по направлению достигает наибольшего значения, когда *cos φ = 1*, то есть при *φ = 0*

Таким образом, ***градиент указывает направление наибыстрейшего возрастания функции.*** В этом состоит физический смысл градиента.

Наибольшая скорость изменения функции ***U*** в точке ***M*** равна:

$$\boxed{|grad\ u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} \quad (9)$$

Градиент

Найти наибольшую скорость возрастания функции в точке *A(-1; 1; -1)*

$$u=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

Найдем частные производные в точке A:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\Big|_{(-1;1;-1)}= 2 \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}+\frac{1}{z}\Big|_{(-1;1;-1)}= 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}+\frac{1}{x}\Big|_{(-1;1;-1)}= -2$$

Градиент в точке A равен: $grad\ u = \quad \bar{i} + \quad \bar{j} \quad \bar{k}$

Наибольшая скорость возрастания функции равна:

$$|grad\ u|=\sqrt{2^2+0^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$$

Отметим, что функция будет убывать с наибольшей скоростью, если точка A движется в направлении – grad u ={-2; 0; 2} – антиградиентное направление