



Учитель математики МОУ «Лицей №5»
г. Железногорска
Олейник Ольга Владимировна

«Решение задач с параметрами»

1) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $2a^2 - x^2 - 3a + 8x = (3a - 3)\sqrt{16 - (x - 4)^2}$ имеет ровно два различных действительных корня

2) Найдите все a , при каждом из которых уравнение $2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$ имеет наибольшее количество решений на отрезке $\left[-\pi; \frac{17\pi}{6}\right]$. Чему равно это количество?

3) Найдите все a , при каждом из которых уравнение $\log_{3a+2}(\cos^2 x - a^2 \cos x + a^2) = 0$ имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$

4) Для каждого допустимого значения a решите неравенство:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \leq \log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2a^2 - x^2 - 3a + 8x = (3a - 3)\sqrt{16 - (x - 4)^2}$$

имеет ровно два различных действительных корня

Область определения уравнения: $16 - (x - 4)^2 \geq 0$

$$(x - 8)x \leq 0; \quad x \in [0; 8]$$

$$16 - (x^2 - 8x + 16) + 2a^2 - 3a = (3a - 3)\sqrt{16 - (x - 4)^2}$$

$$16 - (x - 4)^2 + 2a^2 - 3a = (3a - 3)\sqrt{16 - (x - 4)^2}$$

Пусть $\sqrt{16 - (x - 4)^2} = t$

$$0 \leq t \leq 4$$

$$t^2 - (3a - 3)t + 2a^2 - 3a = 0 (*)$$

Если $t = 4$, то $(x - 4)^2 = 0$, уравнение имеет одно решение

Если уравнение (*) имеет два различных корня, принадлежащих промежутку $[0; 4)$, то заданное уравнение будет иметь 4 различных корня.

Заданное уравнение имеет два различных действительных корня, если уравнение (*) имеет:

а) два равных корня из промежутка $[0; 4)$;

б) два корня, один из которых принадлежит, а другой не принадлежит промежутку $[0; 4)$

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2a^2 - x^2 - 3a + 8x = (3a - 3)\sqrt{16 - (x - 4)^2}$$

имеет ровно два различных действительных корня

$$t^2 - (3a - 3)t + 2a^2 - 3a = 0 (*)$$

$$\text{а) } D = (3a - 3)^2 - 4 \cdot (2a^2 - 3a) = a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2$$

$$(a - 3)^2 = 0$$

$$a = 3; \quad t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$t = 3; \quad 3 \in [0; 4)$$

$$\text{б) } t_{1;2} = \frac{3a-3 \pm \sqrt{(a-3)^2}}{2} = \frac{3a-3 \pm |a-3|}{2} = \frac{3a-3 \pm (a-3)}{2}$$

$$t_1 = \frac{3a-3+a-3}{2} = 2a-3$$

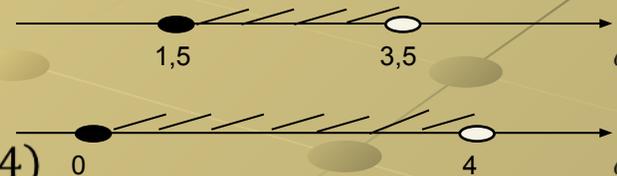
$$t_2 = \frac{3a-3-a+3}{2} = a$$

$$1) \quad 0 \leq 2a - 3 < 4$$

$$1,5 \leq a < 3,5$$

$$2) \quad 0 \leq a < 4$$

условие выполняется при $a \in [0; 1,5) \cup (3,5; 4)$



Ответ: при $a \in [0; 1,5) \cup \{3\} \cup (3,5; 4)$ уравнение имеет ровно два действительных корня

Найдите все a , при каждом из которых уравнение $2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$ имеет наибольшее количество решений на отрезке $\left[-\pi; \frac{17\pi}{6}\right]$. Чему равно это количество?

$$2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$$

$$2(1 - 2\sin^2 x) + 2a\sin x + a - 1 = 0$$

$$4\sin^2 x - 2a\sin x - (a + 1) = 0$$

$$\sin(-\pi) = 0; \quad \sin\frac{17\pi}{6} = \sin\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

Пусть $\sin x = t$; $-1 \leq t \leq 1$, тогда $4t^2 - 2at - (a + 1) = 0$ (*)

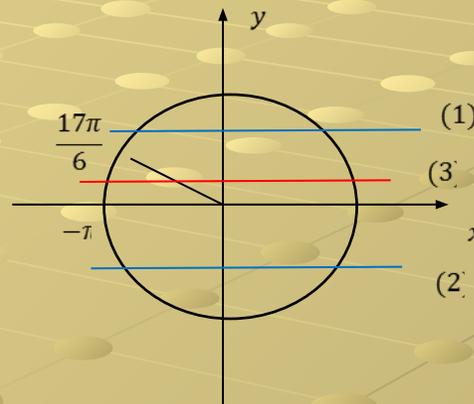
Рассмотрим, сколько решений имеет уравнение $\sin x = t$ в зависимости от значений t :

1) При $t = \pm 1$ 2 решения

2) При $0 < t < \frac{1}{2}$ 3 решения

3) При $-1 < t \leq 0$ и $\frac{1}{2} \leq t < 1$ 4 решения

Таким образом, наибольшее количество решений 8 заданное уравнение будет иметь, если уравнение (*) будет иметь два различных корня, удовлетворяющих третьему условию



Найдите все a , при каждом из которых уравнение $2\cos 2x + 2a\sin x + a - 1 = 0$ имеет наибольшее количество решений на отрезке $\left[-\pi; \frac{17\pi}{6}\right]$. Чему равно это количество?

$$4t^2 - 2at - (a + 1) = 0 \quad (*)$$

$$D = a^2 + 4(a + 1) = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$$

$$t_1 \neq t_2 \text{ при } a \neq -2 \quad (**)$$

$$t_{1;2} = \frac{a \pm \sqrt{(a+2)^2}}{4} = \frac{a \pm |a+2|}{4} = \frac{a \pm (a+2)}{4}$$

$$t_1 = \frac{a+a+2}{4} = \frac{a+1}{2}$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$-1 < t_1 \leq 0$$

$$-1 < \frac{a+1}{2} \leq 0$$

$$-3 < a \leq -1$$

Учитывая условие (**), получаем значения a

$$a \in (-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [0; 1)$$

или

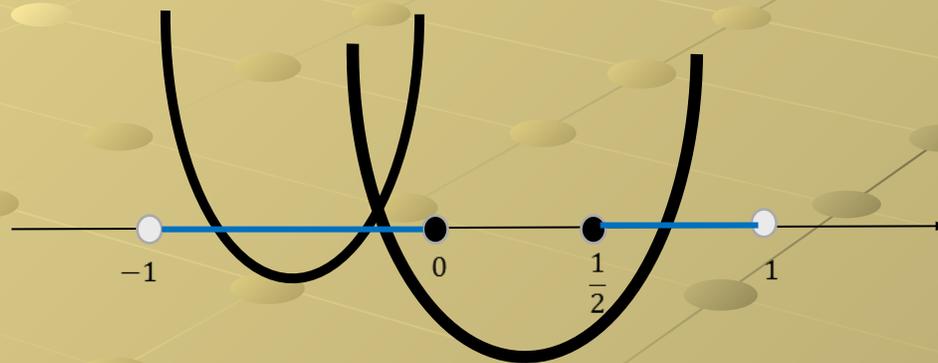
$$\frac{1}{2} \leq t_1 < 1$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a+1}{2} < 1$$

$$0 \leq a < 1$$

$$-\frac{1}{2} \in (-1; 0]$$

Значит, возможны случаи расположения корней



Ответ: при $a \in (-3; -2) \cup (-2; -1] \cup [0; 1)$ уравнение имеет наибольшее количество решений; 8 решений

Найдите все a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{3a+2}(\cos^2 x - a^2 \cos x + a^2) = 0$$
 имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$

ОДЗ параметра: $a > -\frac{2}{3}, a \neq -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \cos^2 x - a^2 \cos x + a^2 &= 1 \\ \cos^2 x - a^2 \cos x + a^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

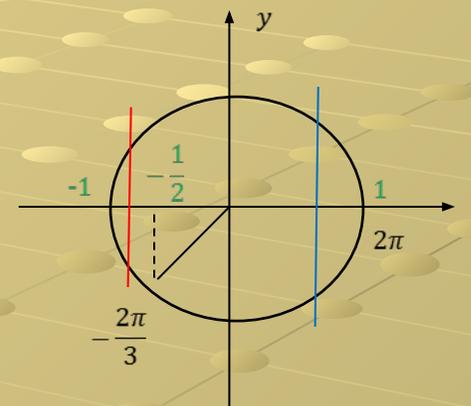
Пусть $\cos x = t$, тогда $t^2 - a^2 t + a^2 - 1 = 0$ (*), $-1 \leq t \leq 1$

$$D = a^4 - 4(a^2 - 1) = a^4 - 4a^2 + 4 = (a^2 - 2)^2;$$

$$t_{1;2} = \frac{a^2 \pm (a^2 - 2)}{2}; \quad t_1 = a^2 - 1; \quad t_2 = 1$$

Уравнение (*) при любых значениях параметра имеет корень равный 1, а значит, исходное уравнение на $\left(-\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$ будет иметь два корня.

Рассмотрим, сколько решений будет иметь исходное уравнение при различных значениях t_1



$$\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}; \quad \cos 2\pi = 1$$

Найдите все a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{3a+2}(\cos^2 x - a^2 \cos x + a^2) = 0$$
имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$

Если $t_1 = t_2$, то исходное уравнение имеет два решения

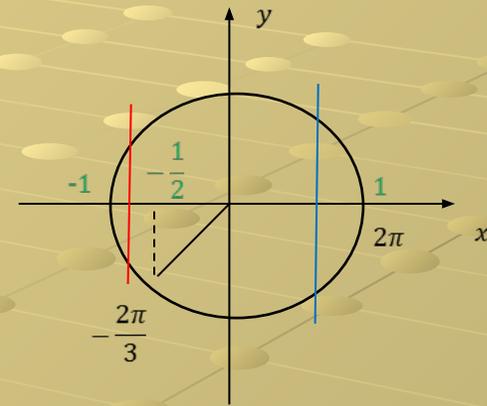
Если $t_1 \in \left(-\frac{1}{2}; 1\right)$, то уравнение $t_2 = \cos x$ имеет три решения, а исходное пять решений

Если $t_1 = -1$, то уравнение $t_2 = \cos x$ имеет одно решение, а исходное три

Если $t_1 \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right]$, то уравнение $t_2 = \cos x$ имеет два решения, а исходное четыре

$$-1 < t_1 \leq \frac{1}{2} \quad -1 < a^2 - 1 \leq \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a^2 - 1 \leq -\frac{1}{2}; \\ a^2 - 1 > -1 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - \frac{1}{2} \leq 0; \\ a^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$



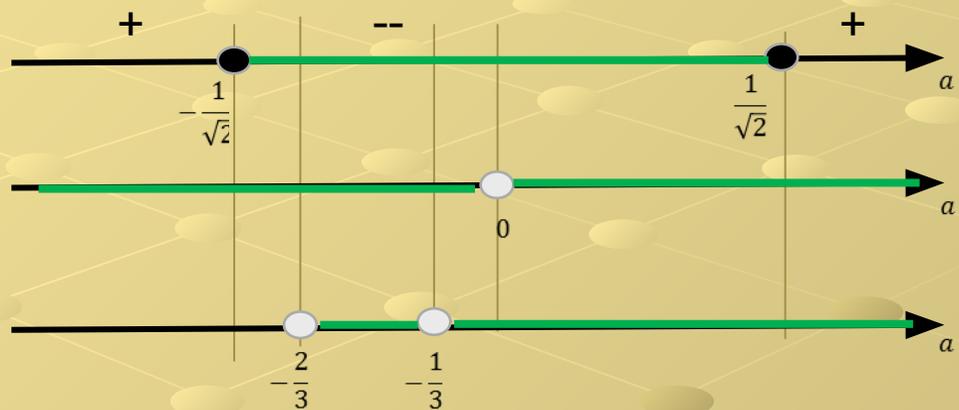
Найдите все a , при каждом из которых уравнение

$$\log_{3a+2}(\cos^2 x - a^2 \cos x + a^2) = 0$$

 имеет ровно четыре корня на промежутке $\left(-\frac{2\pi}{3}; 2\pi\right]$

$$\begin{cases} \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq 0 \\ a \neq 0 \end{cases}$$

С учетом ОДЗ параметра решаем систему



$$a \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Ответ: при $a \in \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ уравнение имеет ровно четыре корня на заданном промежутке

Для каждого допустимого значения a решите неравенство:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \leq \log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$

ОДЗ параметра: $\begin{cases} \frac{a}{a+1} > 0 \\ \frac{a}{a+1} \neq 1 \end{cases}$

Рассмотрим случаи, когда основание логарифма больше 1 или принимает значения от 0 до 1

1) $\frac{a}{a+1} > 1$

$$\frac{a - a - 1}{a + 1} > 0$$

$$-\frac{1}{a + 1} > 0$$

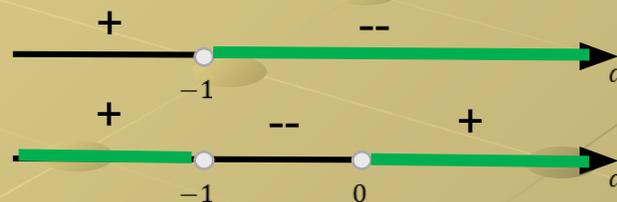
$$\frac{1}{a + 1} < 0$$

$$a < -1$$

$$a \in (-\infty; -1)$$

2) $0 < \frac{a}{a+1} < 1$

$$\begin{cases} \frac{a}{a+1} < 1 \\ \frac{a}{a+1} > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -\frac{1}{a+1} < 0 \\ \frac{a}{a+1} > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{1}{a+1} > 0 \\ \frac{a}{a+1} > 0 \end{cases}$$



$$a \in (0; +\infty)$$

Для каждого допустимого значения a решите неравенство:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \leq \log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$

Заданное уравнение будет равносильно совокупности следующих систем:

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - ax \leq ax - a^2 + 1 (*) \\ x^2 - ax > 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a \in (0; +\infty) \\ x^2 - ax \geq ax - a^2 + 1 (**) \\ ax - a^2 + 1 > 0 \end{cases}$$

Решим систему (*)

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - ax \leq ax - a^2 + 1 ; \\ x^2 - ax > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1) \\ (x - a)^2 - 1 \leq 0 ; \\ x(x - a) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in (-\infty; -1) \\ (x - (a + 1))(x - (a - 1)) \leq 0 \\ x(x - a) > 0 \end{cases}$$

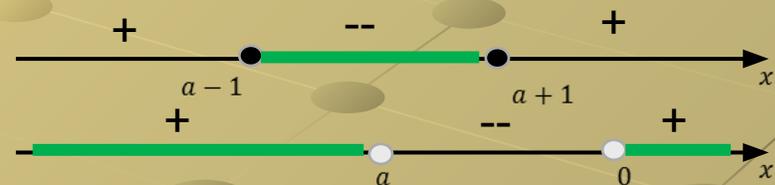
$$(x - (a + 1))(x - (a - 1)) = 0$$

$$x = a + 1; \quad x = a - 1$$

$$a - 1; \quad a; \quad a + 1; \quad 0$$

$$x(x - a) = 0$$

$$x = 0; \quad x = a$$



При $a \in (-\infty; -1)$ $x \in [a - 1; a)$

Для каждого допустимого значения a решите неравенство:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \leq \log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$

Решим систему (**)

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in (0; +\infty) \\ x^2 - ax \geq ax - a^2 + 1 \quad (**) \\ ax - a^2 + 1 > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a \in (0; +\infty) \\ (x - (a + 1))(x - (a - 1)) \geq 0 \\ ax > a^2 - 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a \in (0; +\infty) \\ (x - (a + 1))(x - (a - 1)) \geq 0 \\ x > a - \frac{1}{a} \end{array} \right.$$

$$x = a + 1; \quad x = a - 1; \quad x = a - \frac{1}{a}$$

Сравним $a + 1$ и $a - \frac{1}{a}$; получаем $a + 1 > a - \frac{1}{a}$ при любых $a \in (0; +\infty)$

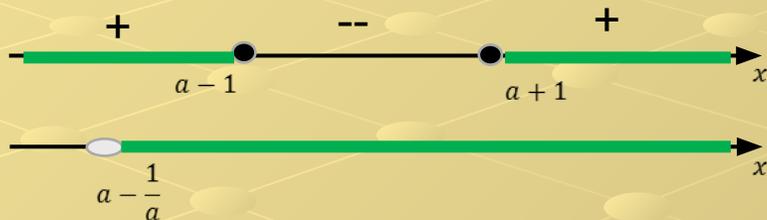
Сравним $a - 1$ и $a - \frac{1}{a}$; получаем, что при $a \in (0; 1)$ $a - 1 > a - \frac{1}{a}$
при $a \in [1; +\infty)$ $a - 1 < a - \frac{1}{a}$

Для каждого допустимого значения a решите неравенство:

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2 - ax) \leq \log_{\frac{a}{a+1}}(ax - a^2 + 1)$$

$$\begin{cases} a \in (0; +\infty) \\ (x - (a + 1))(x - (a - 1)) \geq 0 \\ x > a - \frac{1}{a} \end{cases}$$

а) если $a \in (0; 1)$



$$x \in \left(a - \frac{1}{a}; a - 1\right] \cup [a + 1; +\infty)$$

Ответ: при $a < -1$

$$x \in [a - 1; a)$$

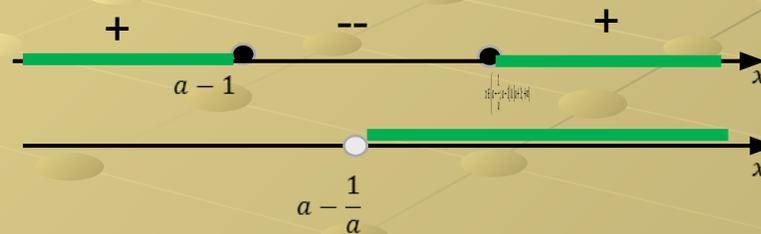
при $0 < a < 1$

$$x \in \left(a - \frac{1}{a}; a - 1\right] \cup [a + 1; +\infty)$$

при $a \geq 1$

$$x \in [a + 1; +\infty)$$

б) если $a \in [1; +\infty)$



$$x \in [a + 1; +\infty)$$