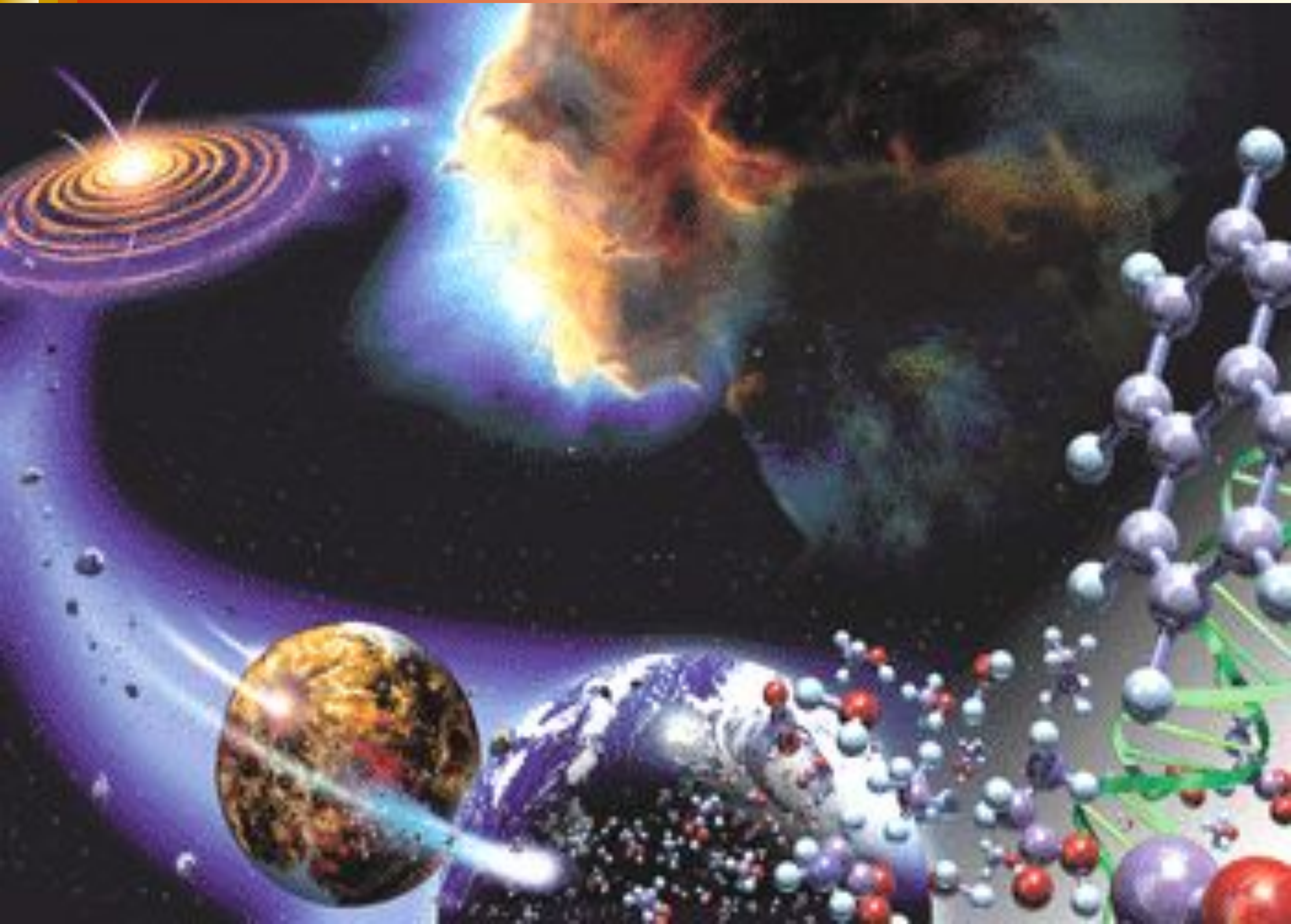


ЛЕКЦИЯ 1 ФИЗИКА КОЛЕБАНИЙ

Вид движения в зависимости от действующей силы

- 1. $F=0$, $a=0$

тело движется равномерно и прямолинейно или покоится

- 2. $F=const$ – движение равнопеременное

а) $F \parallel V$ - прямолинейное

$F \uparrow\uparrow V \quad a > 0 \quad F_\tau = F$

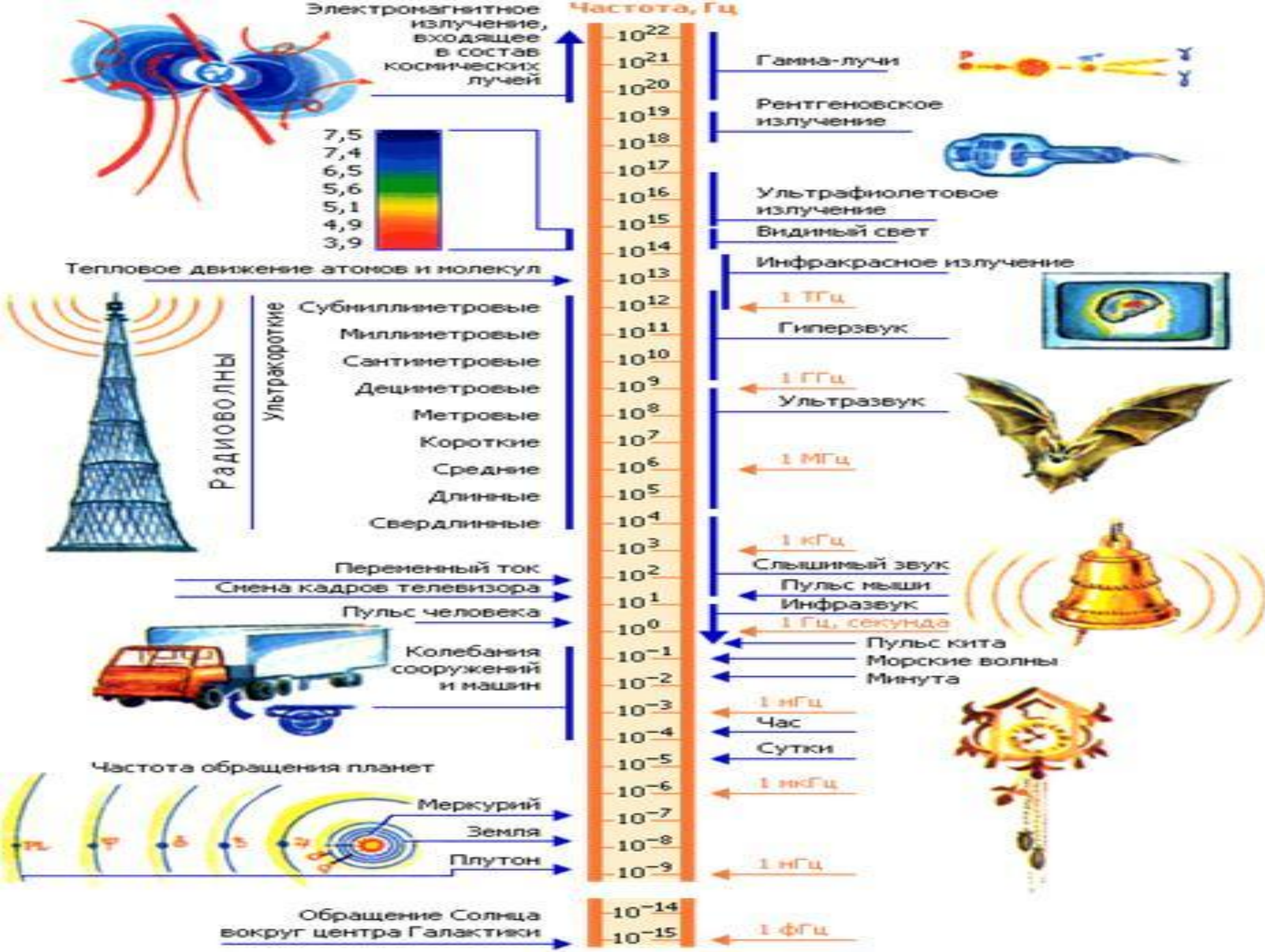
$F \downarrow\uparrow V \quad a < 0$

б) $F \perp V \quad F_n = F$ вращение

- 3) $F \sim \Delta l$ колебание

Механические колебания

Колебательные процессы весьма часто встречаются в окружающей нас природе и технике. Значительная часть механических движений – движение машин, работающих циклически; почти все акустические явления; переменный ток, применяющийся в быту и в разнообразных технических устройствах, биение сердца, колебания атомов, смена времен года, дня и ночи.


Электромагнитное излучение, входящее в состав космических лучей
Частота, Гц
10^{22}
10^{21}
10^{20}
10^{19}
10^{18}
10^{17}
10^{16}
10^{15}
10^{14}
10^{13}
10^{12}
10^{11}
10^{10}
10^{9}
10^{8}
10^{7}
10^{6}
10^{5}
10^{4}
10^{3}
10^{2}
10^{1}
10^{0}
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
10^{-9}
10^{-14}
10^{-15}
Гамма-лучи
Рентгеновское излучение
7,5
7,4
6,5
5,6
5,1
4,9
3,9
Ультрафиолетовое излучение
Видимый свет
Инфракрасное излучение
Тепловое движение атомов и молекул
Радиоволны
Ультракороткие
Субмиллиметровые
Миллиметровые
Сантиметровые
Дециметровые
Метровые
Короткие
Средние
Длинные
Свердлинные
1 ТГц
Гиперзвук
1 ГГц
Ультразвук
1 МГц
1 кГц
Слышимый звук
Пульс мыши
Инфразвук
1 Гц, секунда
Пульс кита
Морские волны
Минута
Переменный ток
Смена кадров телевизора
Пульс человека
Колебания сооружений и машин
1 мГц
Час
Сутки
1 мкГц
Частота обращения планет
Меркурий
Земля
Плутон
1 нГц
Обращение Солнца вокруг центра Галактики
1 фГц

КОЛЕБАНИЯ

Колебания (колебательные движения)- изменения состояния, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени.

Колебания могут иметь различную физическую природу, но иметь общие закономерности и описываться однотипными математическими методами.

Колебания различают:

- по характеру физических процессов
- по характеру зависимости от времени.

По характеру физических процессов:

Электромагнитные

колебания переменного электрического поля в цепи, колебания векторов ***E*** и ***B***

Механические

колебания маятников, струн, частей машин и механизмов, сооружений, волнение жидкостей

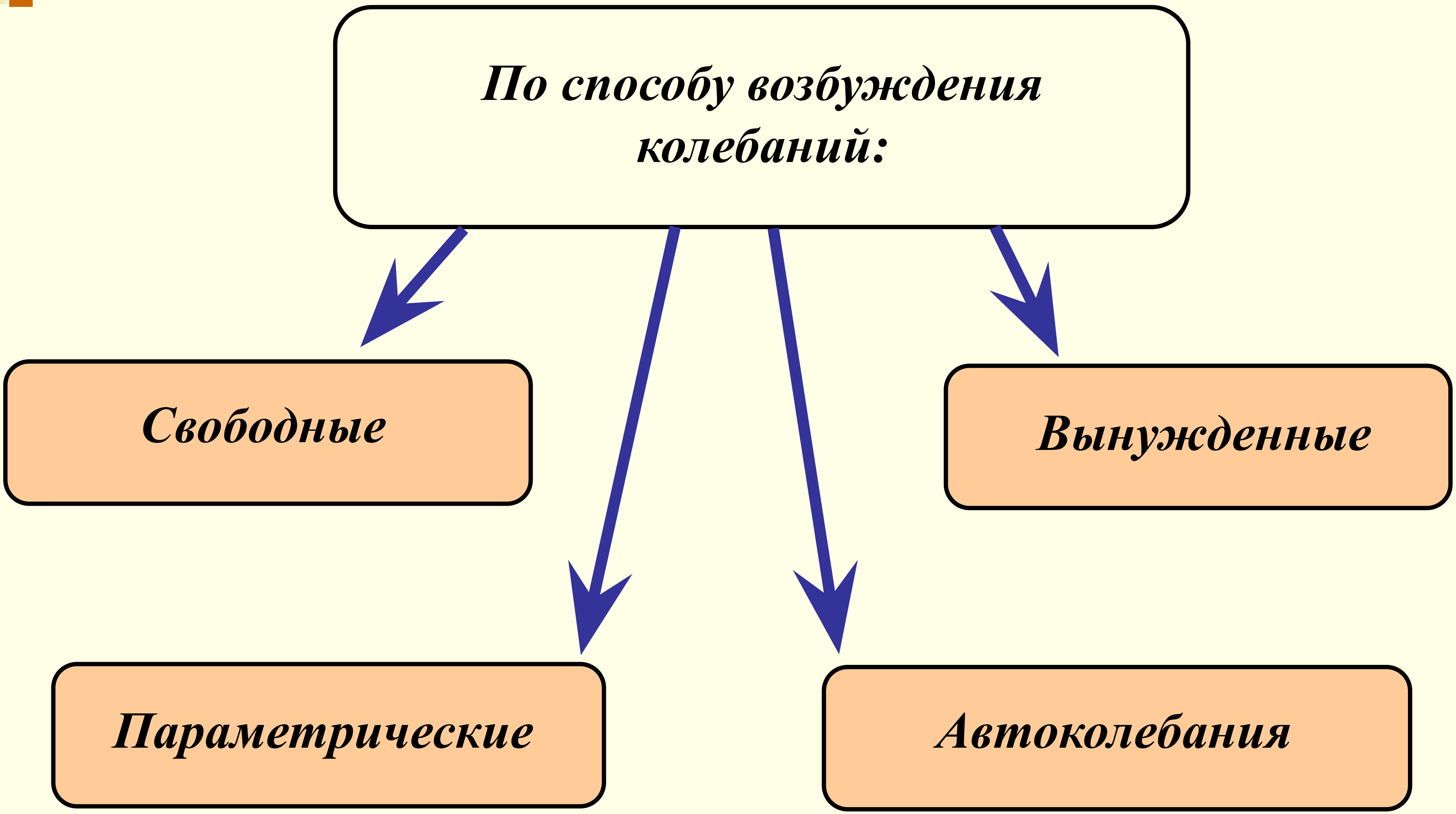
Электромеханические

колебания мембраны телефона, диффузора электродинамика

По характеру зависимости от времени:

Периодические

Непериодические



Система, совершающая колебания, называется ***колебательной системой***.

Свободные (или собственные) — это колебания в системе не подверженных действию переменных внешних сил, под действием внутренних сил после того, как система выведена из состояния равновесия (в реальных условиях из-за трения свободные колебания всегда затухающие). Простейшими примерами свободных колебаний являются колебания груза, прикреплённого к пружине, или груза, подвешенного на нити.

Условия возникновения свободных колебаний

1. Колебательная система должна иметь положение устойчивого равновесия.
2. При выведении системы из положения равновесия должна возникать равнодействующая сила, возвращающая систему в исходное положение
3. Силы трения (сопротивления) очень малы.

Параметрические — колебания, возникающие при изменении какого-либо параметра колебательной системы в результате внешнего воздействия.

Вынужденные — колебания, протекающие в системе под влиянием внешнего периодического воздействия. Может возникнуть явление резонанса: резкое возрастание амплитуды колебаний при совпадении собственной частоты осциллятора и частоты внешнего воздействия.

Автоколебания — колебания, при которых система имеет запас потенциальной энергии, *расходующейся на совершение колебаний (пример такой системы — механические часы). Характерным отличием автоколебаний от вынужденных колебаний является то, что их амплитуда определяется свойствами самой системы, а не начальными условиями.*

Колебания - ***<u>периодические</u>***, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени

$$\omega_0(t+T)+\varphi=(\omega_0 t+\varphi)+2\pi$$

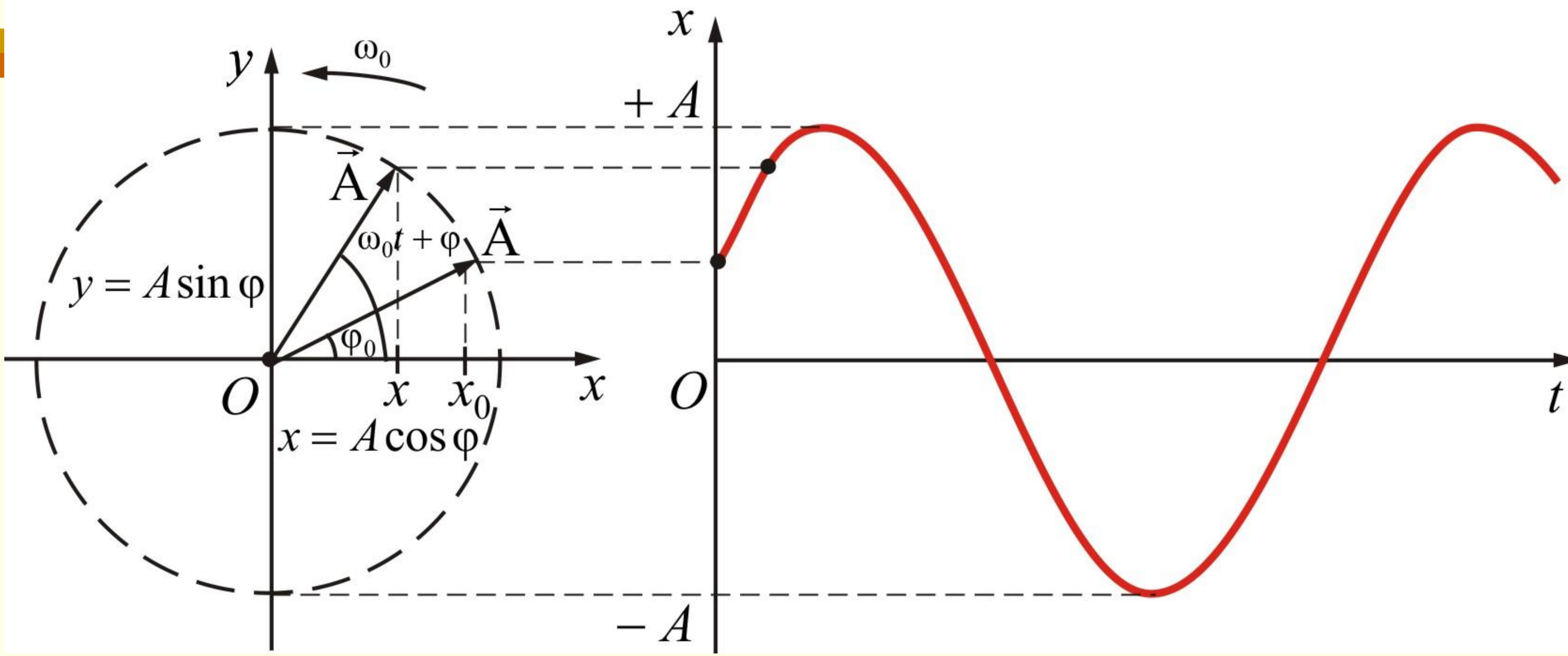
Периодические процессы можно представить как наложение гармонических колебаний.

Фурье установил, что любое периодическое негармоническое колебание может быть представлено как сумма гармонических колебаний.

Гармонические колебания – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \text{ или } x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

Простейшей *моделью гармонического колебания* является колебание проекции x конца радиуса-вектора r точки, движущейся по окружности радиусом A с постоянной угловой скоростью ω_0. Такое представление гармонических колебаний называют *векторной диаграммой*.



Угол поворота изменяется по закону равномерного вращения: $\varphi = w_0 t + a$. Проекция же конца радиуса-вектора точки изменяется по закону

$$x = A\cos(w_0 t + \alpha).$$

Если некоторая материальная точка совершает гармоническое колебательное движение около положения равновесия вдоль некоторой оси *x* (гармонический осциллятор), то ее координата меняется по закону:

$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где *x* –*смещение из положения равновесия, A – амплитуда колебаний,* φ_0- начальная фаза, ω- циклическая частота.

Характеристики колебательного движения

1. Амплитуда

2. Период

3. Частота

Период колебаний - (T) наименьший промежуток времени, через который повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебательное движение. Период измеряется в секундах.

Частота периодических колебаний – число полных колебаний, совершаемых в единицу времени. Частота колебаний измеряется в герцах.

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Если за какое-то время t система совершает n колебаний, то $T = t/n$

Амплитуда - Наибольшее (по модулю) отклонение колеблющегося тела от положения равновесия

Циклическая (круговая частота) – число колебаний за 2π секунд

$$\omega = 2\pi\nu$$

Механические гармонические колебания

Гармонические колебания – простейшие периодические колебания, при которых координата тела меняется по закону синуса или косинуса

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \quad \text{или} \quad x = A\cos(\omega t + \varphi_0),$$

Если в начальный момент времени тело проходит положение равновесия, то колебания являются синусоидальными.

Рассмотрим прямолинейные гармонические колебания материальной точки вдоль оси x около положения равновесия, совпадающего с началом координат $x = 0$.

Зависимость координаты x от времени t задается уравнением

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Кинематика колебаний

Циклическая частота связана с линейной частотой и периодом следующими соотношениями

$$\omega_0 = 2\pi \cdot \nu = \frac{2\pi}{T}$$

Скорость колеблющейся точки меняется по закону:

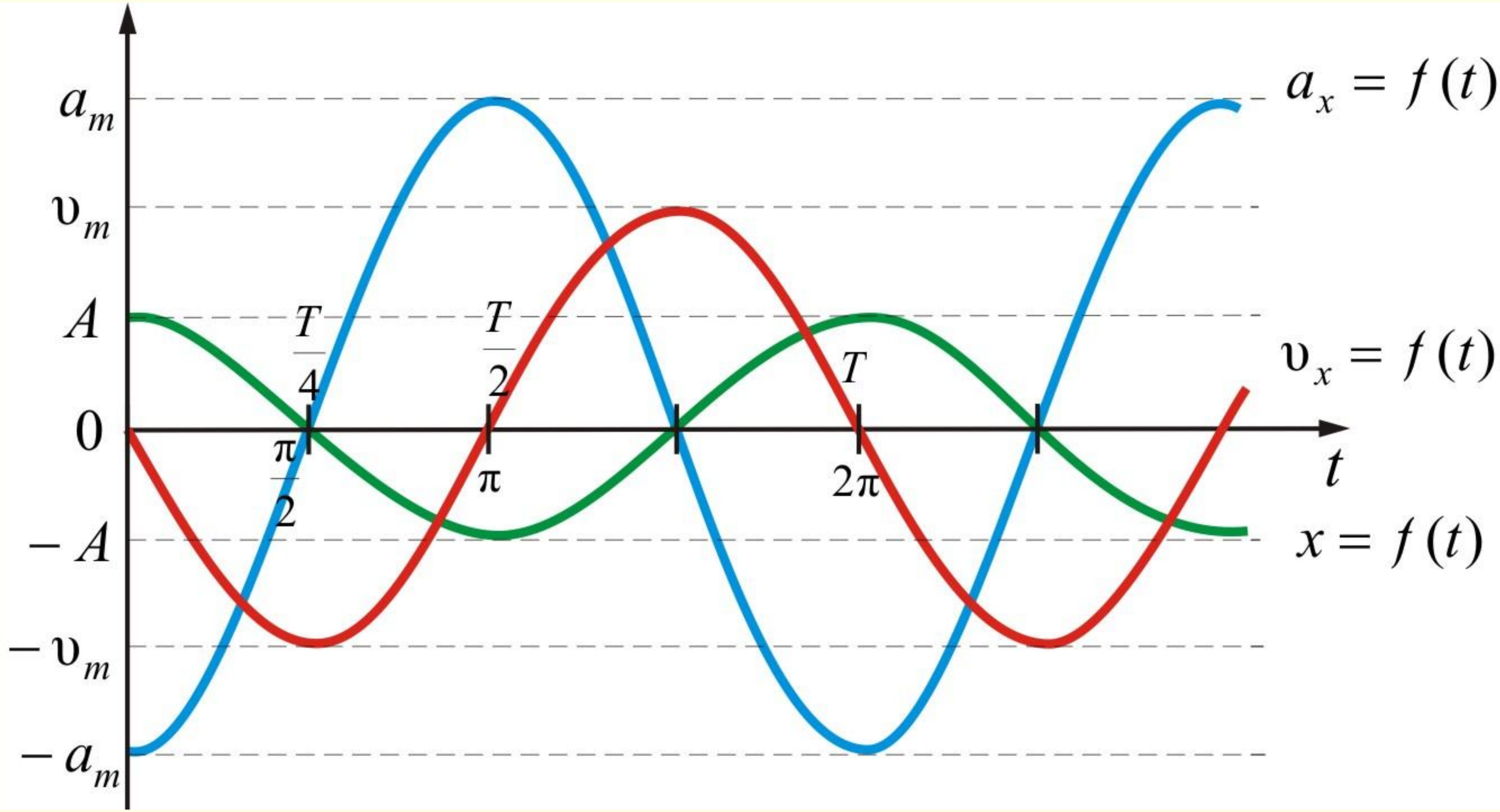
$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= A\omega \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)$$

Ускорение:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$



a_m
υ_m
A
0
$-A$
$-\upsilon_m$
$-a_m$
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$
T
$\frac{\pi}{2}$
π
2π
t
$a_x = f(t)$
$\upsilon_x = f(t)$
$x = f(t)$

Динамика колебаний

Сила, действующая на точку массой *m*:

$$F = ma = -m\omega^2 x$$

Сила, вызывающая колебания, обладает следующими свойствами

1. направления силы и смещения противоположны.

2. модуль силы пропорционален смещению материальной точки из положения равновесия;

Следовательно, сила всегда направлена к положению равновесия.

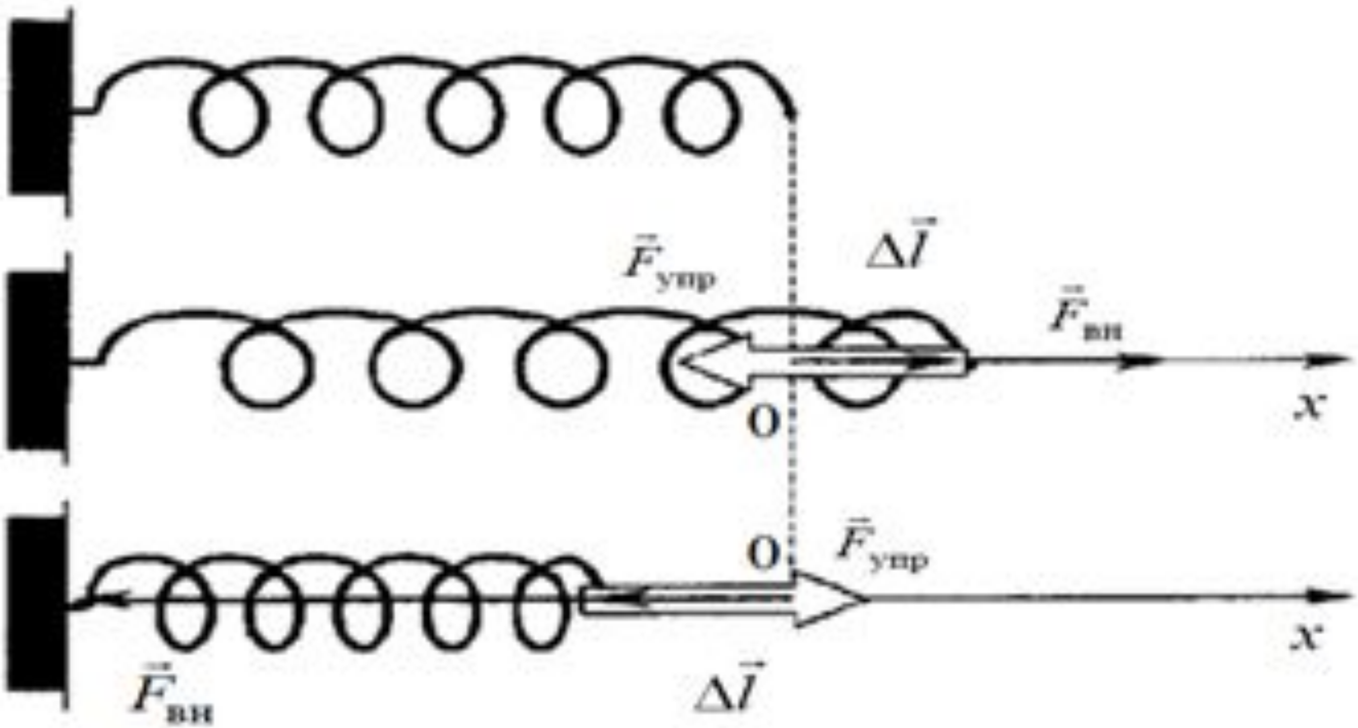
Такие силы называют ***возвращающими***.

Зависимость $F = ma = -m\omega^2 x$ характерна для ***упругой*** силы. F = -kx

Силы другой физической природы, удовлетворяющие тому же виду зависимости, называют ***квазиупругими***. Например, сила тяжести.

Сила упругости-

Сила, возникающая при деформации тела и направленная противоположно направлению смещения частиц при деформации.



ЭНЕРГИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания:

$$E_к = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\sin^2(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left(1 - \cos 2(\omega t + \varphi_0)\right).$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы F:

$$E_p = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega^2 x^2}{2} =$$

$$= \frac{m\omega^2 A^2}{2}\cos^2(\omega t + \varphi_0) =$$

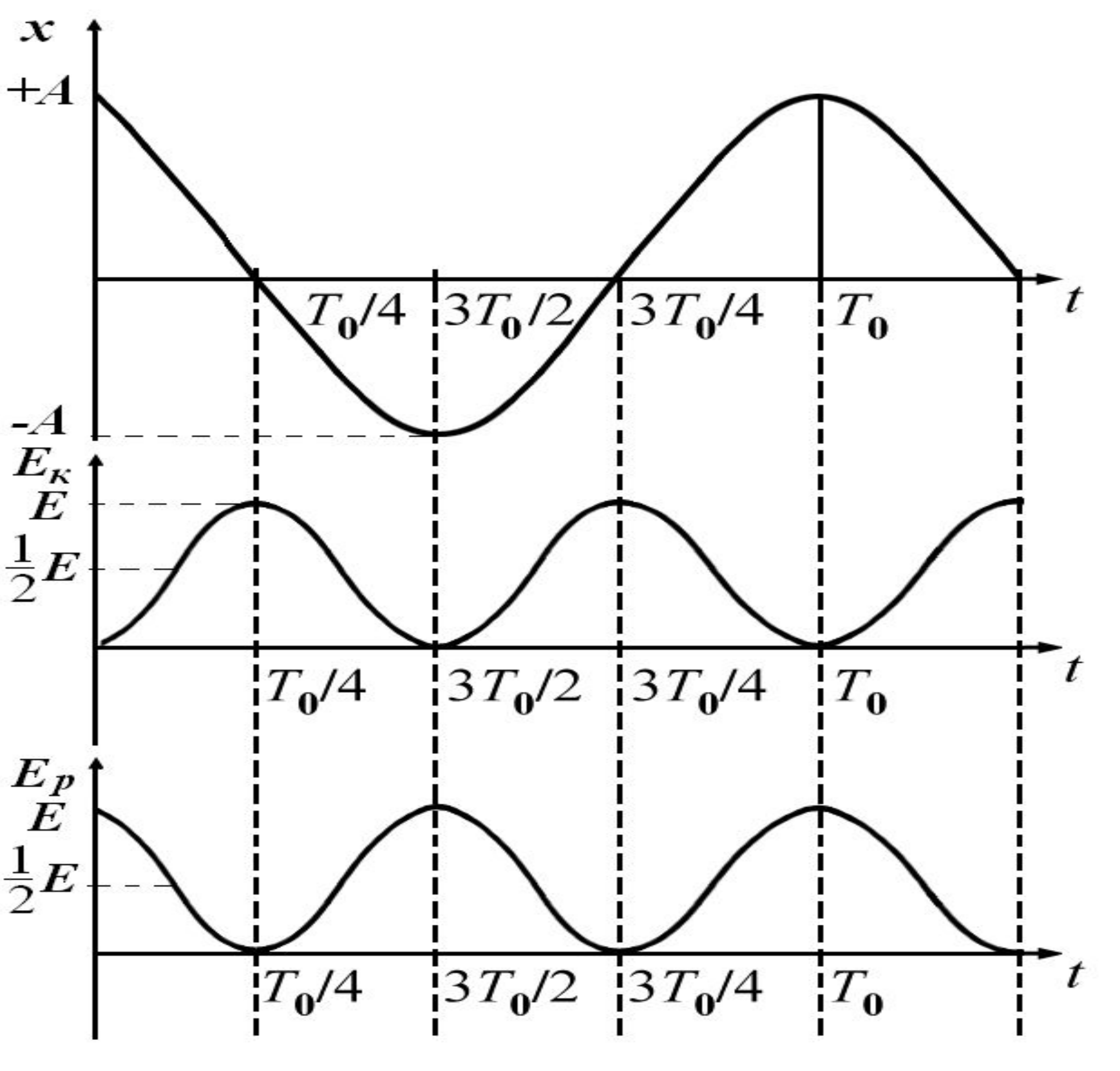
$$= \frac{m\omega^2 A^2}{4}\left(1 + \cos 2(\omega t + \varphi_0)\right).$$

Полная энергия:

$$E = E_к + E_p = \frac{m\omega^2 A^2}{2} =$$

$$= \frac{k\ A^2}{2} = const,$$

где $k = m\omega^2.$


x
+A
-A
t
T0/4
3T0/2
3T0/4
T0
Eк
E
1/2 E
Ep

Гармонический осциллятор

Осциллятор – система, совершающая свободные колебания.

Свободные (собственные) колебания совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешнего воздействия на колебательную систему.

Классический осциллятор – механическая система, совершающая колебания около положения устойчивого равновесия (например, пружинный маятник).

Дифференциальное уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Решение этого уравнения:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Здесь x – колеблющаяся величина.

Маятники

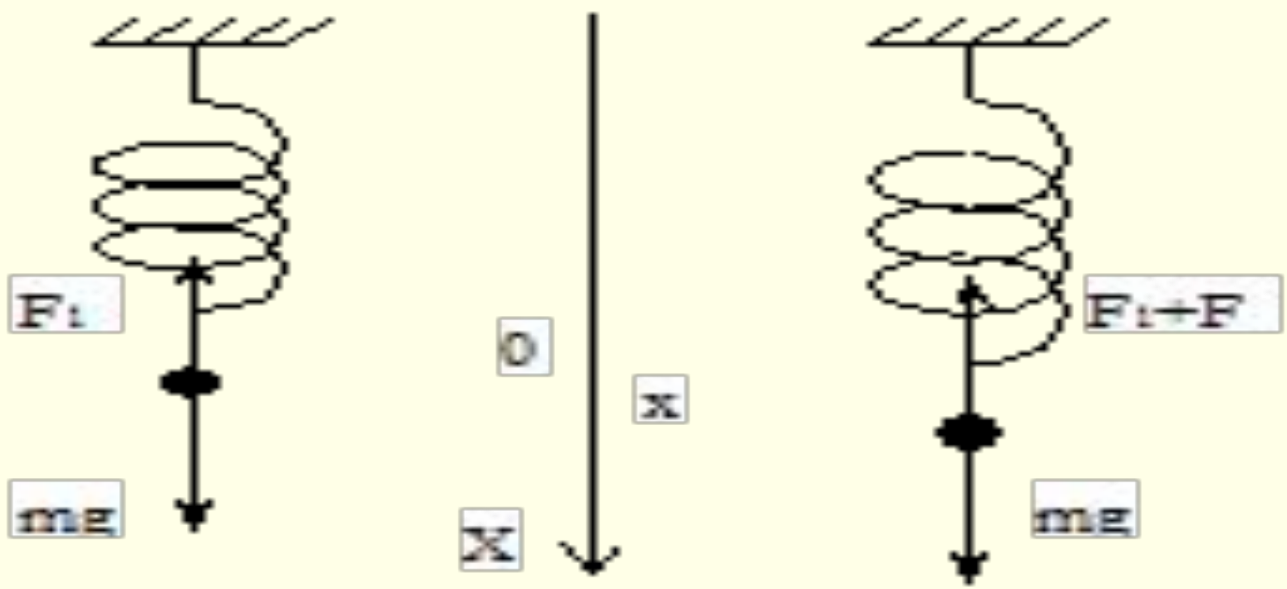
Маятник- тело, совершающее колебания относительно положения равновесия под действием приложенных к нему сил.

Пружинный маятник
физический маятник
математический маятник
оборотный маятник

Пружинный маятник

это закреплённый на пружине груз, способный совершать колебания в вертикальном или горизонтальном или направлении.
Трением пренебрегаем. Груз имеет массу m , жёсткость пружины равна k .
Координате $x=0$ отвечает положение равновесия, в котором пружина не деформирована..

Рассмотрим простейшую колебательную систему: шарик массой m подвешен на пружине жесткостью к. *В этом случае упругая сила* F_1 уравновешивает силу тяжести mg.



Изменение упругой силы по закону Гука пропорционально изменению длины пружины или смещению шарика x: F=-kx,(1)
где k — жесткость пружины. Знак "-" отражает то обстоятельство, что смещение и сила имеют противоположные направления.

Сила F обладает следующими свойствами: 1) она пропорциональна смещению шарика из положения равновесия; 2) она всегда направлена к положению равновесия.
В нашем примере сила по своей природе упругая

Уравнение второго закона Ньютона для шарика имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Введем обозначения $\frac{k}{m} = \omega_0^{\,2}$

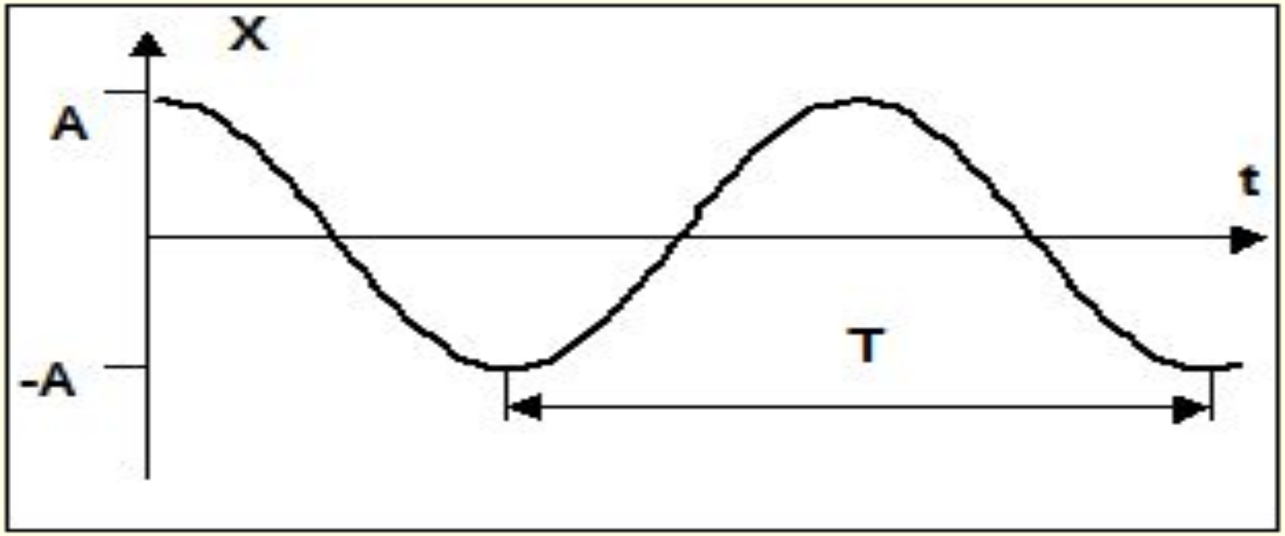
Тогда

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^{\,2}x = 0.}$$

Решение уравнения имеет вид $\boxed{x = A\cos(\omega_0 t + \alpha_0),}$

*

где (w_0 t + a_0) = a — фаза колебаний; a_0 — начальная фаза при t = 0; w_0 — круговая частота колебаний; А — их амплитуда.



$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Решив данное уравнение, получим, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону

$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$,

с циклической частотой $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

и периодом колебания $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Эти формулы справедливы для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука, т. е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела

В горизонтальном направлении на груз действует только сила упругости со стороны пружины. Второй закон Ньютона для груза в проекции на ось имеет вид: $ma_x = F_x$

Если груз смещен вправо то сила упругости направлена в противоположную сторону, и закон Гука можно записать так: $F_x = -kx$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

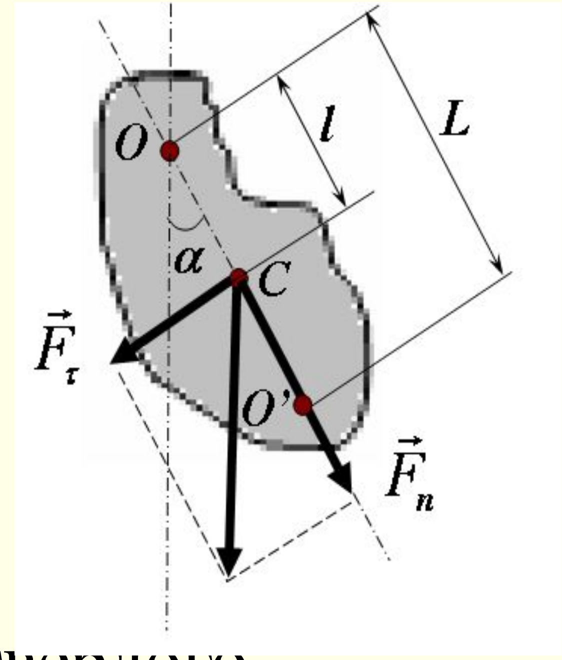
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

*

Физический маятник

Твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку О, не совпадающую с центром масс тела С. Точку О называют <u>точкой подвеса</u>.



Если маятник отклонен из

положения равновесия на

некоторый угол а, то в

соответствии с уравнением

динамики вращательного движения твердого тела момент M возвращающей силы можно записать в виде (1)

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = F_\tau l = -mgl\sin\alpha \approx -mgl\alpha$$

где J — момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса O, l – расстояние между ней и центром масс маятника

$F_t = –mg\sin a$ (знак минус обусловлен тем, что направления F_t и a всегда противоположны)

Уравнение (1) можно записать в виде

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0$$

или принимая

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

получим

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$$

решение которого : $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

При малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

где L=J/(ml) — приведенная длина физического маятника.

Точка O' на продолжении прямой OC, отстоящая от точки O подвеса маятника на расстоянии приведенной длины L, называется центром качаний физического маятника.

Приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

$$L = \frac{J}{ml},$$

J – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса.

Применяя теорему Штейнера, получим

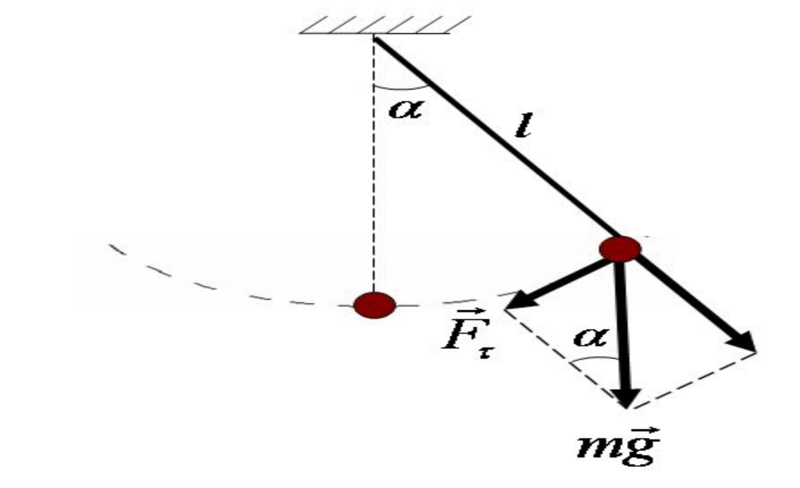
$$L = \frac{J}{ml} = \frac{J_C + ml^2}{ml} = l + \frac{J_C}{ml} > l$$

т. е. OO' всегда больше OC. Точка подвеса O маятника и центр качаний O' обладают свойством взаимозаменяемости: если точку подвеса перенести в центр качаний, то прежняя точка O подвеса станет новым центром качаний, и период колебаний физического маятника не изменится.

Математический маятник

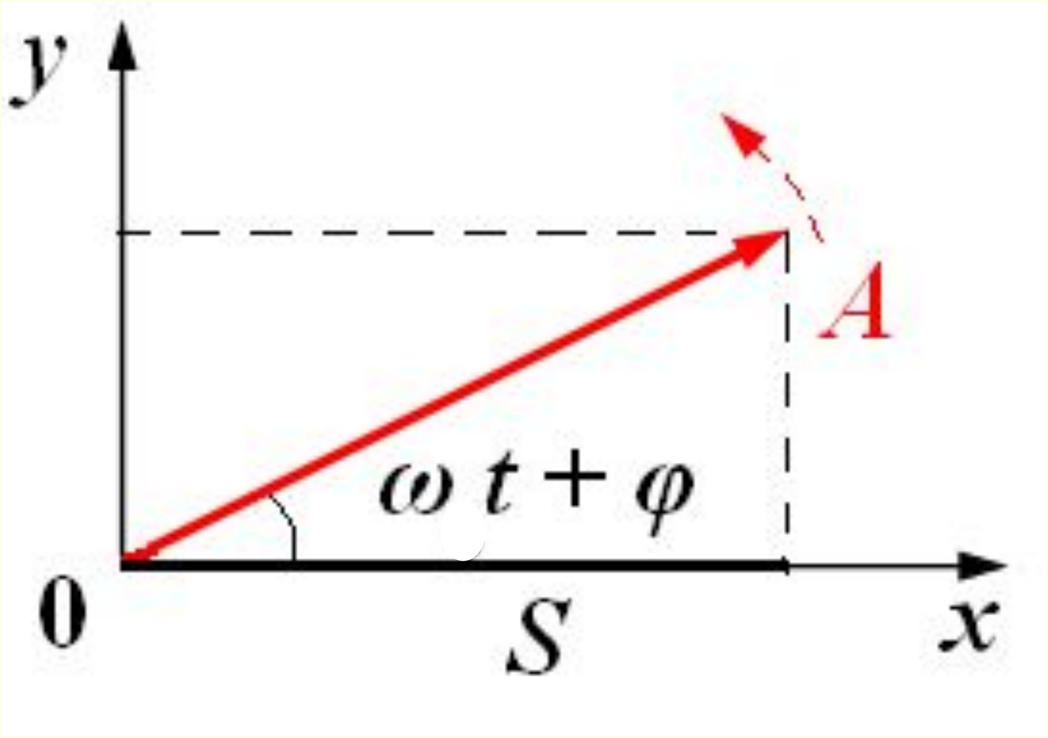
Идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нерастяжимой нити (масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой тела), и совершающей колебания под действием силы тяжести.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$



Сложение гармонических колебаний

Способ представления колебаний с помощью вращающегося вектора амплитуды

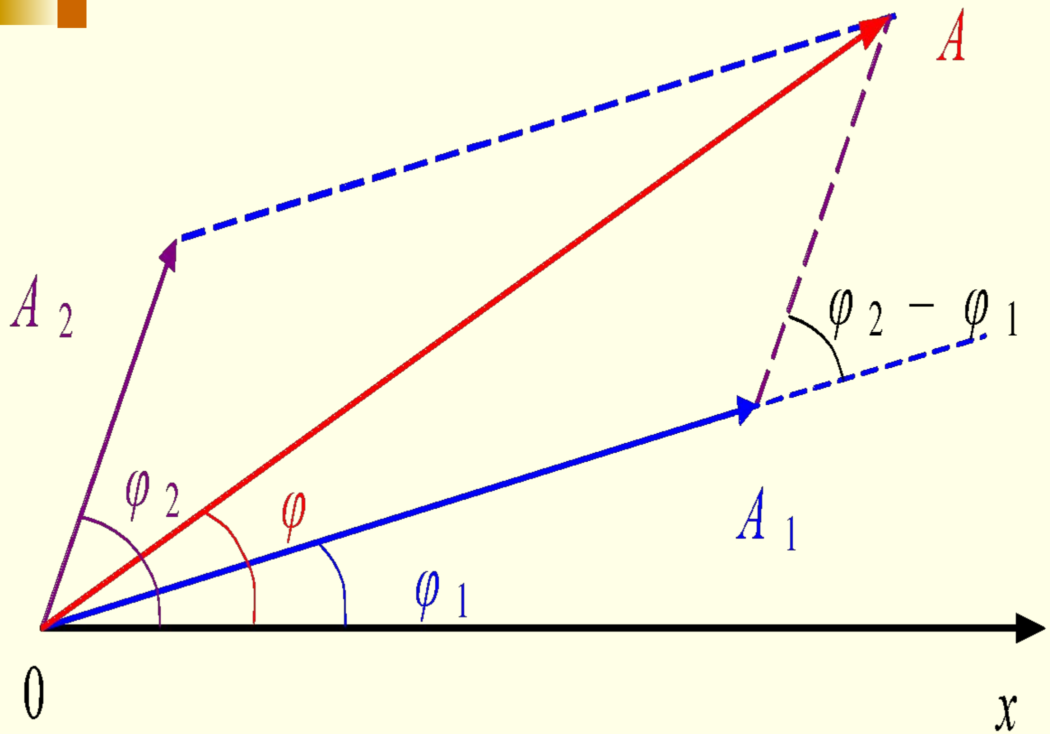


Сложение двух одинаково направленных колебаний

1. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\}$$

Разность фаз этих колебаний не зависит от времени t, т.е. $(\varphi_1 - \varphi_2) = const$, такие колебания называются ***когерентными***



Для нахождения результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi),\quad где$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}.$$

Если колебания ***синфазны***: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$, следовательно, $A = A_1 + A_2$, происходит усиление результирующего колебания.

Если колебания в ***противофазе***: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$, следовательно, $A = |A_1 - A_2|$, происходит ослабление результирующего колебания.

- ***Некогерентные колебания***: $\omega_1 \neq \omega_2$, т.е. разность фаз колебаний $(\omega_1 + \varphi_1 - \omega_2 - \varphi_2) \neq const$ и изменяется с течением времени t.

  При наложении таких колебаний получаются ***негармоническое*** результирующее колебание.

2. Сложение гармонических колебаний одного направления с частотами неравными, но близкими - биения

Если амплитуды двух гармонических колебаний, направленных вдоль одной прямой, одинаковы $A_1 = A_2 = A$, а их частоты мало отличаются друг от друга $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 << \omega_1$, то результирующее сложение этих колебаний получается с периодически изменяющейся амплитудой $A_б$.

Уравнения колебаний имеют вид :

$$\begin{cases} x_1 = A\cos\omega t, \\ x_2 = A\cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{cases}$$

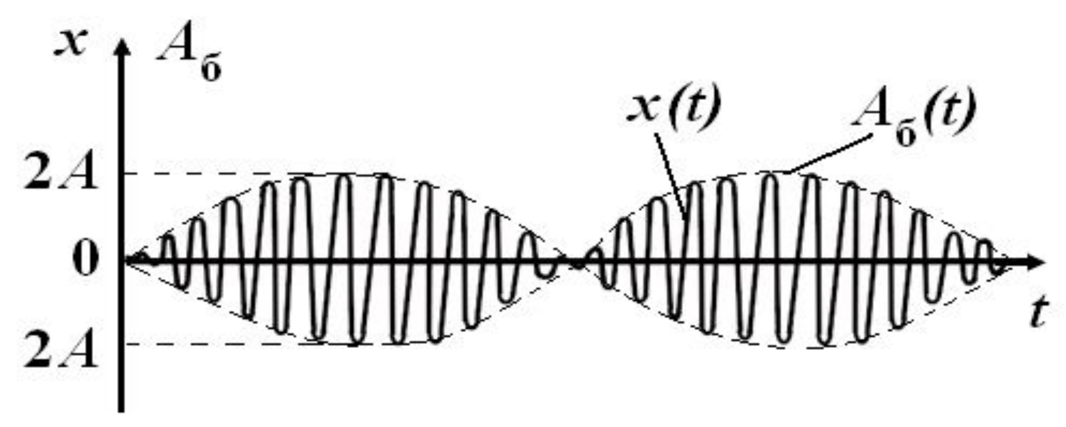
Периодические изменения амплитуды от минимального значения до максимального называются ***биениями***.

Уравнение результирующего колебания

$$x = x_1 + x_2 = A\left(\cos\omega t + \cos(\omega + \Delta\omega)t\right) =$$

$$= 2A\cos\left(\frac{2\omega}{2}t + \underbrace{\frac{\Delta\omega}{2}}_{<<\omega}t\right)\cdot\cos\left(-\frac{\Delta\omega}{2}t\right) =$$

$$= \underbrace{2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t}_{A_б}\cdot\cos\omega t.$$



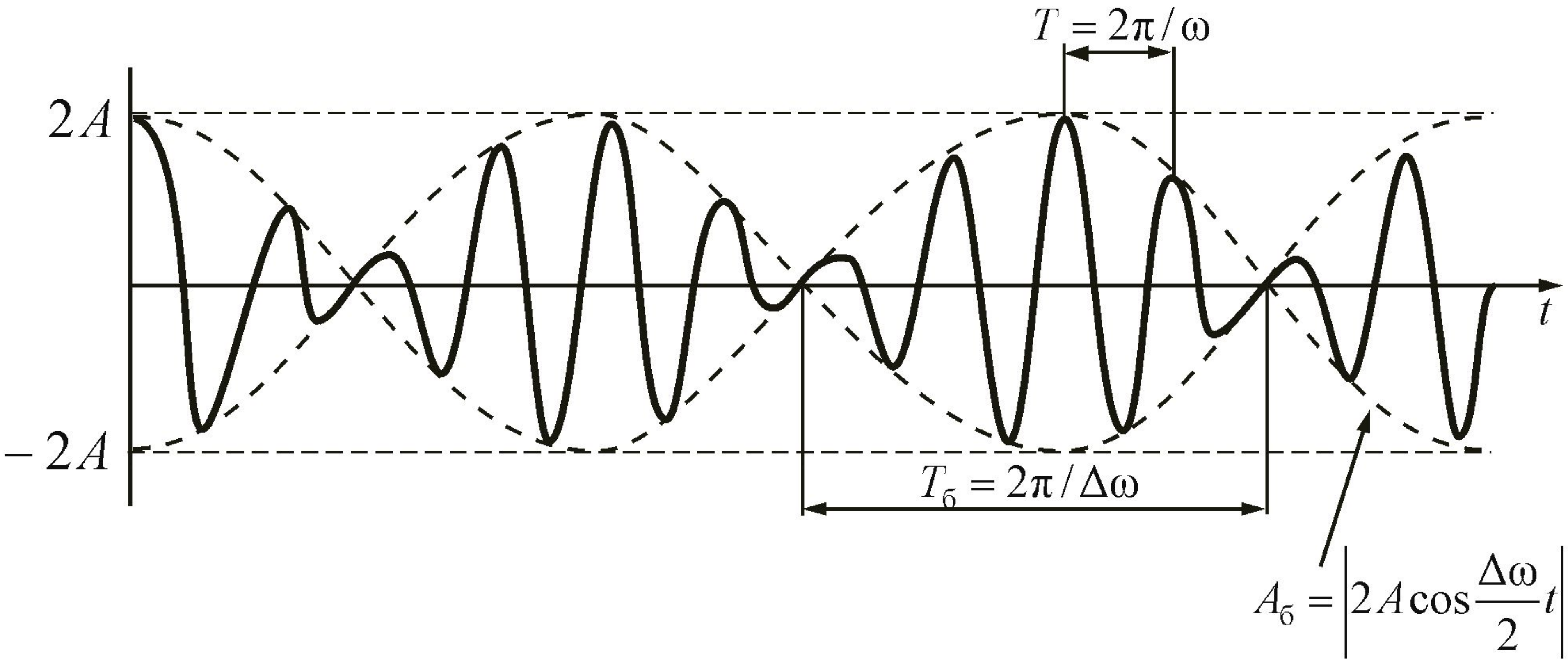
*

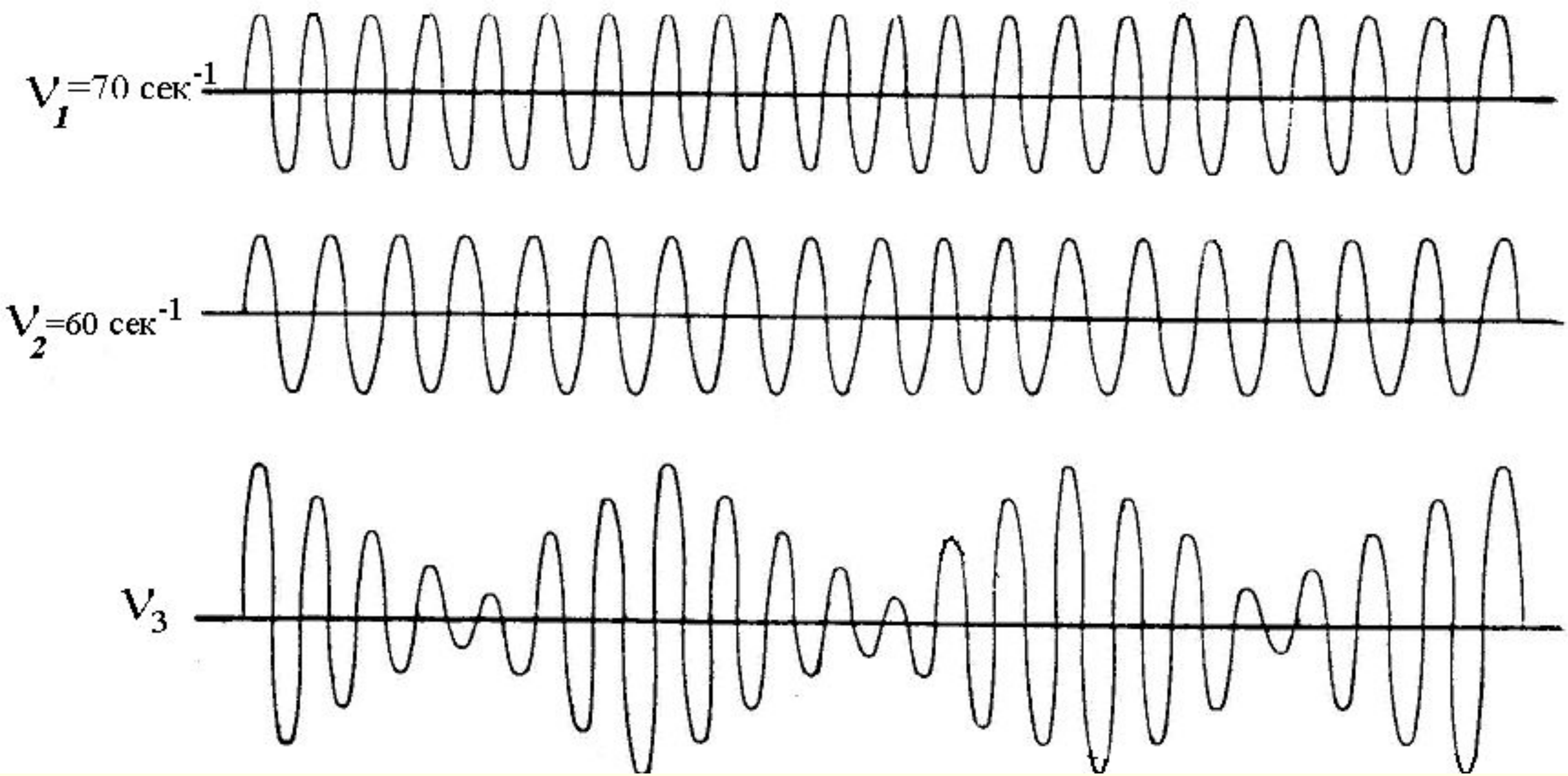
Результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с частотой ω, амплитуда $A_б$ которого изменяется по периодическому закону:

$$A_б = \left| 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \right|.$$

Частота изменения $A_б$ в два раза больше частоты изменения косинуса (т.к. берется по модулю), т.е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний: $$\omega_б = \Delta\omega.$$

Период биений $$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$


$T = 2\pi/\omega$
$2A$
$-2A$
t
$T_б = 2\pi/\Delta\omega$
$A_б = \left|2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$



ν1=70 сек-1
ν2=60 сек-1
ν3

✔***Гармонические колебания*** совпадают по направлению и имеют *кратные циклические частоты* ω, 2ω, 3ω и т. д. В результате их сложения получаются периодические негармонические колебания с периодом $T = 2\pi / \omega$.

В свою очередь, любое сложное периодическое колебание $S = f(t)$ можно представить в виде суммы простых гармонических колебаний с циклическими частотами, кратными *основной* циклической частоте $\omega_0 = 2\pi / T$, где T – период колебаний:

$$S = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2\cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \ldots + A_n\cos(n\omega_0 t + \varphi_n) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\omega_0 t + \varphi_n),$$

Такое представление периодической функции $f(t)$ называется ***разложением функции в ряд Фурье*** или гармоническим анализом сложного периодического колебания.

Члены ряда Фурье, соответствующие гармоническим колебаниям с циклическими частотами ω_0, $2\omega_0$, $3\omega_0$ … называются *первой (основной), второй, третьей* и т.д. *гармониками* сложного периодического колебания $S = f(t)$.

Совокупность этих гармоник образуют *спектр колебаний* $S = f(t)$.

В простейших случаях спектр может состоять из небольшого числа гармоник.

Часто под спектром колебаний понимают спектр (совокупность) его частот.

3. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

✔Сложение колебаний с одинаковыми частотами ($\omega_1 : \omega_2 = 1:1$)

Пусть точка одновременно движется вдоль осей *x* и *y*:

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

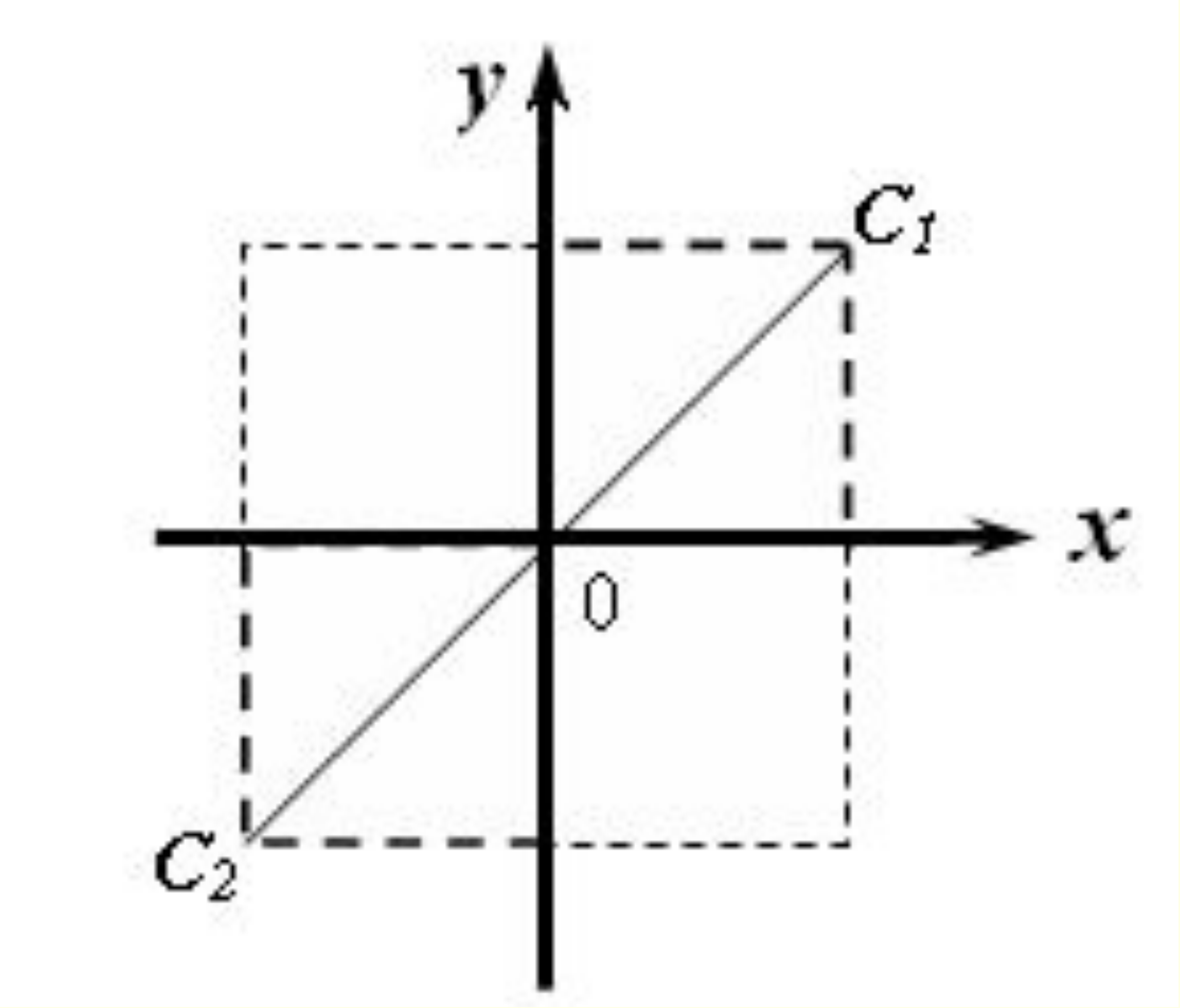
$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).}$$

Рассмотрим несколько частных случаев:

1) Фазы колебаний равны.

$$x = A_1 \sin \omega t;$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

$$\frac{x}{y} = \frac{A_1}{A_2} \quad \text{или} \quad y = \frac{A_2}{A_1} x$$

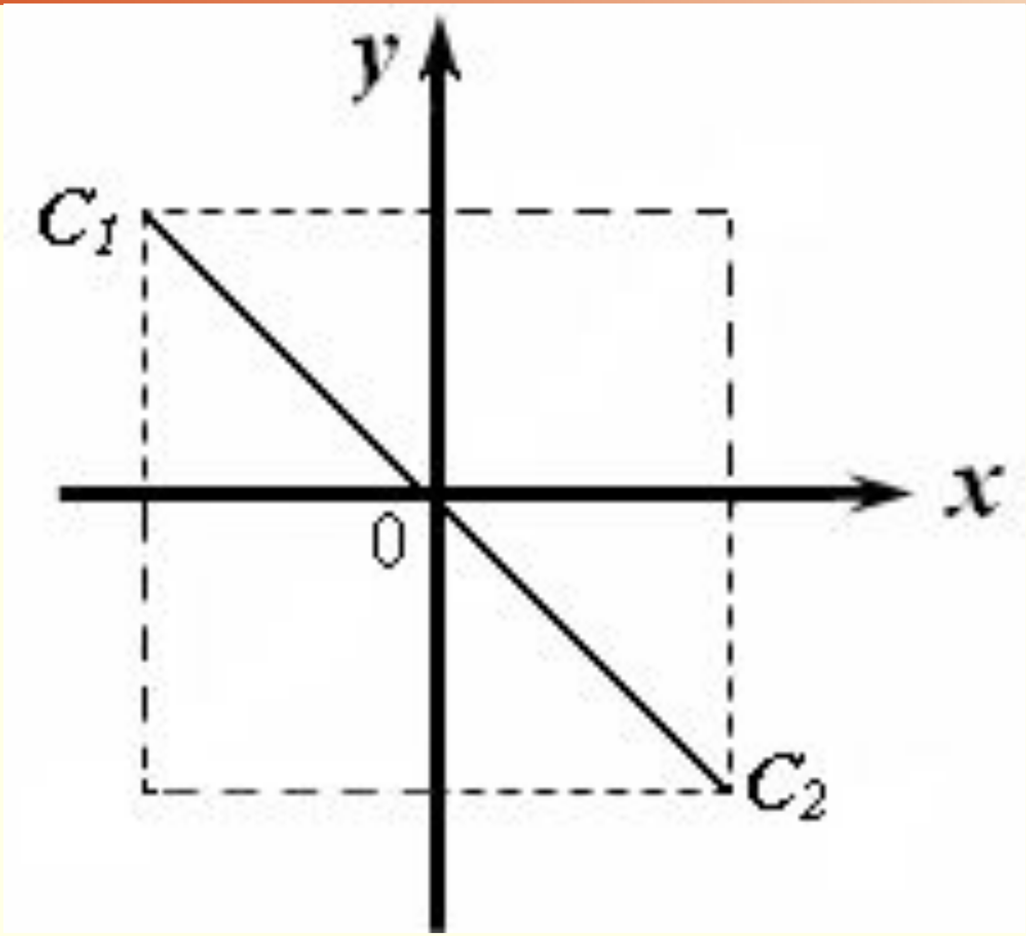


Такие колебания называют ***линейно-поляризованными.***

2) Разность фаз равна π.

$$x = A_1 \sin(\omega t + \pi) = -A_1 \sin \omega t;$$
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

$$\frac{x}{y} = -\frac{A_1}{A_2}$$ или $$y = -\frac{A_2}{A_1} x$$



В обоих случаях амплитуда результирующего колебания равна:

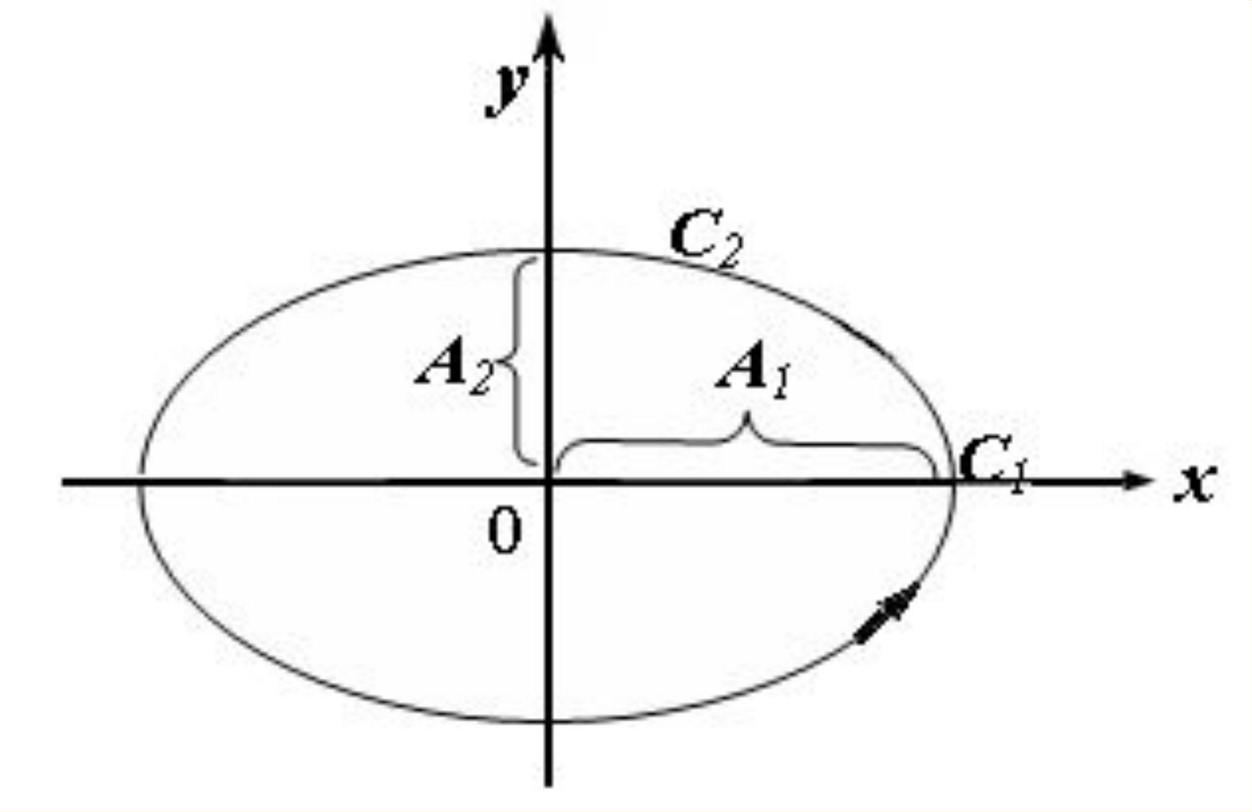
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

3) Разность фаз равна π/2.

$$x = A_1 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A_1 \cos \omega t;$$

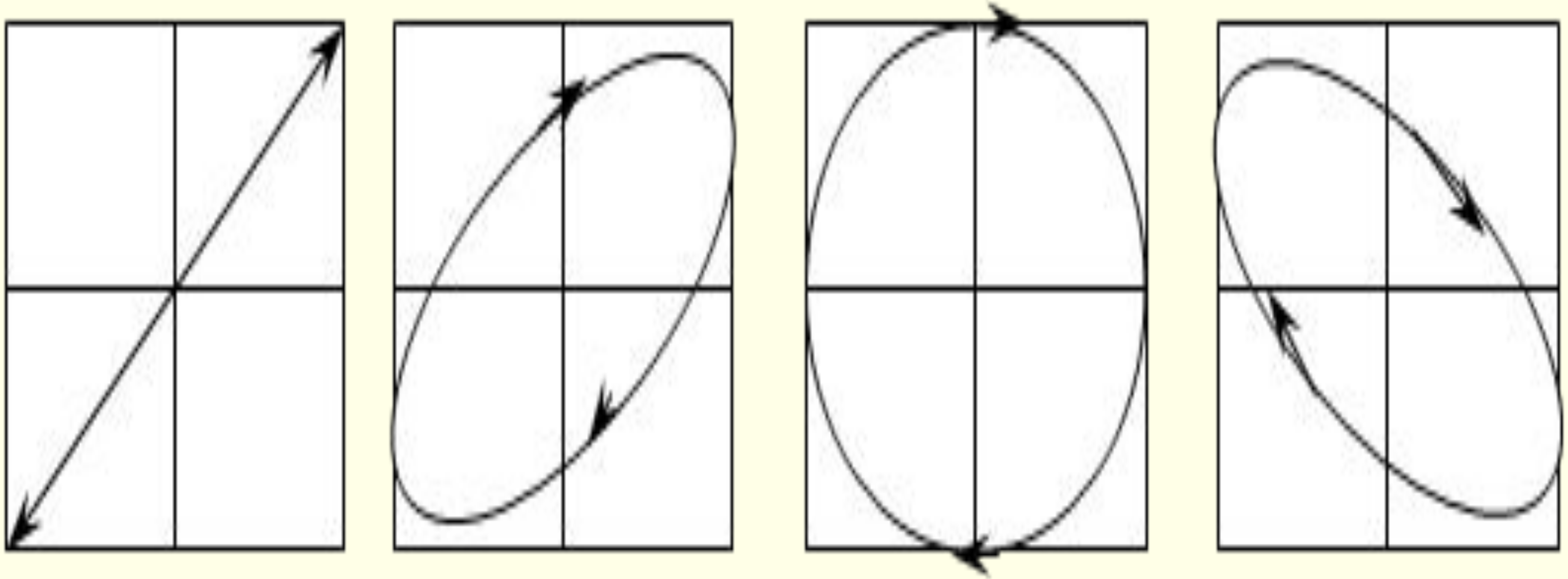
$$y = A_2 \sin \omega t.$$

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t; \qquad \frac{y}{A_2} = \sin \omega t.$$



$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

Такие колебания называют ***эллиптически поляризованными.***



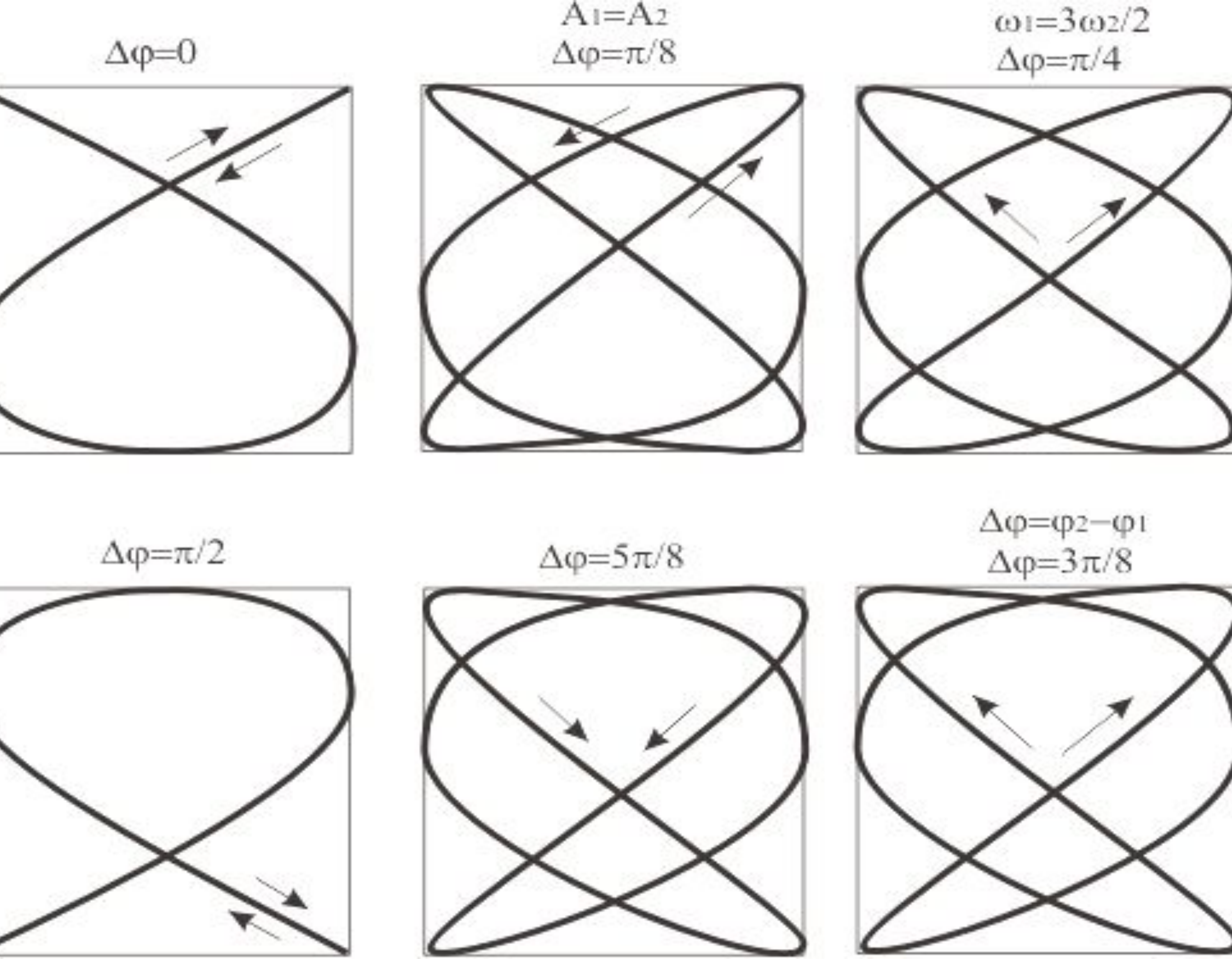
$\Delta\alpha=0$ $0<\Delta\alpha<\pi/2$ $\Delta\alpha=\pi/2$ $\pi/2<\Delta\alpha<\pi$

✔*Сложение колебаний с разными частотами*

Если частоты складываемых колебаний относятся друг к другу как целые числа, то траектория результирующего движения оказывается замкнутой, а само движение – периодическим.

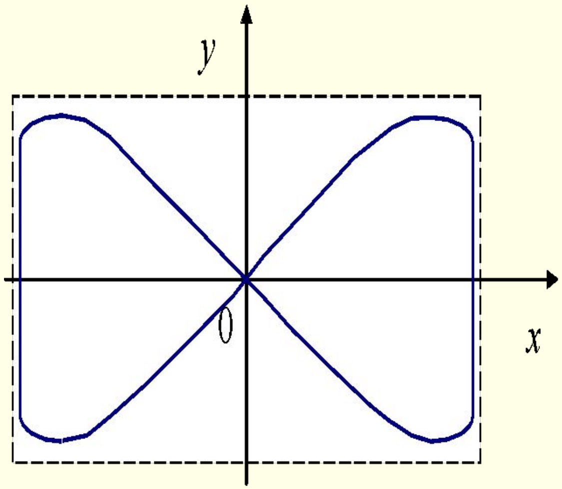
Прочерчиваемые точкой замкнутые траектории, образующиеся при целочисленных отношениях частот складываемых взаимно-перпендикулярных колебаний называют ***фигурами Лиссажу***.

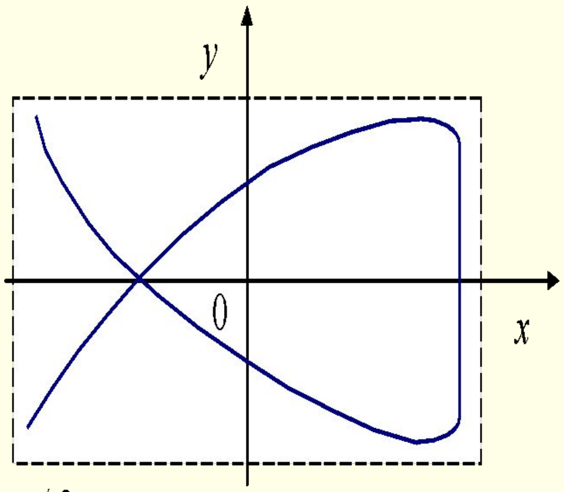
Вид фигур Лиссажу зависит от соотношения амплитуд, частот и начальных фаз складываемых колебаний.



$\Delta\varphi=0$
$A_1=A_2$
$\Delta\varphi=\pi/8$
$\omega_1=3\omega_2/2$
$\Delta\varphi=\pi/4$
$\Delta\varphi=\pi/2$
$\Delta\varphi=5\pi/8$
$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$
$\Delta\varphi=3\pi/8$

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению числа пересечений фигуры Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат.



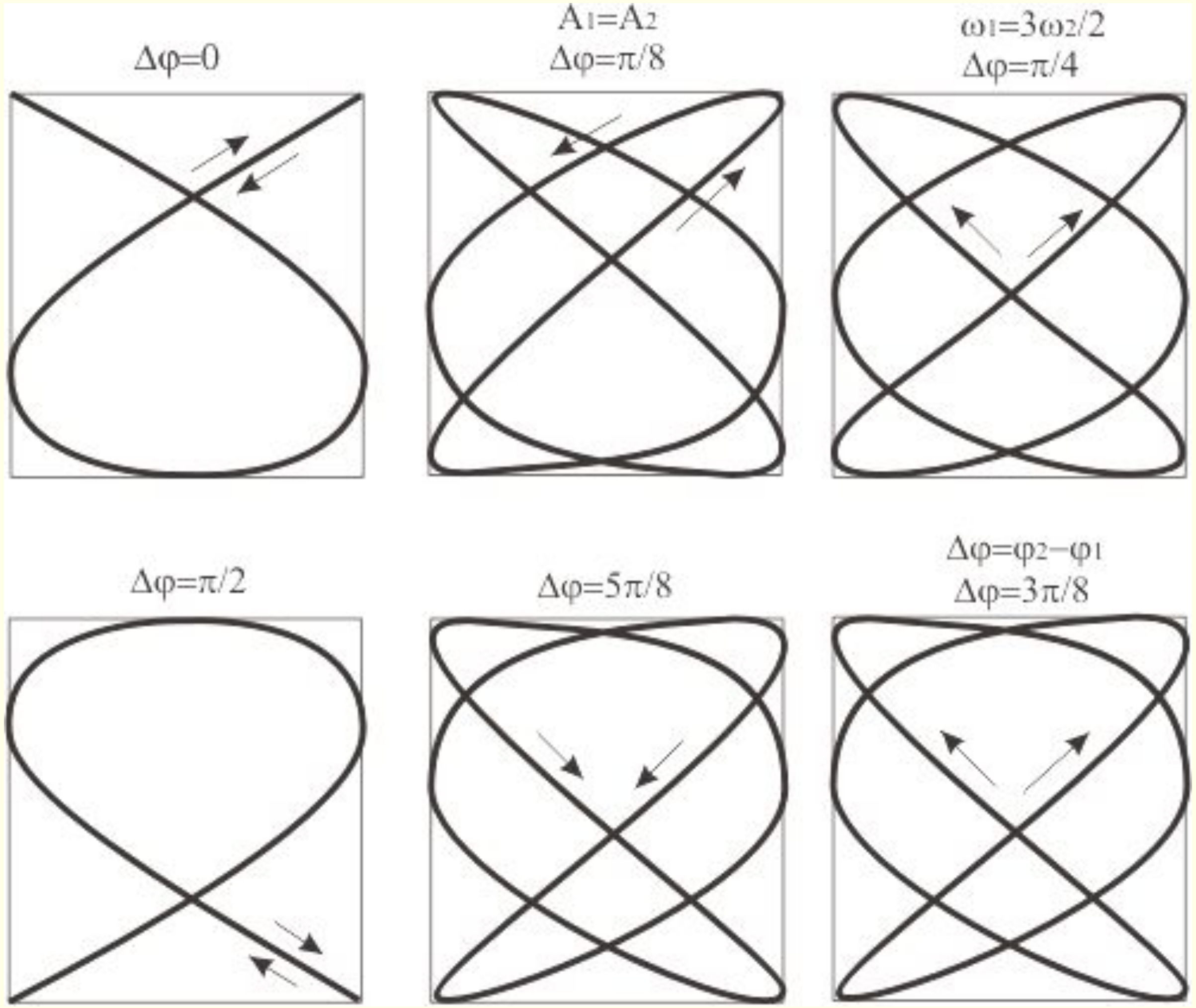


$$\varphi_1 - \varphi_2 = \pi / 2$$

$p / k = 1 / 2$ $\qquad$ $p / k = 2 / 3$

По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной, или определить отношение частот складываемых колебаний.

Фигуры Лиссажу при $\omega_1 \neq \omega_2$



Затухающие колебания

Затухающие колебания – колебания, амплитуда которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшается.

Свободные колебания реальной системы всегда затухают. Причиной затухания механических колебаний является трение, электрических колебаний – тепловые потери в проводниках.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем.

Обычно рассматриваются **линейные системы** – идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы:

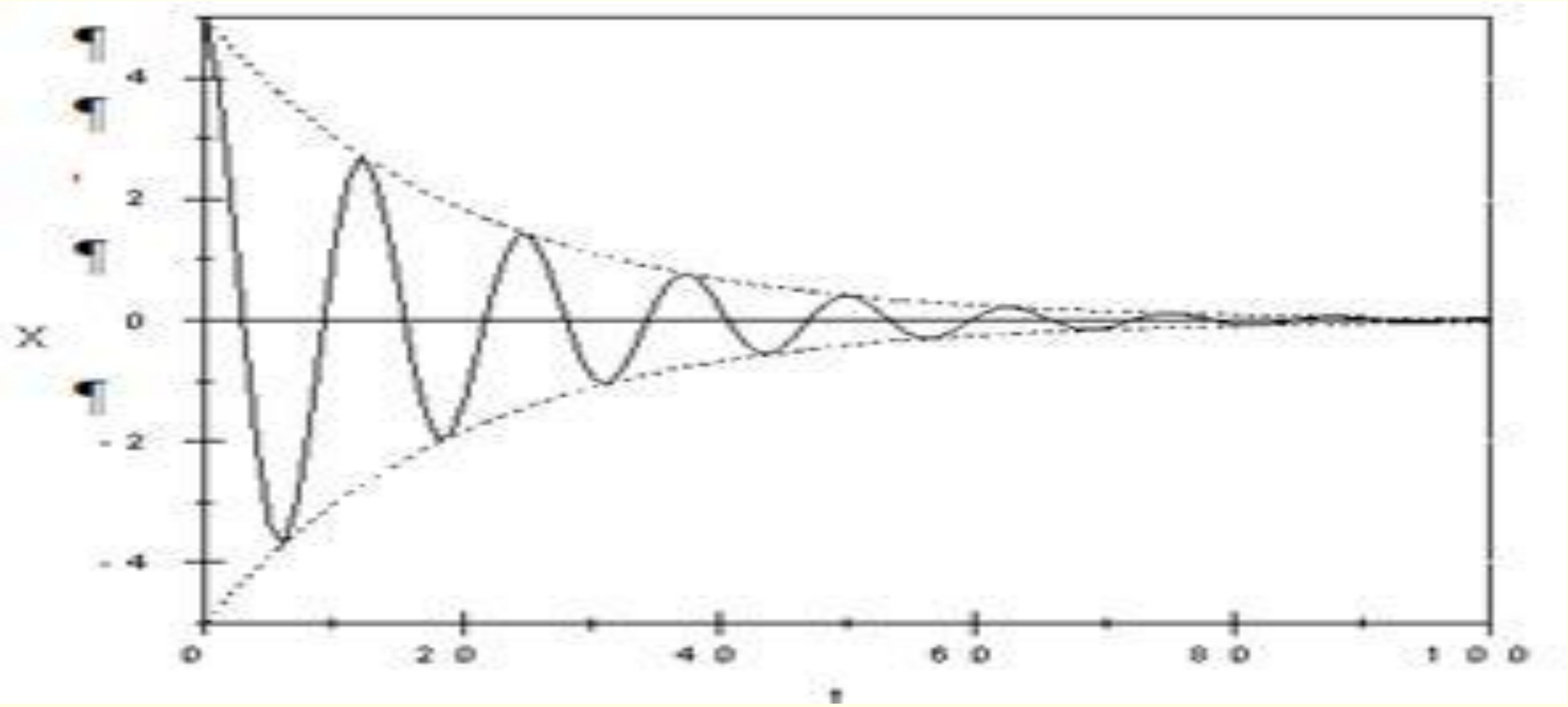
$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$

x – колеблющаяся величина,
β = const – коэффициент затухания,
ω_0 – собственная циклическая частота колебательной системы (т.е. в отсутствие потерь энергии, β = 0).

Решение уравнения в виде

$$x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\alpha_0).$$

График этой функции дан на рисунке.



$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

Для пружинного маятника массой ***m***, совершающего малые колебания под действием упругой силы, сила трения пропорциональна скорости:

$$F_{тр} = -r\upsilon = -r\dot{x},$$

r- коэффициент сопротивления.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Амплитуда затухающих колебаний:

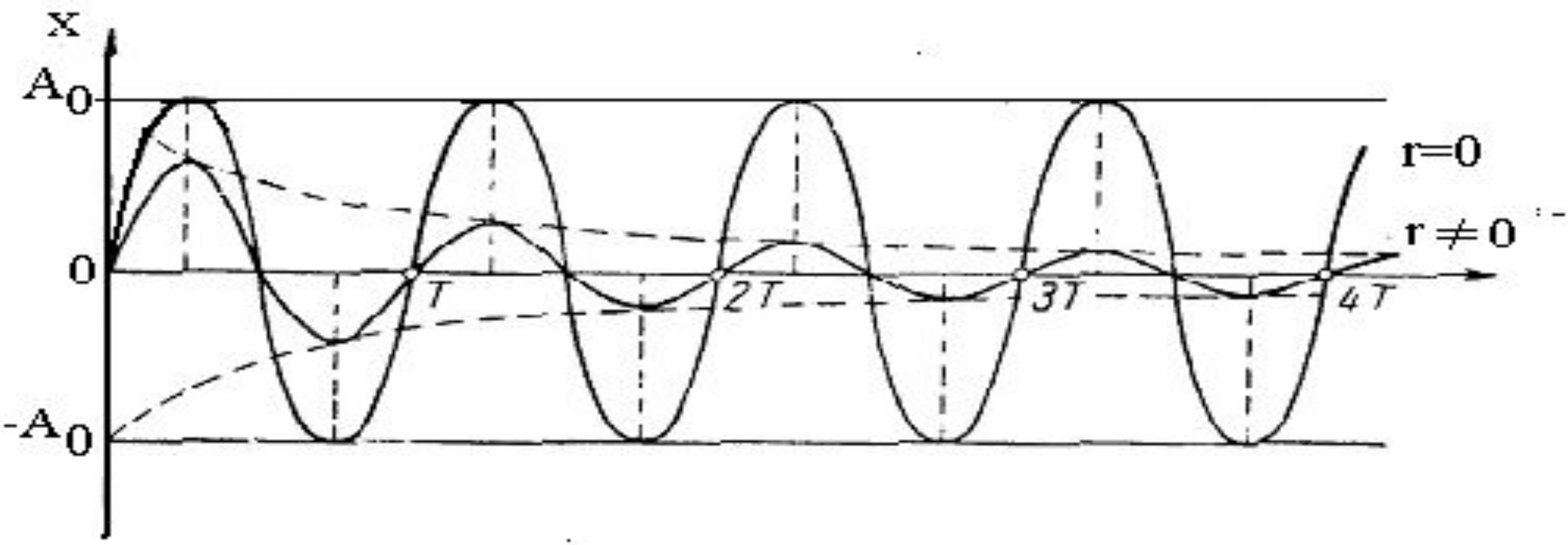
$$A_1 = A_0 e^{-\beta t}, \qquad A_2 = A_0 e^{-\beta (t+T)}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta (t+T)}} = \frac{1}{e^{-\beta T}} = e^{\beta T}$$

Это отношение называют **декрементом затухания** . В качестве меры затухания часто берут величину натурального логарифма

$$\ln \frac{A_1}{A_2} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \lambda, \qquad \lambda = \beta T$$

Затухающее колебание не является периодическим, и тем более гармоническим.



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

Вынужденные колебания

Вынужденные колебания – незатухающие колебания, возникающие под действием периодической силы, изменяющейся по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t$$

Для механических колебаний роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила

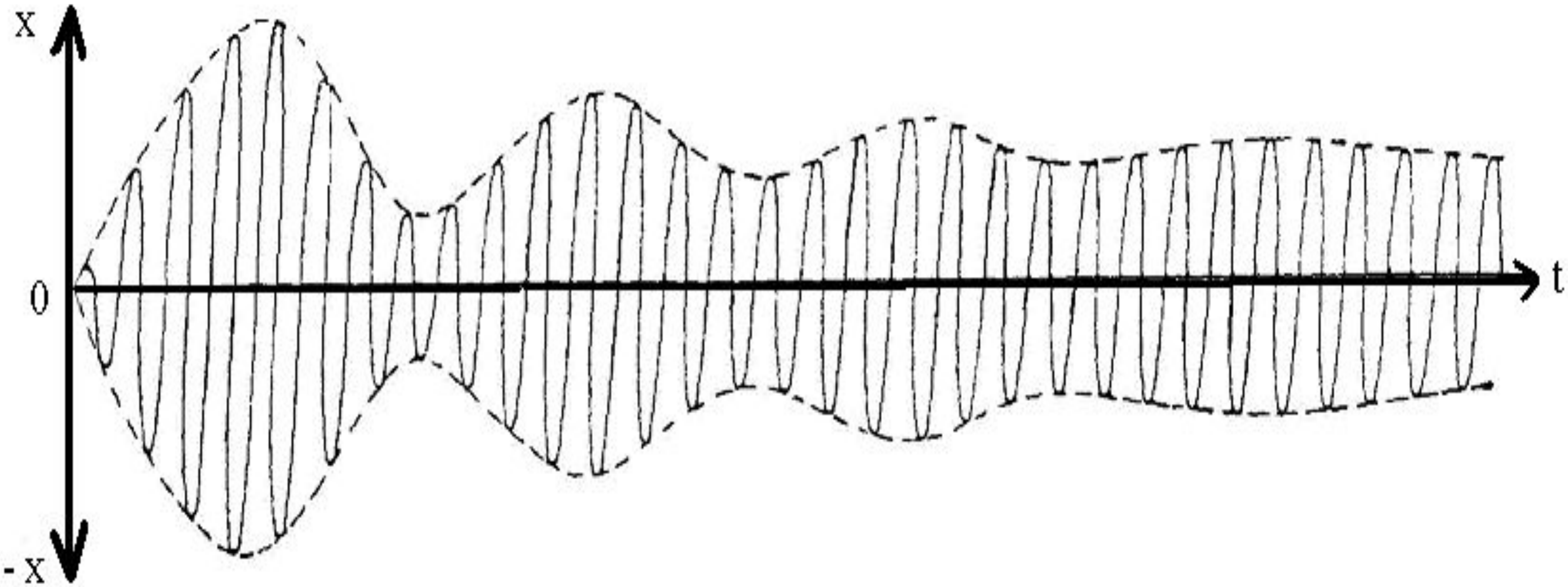
$$F = F_0 \cos \omega t$$

Для простейшего пружинного маятника, на который действует внешняя сила Дифференциальное уравнение вынужденных **колебаний** маятника:

:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\Omega t$$

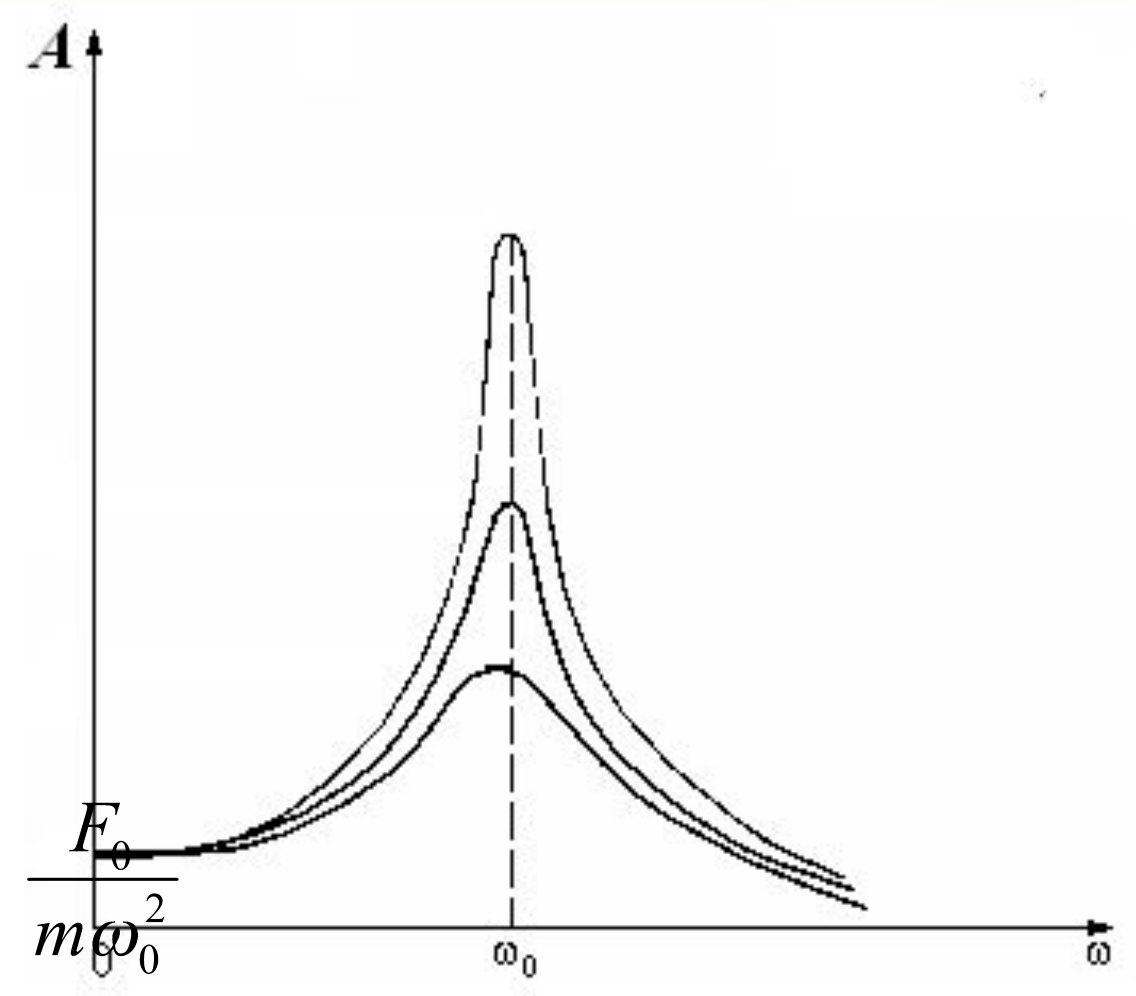
В установившемся режиме вынужденные колебания являются гармоническими, происходят с частотой внешней гармонической силы.



В случае установившихся колебаний при некоторой частоте внешней силы – ***резонансной частоте*** $\omega_{рез}$ – амплитуда смещения достигает максимального значения:

Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется ***механическим резонансом***.

$$A_{рез} \qquad \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$



$$\frac{F_0}{m\omega_0^2}$$