Учитель математики МОУ «Лицей №5»
г. Железногорска
Олейник Ольга Владимировна

«Решение задач с параметрами»

1) Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2a^2 - x^2 - 3a + 8x = (3a-3)\sqrt{16-(x-4)^2}$ имеет ровно два различных действительных корня

2) Найдите все a, при каждом из которых уравнение $2cos2x + 2asinx + a - 1 = 0$ имеет наибольшее количество решений на отрезке $\left[-\pi; \frac{17\pi}{6}\right]$. Чему равно это количество?

3) Найдите все a, при каждом из которых уравнение $log_{3a+2}(cos^2x - a^2cosx + a^2) = 0$ имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3};\ 2\pi\right]$

4) Для каждого допустимого значения a решите неравенство: $log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \le log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$2a^2 - x^2 - 3a + 8x = (3a - 3)\sqrt{16 - (x-4)^2}$$

имеет ровно два различных действительных корня

Область определения уравнения: $16 - (x-4)^2 \geq 0$

$$(x-8)x \leq 0\,; \qquad x \in [0;8]$$

$$16 - (x^2 - 8x + 16) + 2a^2 - 3a = (3a-3)\sqrt{16-(x-4)^2}$$
$$16 - (x-4)^2 + 2a^2 - 3a = (3a-3)\sqrt{16-(x-4)^2}$$

Пусть $\sqrt{16-(x-4)^2} = t$

$$0 \leq t \leq 4$$
$$t^2 - (3a-3)t + 2a^2 - 3a = 0 \ (*)$$

Если t = 4, то $(x-4)^2 = 0$, уравнение имеет одно решение

Если уравнение (*) имеет два различных корня, принадлежащих промежутку $[0;\ 4)$, то заданное уравнение будет иметь 4 различных корня.

Заданное уравнение имеет два различных действительных корня, если уравнение (*) имеет:
а) два равных корня из промежутка $[0;\ 4)$;
б) два корня, один из которых принадлежит, а другой не принадлежит промежутку $[0;\ 4)$

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение
$$2a^2 - x^2 - 3a + 8x = (3a-3)\sqrt{16-(x-4)^2}$$
имеет ровно два различных действительных корня

$$t^2 - (3a-3)t + 2a^2 - 3a = 0 \ (*)$$

а) $D = (3a-3)^2 - 4\cdot(2a^2-3a) = a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$

$(a-3)^2 = 0$

$a = 3;\qquad t^2 - 6t + 9 = 0$

$t = 3\,;\qquad 3 \in [0;\ 4)$

б) $t_{1;2} = \frac{3a-3\pm\sqrt{(a-3)^2}}{2} = \frac{3a-3\pm|a-3|}{2} = \frac{3a-3\pm(a-3)}{2}$

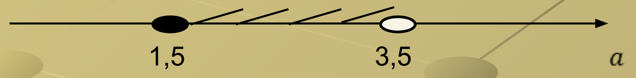
$t_1 = \frac{3a-3+a-3}{2} = 2a-3$

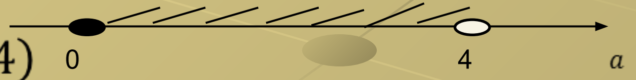
$t_2 = \frac{3a-3-a+3}{2} = a$

1) $0 \le 2a-3 < 4$

$1{,}5 \le a < 3{,}5$

2) $0 \le a < 4$



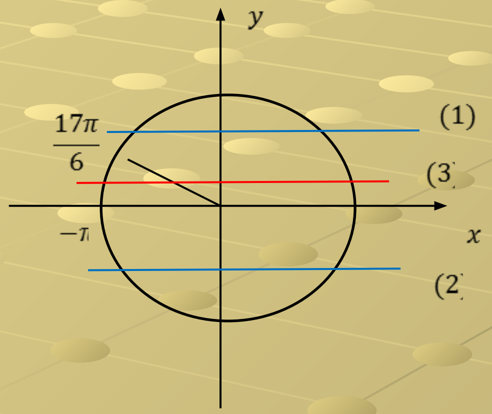


условие выполняется при $a \in [0;\ 1{,}5) \cup (3{,}5; 4)$

Ответ: при $a \in [0;\ 1{,}5) \cup \{3\} \cup (3{,}5; 4)$ уравнение имеет ровно два действительных корня

Найдите все a, при каждом из которых уравнение $2cos2x + 2asinx + a - 1 = 0$ имеет наибольшее количество решений на отрезке $\left[-\pi; \frac{17\pi}{6}\right]$. Чему равно это количество?

$2cos2x + 2asinx + a - 1 = 0$



$2(1 - 2sin^2x) + 2asinx + a - 1 = 0$

$4sin^2x - 2asinx - (a + 1) = 0$

$\sin(-\pi) = 0;\ sin\frac{17\pi}{6} = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Пусть $sinx = t; -1 \leq t \leq 1$, тогда $4t^2 - 2at - (a + 1) = 0$ (*)

Рассмотрим, сколько решений имеет уравнение $sinx = t$ в зависимости от значений t:

1) При $t = \pm 1$ 2 решения

2) При $0 < t < \frac{1}{2}$ 3 решения

3) При $-1 < t \leq 0$ и $\frac{1}{2} \leq t < 1$ 4 решения

Таким образом, наибольшее количество решений 8 заданное уравнение будет иметь, если уравнение (*) будет иметь два различных корня, удовлетворяющих третьему условию

Найдите все a, при каждом из которых уравнение $2cos2x + 2asinx + a - 1 = 0$ имеет наибольшее количество решений на отрезке $\left[-\pi;\ \frac{17\pi}{6}\right]$. Чему равно это количество?

$$4t^2 - 2at - (a+1) = 0\ (*)$$

$D = a^2 + 4(a+1) = a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2$

$t_1 \neq t_2$ при $a \neq -2$ (**)

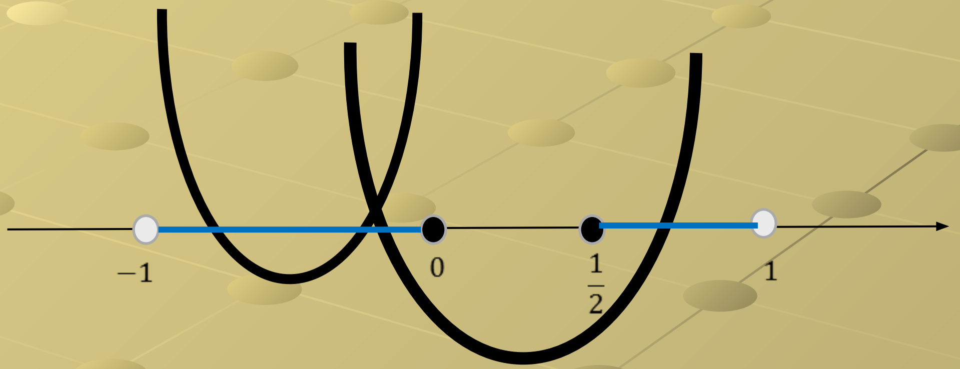
$t_{1;2} = \frac{a \pm \sqrt{(a+2)^2}}{4} = \frac{a \pm |a+2|}{4} = \frac{a \pm (a+2)}{4}$

$t_1 = \frac{a+a+2}{4} = \frac{a+1}{2}$

$t_2 = -\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2} \in (-1;\ 0]$

Значит, возможны случаи расположения корней



$-1 < t_1 \leq 0$ или $\frac{1}{2} \leq t_1 < 1$

$-1 < \frac{a+1}{2} \leq 0$ $\quad$ $\frac{1}{2} \leq \frac{a+1}{2} < 1$

$-3 < a \leq -1$ $\quad$ $0 \leq a < 1$

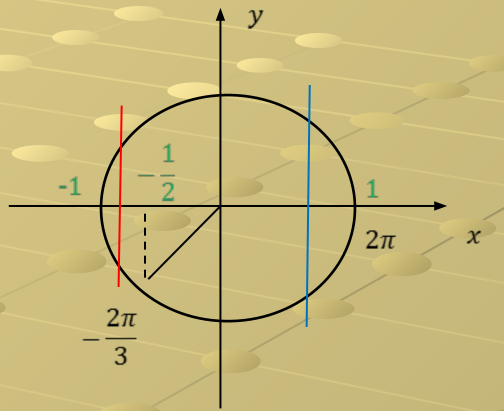
Учитывая условие (**) получаем значения a

$a \in (-3; -2) \cup \left(-2;\ -1\right] \cup [0;\ 1)$

Ответ: при $a \in (-3; -2) \cup \left(-2;\ -1\right] \cup [0;\ 1)$ уравнение имеет наибольшее количество решений; 8 решений

Найдите все a, при каждом из которых уравнение
$$log_{3a+2}(cos^2x - a^2cosx + a^2) = 0$$
имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3};\ 2\pi\right]$

ОДЗ параметра: $a > -\frac{2}{3},\ a \neq -\frac{1}{3}$



$cos^2x - a^2cosx + a^2 = 1$
$cos^2x - a^2cosx + a^2 - 1 = 0$

Пусть $cosx = t$, тогда $t^2 - a^2t + a^2 - 1 = 0$ (*), $-1 \leq t \leq 1$

$D = a^4 - 4(a^2 - 1) = a^4 - 4a^2 + 4 = (a^2 - 2)^2$;

$t_{1;2} = \frac{a^2 \pm (a^2-2)}{2}$; $t_1 = a^2 - 1$; $t_2 = 1$

$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $cos2\pi = 1$

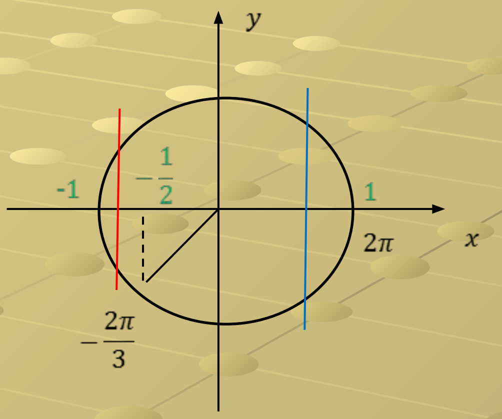
Уравнение (*) при любых значениях параметра имеет корень равный 1, а значит, исходное уравнение на $\left(-\frac{2\pi}{3};\ 2\pi\right]$ будет иметь два корня.

Рассмотрим, сколько решений будет иметь исходное уравнение при различных значениях t_1

Найдите все a, при каждом из которых уравнение

$$log_{3a+2}(cos^2x - a^2cosx + a^2) = 0$$

имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3};\ 2\pi\right]$



Если $t_1 = t_2$, то исходное уравнение имеет два решения

Если $t_1 \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, то уравнение $t_2 = cosx$ имеет три решения, а исходное пять решений

Если $t_1 = -1$, то уравнение $t_2 = cosx$ имеет одно решение, а исходное три

Если $t_1 \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right]$, то уравнение $t_2 = cosx$ имеет два решения, а исходное четыре

$$-1 < t_1 \le \frac{1}{2} \qquad -1 < a^2 - 1 \le \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a^2 - 1 \le -\frac{1}{2} \\ a^2 - 1 > -1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a^2 - \frac{1}{2} \le 0 \\ a^2 > 0 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le 0 \\ a \ne 0 \end{cases}$$

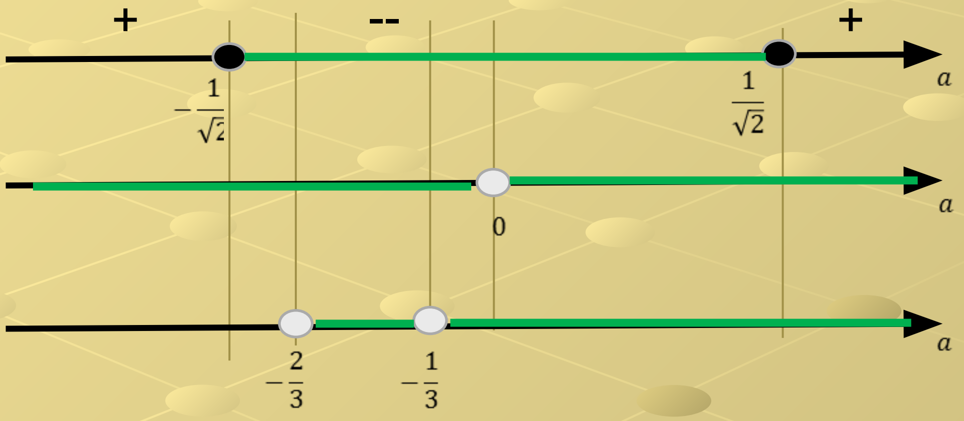
Найдите все a, при каждом из которых уравнение

$$log_{3a+2}(cos^2x - a^2cosx + a^2) = 0$$

имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3};\ 2\pi\right]$

$$\begin{cases}\left(a-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \le 0 \\ a \ne 0\end{cases}$$

С учетом ОДЗ параметра решаем систему



$$a \in \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Ответ: при $a \in \left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3};0\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ уравнение имеет ровно четыре корня на заданном промежутке

Для каждого допустимого значения a решите неравенство:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \le \log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$

ОДЗ параметра: $\begin{cases} \frac{a}{a+1} > 0 \\ \frac{a}{a+1} \ne 1 \end{cases}$

Рассмотрим случаи, когда основание логарифма больше 1 или принимает значения от 0 до 1

1) $\frac{a}{a+1} > 1$

$$\frac{a - a - 1}{a + 1} > 0$$

$$-\frac{1}{a + 1} > 0$$

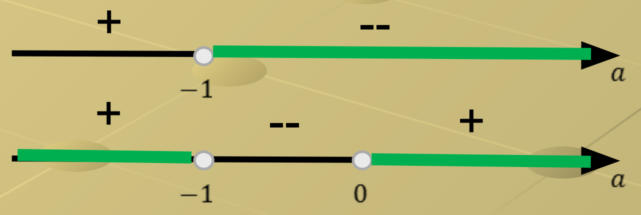
$$\frac{1}{a + 1} < 0$$

$$a < -1$$

$$a \in (-\infty; -1)$$

2) $0 < \frac{a}{a+1} < 1$

$\begin{cases} \frac{a}{a+1} < 1 \\ \frac{a}{a+1} > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -\frac{1}{a+1} < 0 \\ \frac{a}{a+1} > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \frac{1}{a+1} > 0 \\ \frac{a}{a+1} > 0 \end{cases}$



$a \in (0; +\infty)$

Для каждого допустимого значения a решите неравенство:

$$log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \le log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$

Заданное уравнение будет равносильно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - ax \le ax - a^2 + 1 \ (*) \\ x^2 - ax > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a \in (0; +\infty) \\ x^2 - ax \ge ax - a^2 + 1 \ \ (**) \\ ax - a^2 + 1 > 0 \end{cases}$$

Решим систему (*)

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - ax \le ax - a^2 + 1 \\ x^2 - ax > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \\ (x-a)^2 - 1 \le 0 \\ x(x-a) > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} a \in (-\infty; -1) \\ \big(x - (a+1)\big)\big(x - (a-1)\big) \le 0 \\ x(x-a) > 0 \end{cases}$$

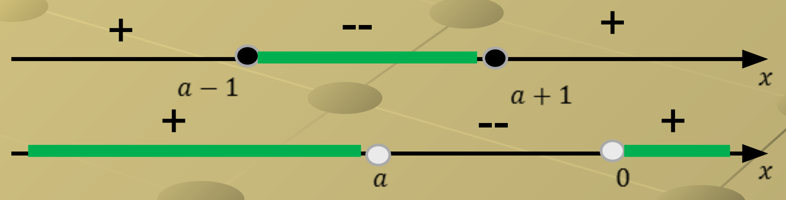
$$\big(x - (a+1)\big)\big(x - (a-1)\big) = 0$$

$x = a + 1; \quad x = a - 1$

$$x(x - a) = 0$$

$x = 0; \quad x = a$

$a - 1; \quad a; \quad a + 1; \quad 0$



При $a \in (-\infty; -1) \quad x \in [a-1; a)$

Для каждого допустимого значения a решите неравенство:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \leq \log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$

Решим систему (**)

$$\begin{cases} a \in (0;\ +\infty) \\ x^2 - ax \geq ax - a^2 + 1 \quad (**) \\ ax - a^2 + 1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \in (0;\ +\infty) \\ \big(x - (a+1)\big)\big(x - (a-1)\big) \geq 0 \\ ax > a^2 - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} a \in (0;\ +\infty) \\ \big(x - (a+1)\big)\big(x - (a-1)\big) \geq 0 \\ x > a - \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

$$x = a + 1; \qquad x = a - 1; \qquad x = a - \frac{1}{a}$$

Сравнив $a + 1$ и $a - \frac{1}{a}$; получаем $a + 1 > a - \frac{1}{a}$ при любых $a \in (0;\ +\infty)$

Сравнив $a - 1$ и $a - \frac{1}{a}$; получаем, что при $a \in (0; 1)$ $a - 1 > a - \frac{1}{a}$

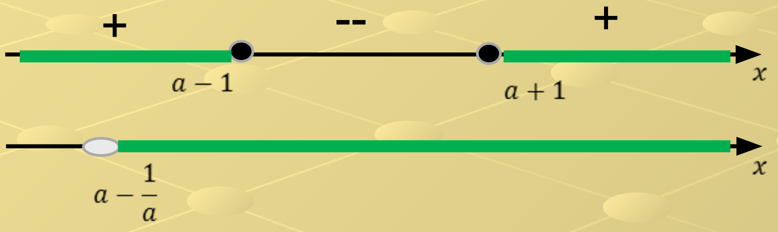
при $a \in [1;\ +\infty)$ $a - 1 < a - \frac{1}{a}$

Для каждого допустимого значения a решите неравенство:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \leq \log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$

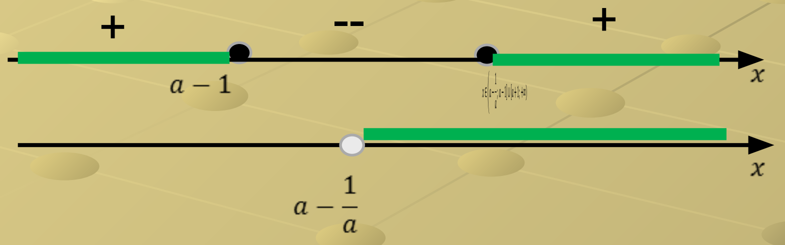
$$\begin{cases} a \in (0;\ +\infty) \\ (x-(a+1))(x-(a-1)) \geq (\\ x > a - \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

а) если $a \in (0; 1)$



$$x \in \left(a - \frac{1}{a};\ a-1\right] \cup [a+1;\ +\infty)$$

б) если $a \in [1;\ +\infty)$



$$x \in [a+1;\ +\infty)$$

Ответ: при $a < -1$ $\quad x \in [a-1;\ a)$

при $0 < a < 1$ $\quad x \in \left(a - \frac{1}{a};\ a-1\right] \cup [a+1;\ +\infty)$

при $a \geq 1$ $\quad x \in [a+1;\ +\infty)$