КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

Лекция 4

Основы построения цифровых автоматов и систем анализа информационных процессов.

Понятия СДНФ и СКНФ. Логико-вероятностное моделирование. Метод Квайна. Теоремы поглощения и склеивания.

А.В. Полтавский

Москва 2018

Введение

Многие важные научные и технические направления, такие как геофизика, радио и гидролокация, метеорология, обработка изображений, аэро и гидродинамика, биология и медицина, искусственный интеллект и другие, уже не могут успешно развиваться , не используя компьютеры, методы научного анализа и информационного моделирования. Большинство алгоритмов решения вычислительных задач обладают высоким уровнем естественного параллелизма.

Основу архитектуры проблемно-ориентированной ЭВМ сегодня составляют разветвленные компоненты:

различные виды параллельных алгоритмов, числовая и логическая обработка информации (данных), структура данных, обработка одномерных и многомерных массивов.

вычислительной техники (ВТ) оказалась в тесной взаимосвязи с вычислительной математикой и оценивания параметров множества информационных процессов, со всеми их вопросами конструирования и программирования электронных вычислительных систем (ВС). Аппарат математической логики находит свое применение в вычислительной математике, в конструировании сложных автоматических устройств, в проектировании информационно-измерительных и управляющих систем (ИИУС), при синтезе релейно-контактных и электронных схем робототехнических систем (РбТС) и т. д.

Создание компьютеров стало возможным только тогда, когда нашли общую точку пересечения, совместились, наложились друг на друга различные теоретические положения великих ученых : Аристотель, Р. Декарт (1596 г.), Г. Лейбниц (1673г.), Дж.Буль (1848 г.), Герман Холлерит (1890 г.), Алан Тьюринг (1938 г.), Джон фон Нейман (1945 г.), А.А. Марков (Россия, 1903-1979 гг.) и многие другие ученые.

У истоков современной логики цифровых автоматов стоит Г. Лейбниц (из Германии, 1646-1716 гг.), выдвинувший идею представить логическое доказательство как вычисление, подобное вычислению в математике. Он же обосновал необходимость создания универсального логического языка, который, в отличие от естественного языка, мог бы точно и одновременно выражать различные понятия и отношения.

Лейбниц разработал «своего рода» алгебру человеческого мышления, позволяющую получать из уже известных истин новые истины путем точных вычислений.

был сделан Дж. Булем (1815-1864) – алгебры логики (1847). Алгебра логики явилась исходным пунктом для развития теории алгоритмов .

Отметим, что информационный процесс является центральным алгоритмическим составным элементов любых создаваемых информационных систем (ИС).

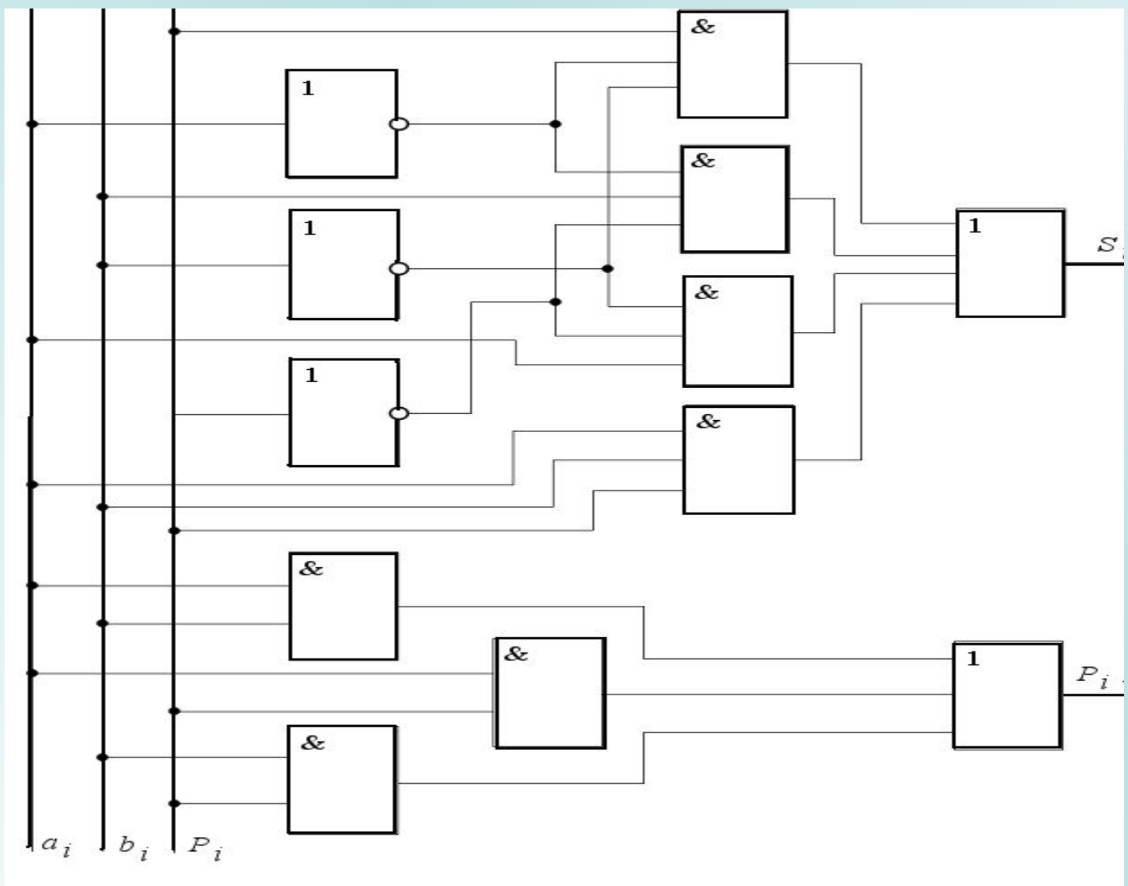
Алгоритмизация информационного процесса основана на знаниях вычислительных систем (ВС) и их математического обеспечения.

В практическую основу большинства ВС была положена АЛГЕБРА ДЖ.БУЛЯ (АЛГЕБРА 2-Х ЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ $\{0;1\}$

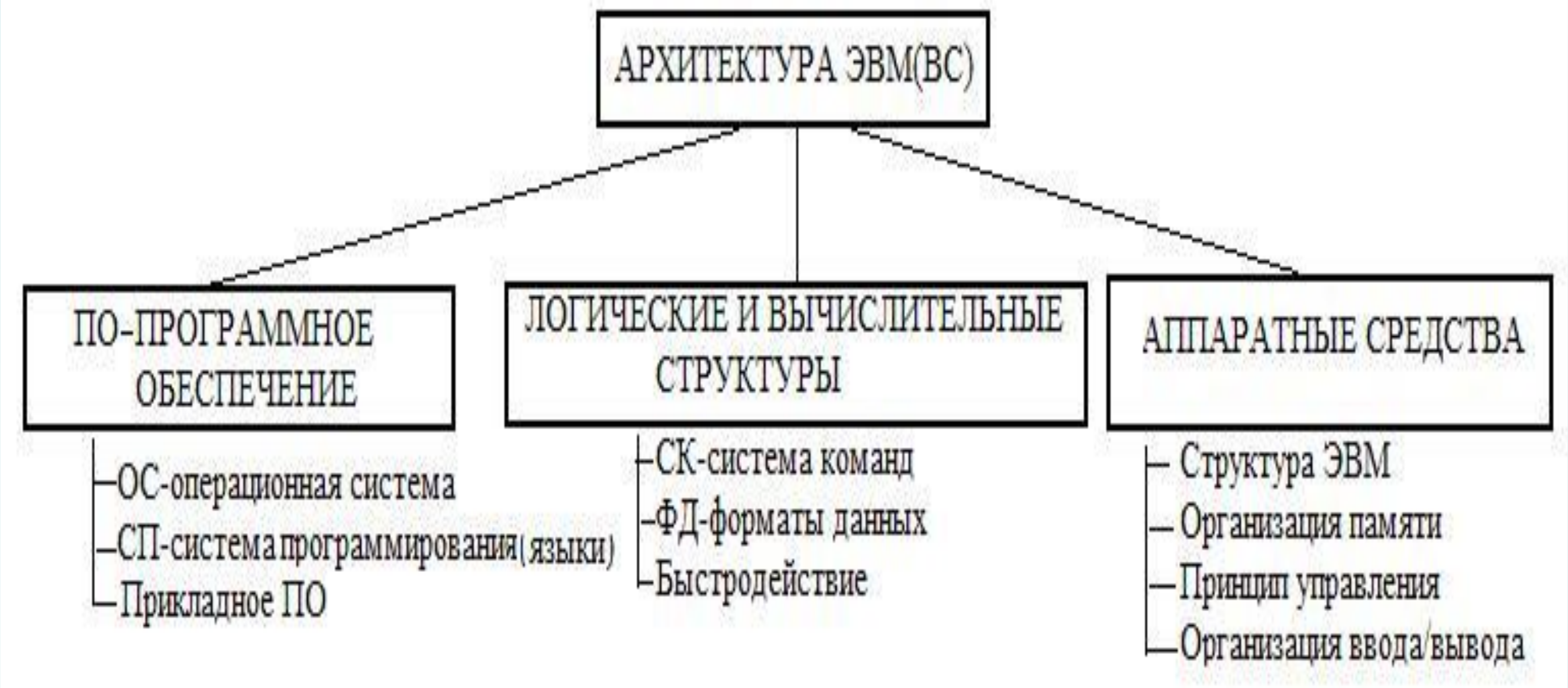
арифметико-логическое устройство (АЛУ). В основу АЛУ положена работа сумматора сложения чисел *x* и *y*. Кроме обычных арифметических операций сумматор может выполнять и вспомогательные операции — сдвиг, обращение кода числа и др. (На рис. показана схема сумматора на три входа)

$$C = X \wedge \overline{Y} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge \overline{C}) \vee (\overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge C) \vee (X \wedge Y \wedge C),$$

$$P_{i-1} = (X \wedge Y \wedge \overline{C}) \vee (X \wedge \overline{Y} \wedge C) \vee (\overline{X} \wedge Y \wedge C) \vee (X \wedge Y \wedge C).$$



Архитектура ЭВМ



Следует отметить, что в архитектуре нашей отечественной супермашины ВС БЭСМ-6 впервые были *предложены принципы распараллеливания вычислительного процесса* за счет аппаратных средств.

Базовая структура параллельной ЭВМ

Параллельная ЭВМ с общим управлением, ориентированная на решение параллельных вычислительных задач, содержит **N** процессорных элементов (ПЭ), находящихся под общим управлением ОУУ. Совокупность из ПЭ образует параллельный процессор ВС.

Каждый ПЭ состоит из вычислительного модуля (**ВМ**), модуля памяти (МП), модуля межпроцессорного коммутатора (ММК), модуля ввода-вывода данных (МВВ).

В состав каждого ВМ входит арифметическое устройство (АУ), Оперативные регистры (ОР), Модуль памяти МП содержит ОЗУ с независимой адресацией, МВВ – регистры ввода-вывода (РВВ).

В составе каждого блока ВМ имеются локальные устройства управления (ЛУУ),
имеющие память программ и логику управления.

Ввод программ и данных в параллельную ВС, управление периферией и общее управление все ВС осуществляет **управляющая ЭВМ**.

Процесс программирования задачи состоит в составлении программ работы всех управляющих устройств (УУ).

Преимущества параллельной обработки информации ВС основаны на том, что в системе с большой размерностью задачи, для которой выполняется соотношение вида

$$Bi(Si)>N, \ (i=1,2,3,\ldots,k),$$

где *B*i-число одинаковых операторов; *N*-число ПЭ; всегда имеется достаточное количество операторов *S*i, готовых к решению. Поэтому, за счет изменения последовательности обработки этих операторов, можно *осуществить распараллеливание информационных процессов* на уровне операторов. Чтобы параллельная ВС могла решать эти задачи, каждый ПЭ должен иметь развитую систему локального управления, обеспечивающую независимую адресацию операндов в каждом модуле поля памяти, независимую адресацию коммутаторов поля коммутации. Данная идея реализована в отечественной ВС ПС-2000.

Анализ множества цифровых ЭВМ и ВС показывает, что их фундамент (базис) – математическая логика.

Основы математической логики мы ранее учили в школе.

Вспомним ее основные положения и постулаты.

ОПЕРАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ (символической) ЛОГИКИ

Отрицание (инверсия данных)

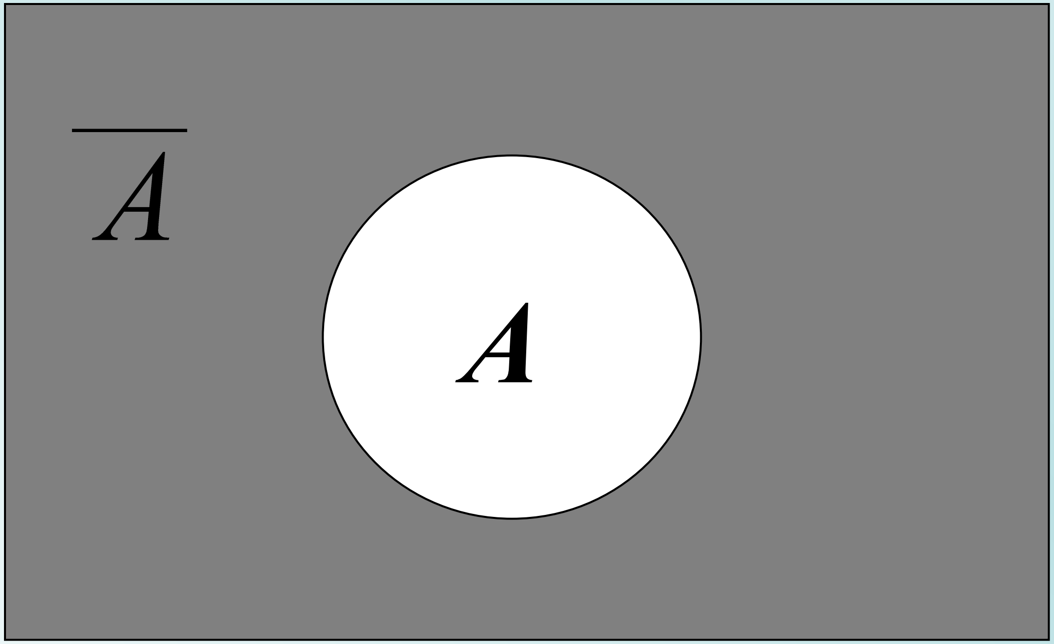
Мнемоническое правило: слово «инверсия» (от лат. *inversio* – переворачивание) означает, что белое меняется на черное, добро на зло, красивое на безобразие, истина на ложь, ложь на истину, ноль на один, один на ноль.

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Отрицание принято отображать графически
с помощью диаграммы Эйлера Венна

Множество А элементов, для которых высказывание А - истинно

Множество $\overline{A}$ элементов, для которых высказывание А - ложно



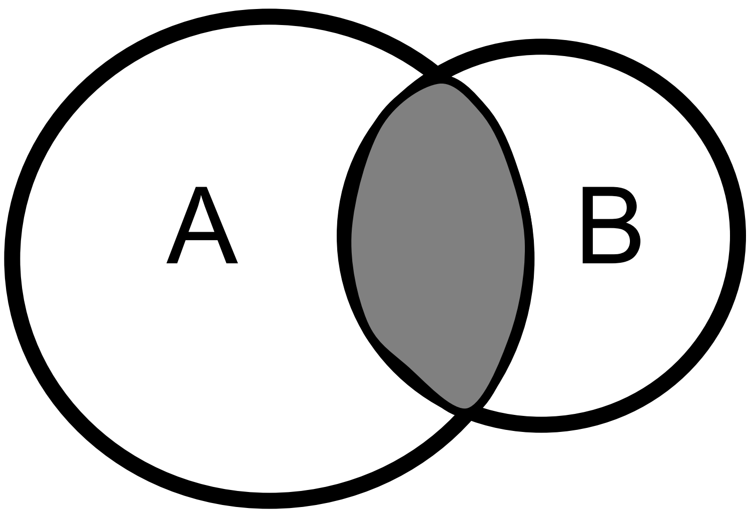
Конъюнкция $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Конъюнкция $A \wedge B$

Множество A элементов, для которых высказывание A - истинно

Множество B элементов, для которых высказывание B - истинно



Множество A∩B элементов, для которых истинно одновременно и высказывание A и высказывание B

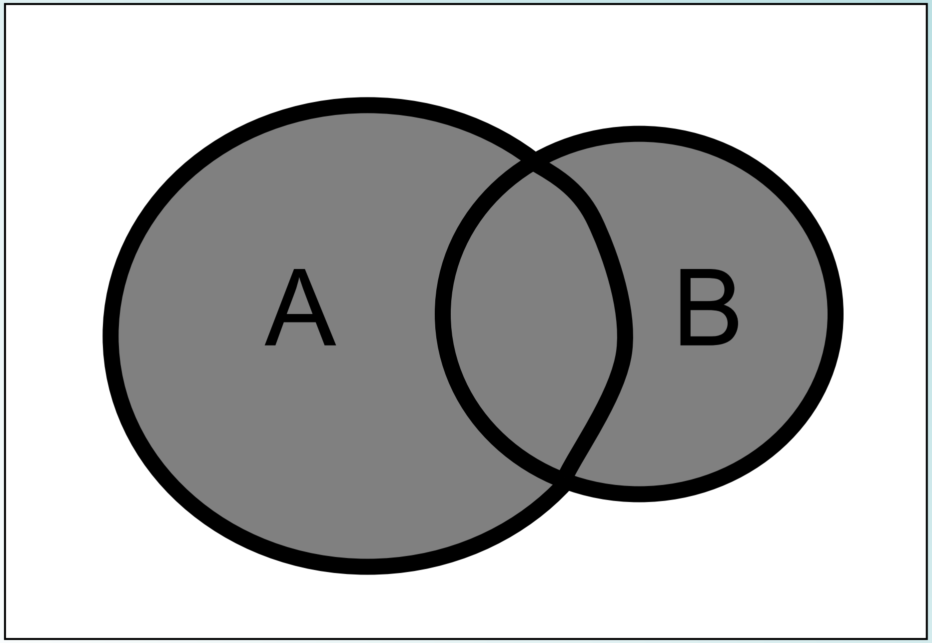
Дизъюнкция $A \vee B$

A	B	$A \vee B$
0	*0*	*0*
0	*1*	*1*
1	*0*	*1*
1	*1*	*1*

Дизъюнкция $A \vee B$

Множество А элементов, для которых высказывание А - истинно

Множество В элементов, для которых высказывание В - истинно



Множество AUB элементов, для которых истинно или высказывание А или высказывание В или одновременно и высказывание А и высказывание В

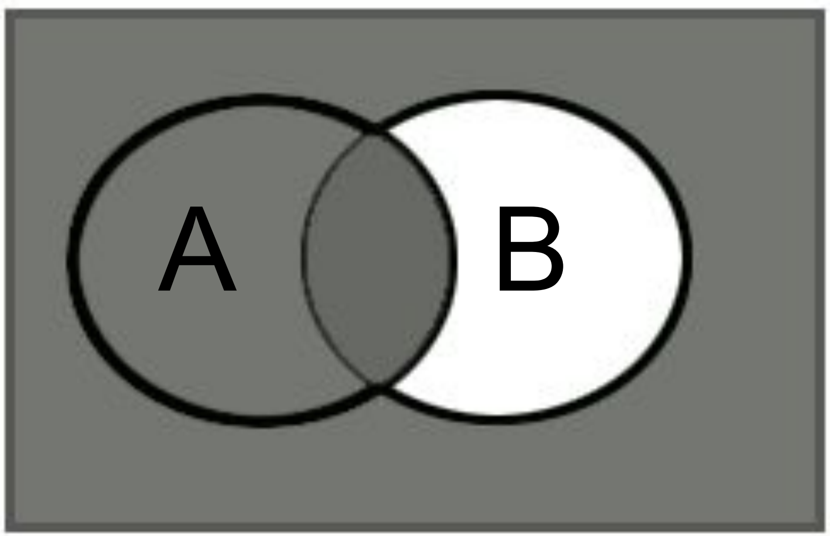
Импликация $A \to B$

A	B	$A \to B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Импликация $A \rightarrow B$

Множество A элементов, для которых высказывание A - истинно

Множество B элементов, для которых высказывание B - истинно



Множество $A \cup \overline{B}$

всех элементов универсального множества, для которых высказывание B ложно или высказывание A истинно

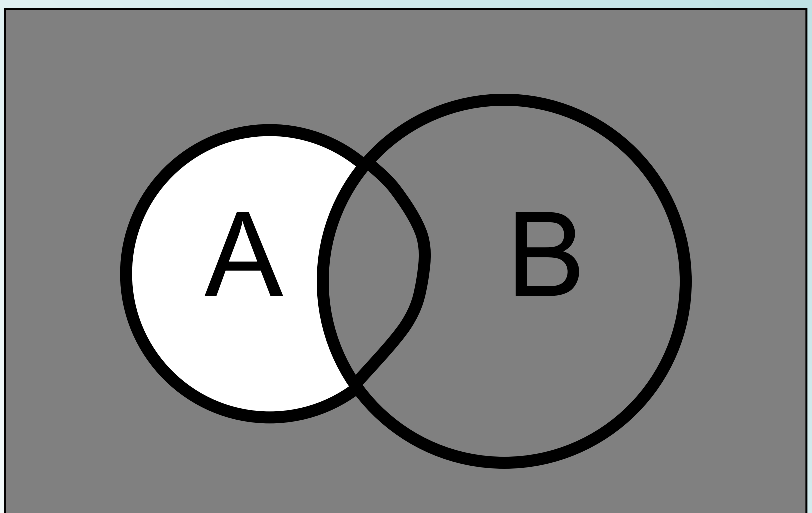
Импликация $B \to A$

A	B	$B \to A$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Импликация $B \to A$

Множество A элементов, для которых высказывание A - истинно

Множество B элементов, для которых высказывание B - истинно



Множество $\overline{A} \vee B$ всех элементов, для которых высказывание A ложно или высказывание B истинно

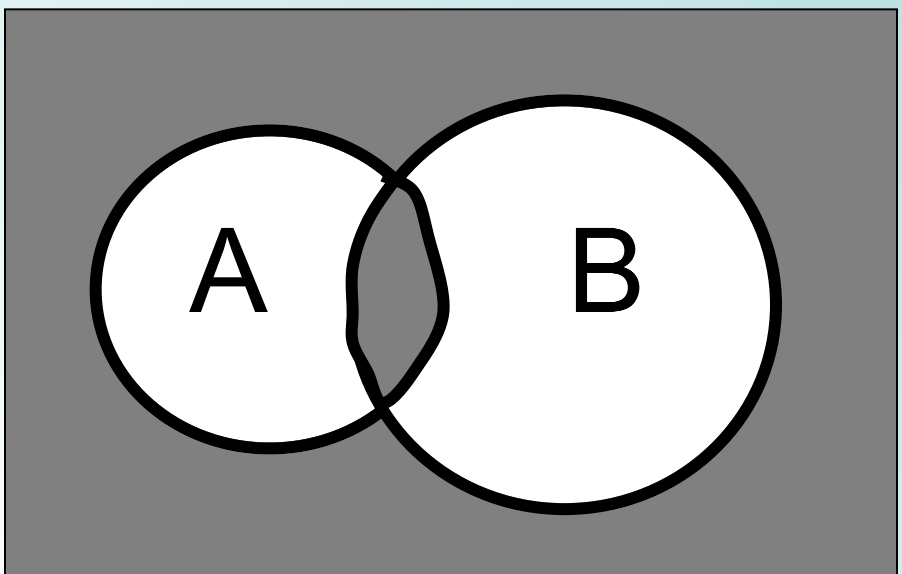
Эквиваленция $A \equiv B$

A	B	$A \equiv B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Эквиваленция $A \equiv B$

Множество A элементов, для которых высказывание A - истинно

Множество B элементов, для которых высказывание B - истинно



Множество

$$(A \land B) \lor (\overline{A} \land \overline{B})$$

всех элементов, для которых высказывание A и высказывание B истинны или ложны одновременно

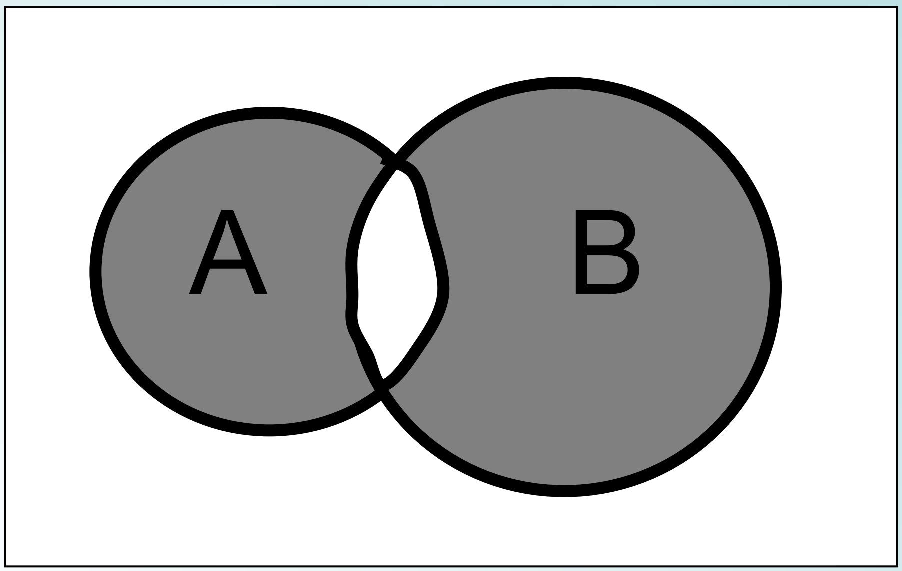
Сложение по модулю 2 (Исключающее ИЛИ) $A \oplus B$

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Сложение по модулю 2 (Исключающее ИЛИ) $A \oplus B$

Множество А элементов, для которых высказывание А - истинно

Множество В элементов, для которых высказывание В - истинно



Множество $(\overline{A} \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B})$ всех элементов, для которых истинно высказывание А и при этом ложно высказывание В и наоборот.

Штрих Шеффера (И -НЕ)

$$A \mid B$$

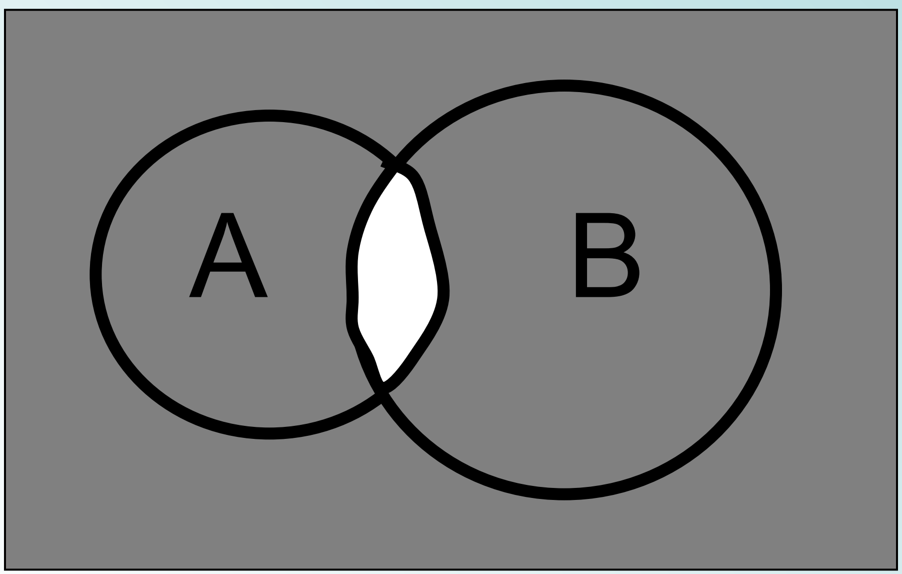
A	B	$A \mid B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Штрих Шеффера (И -НЕ)

$$A \mid B$$

Множество А элементов, для которых высказывание А - истинно

Множество В элементов, для которых высказывание В - истинно



Множество $\overline{A \wedge B}$ всех элементов универсального множества, за исключением тех, для которых высказывание А и высказывание В истинны одновременно

Стрелка Пирса (ИЛИ -НЕ)

$$A \downarrow B$$

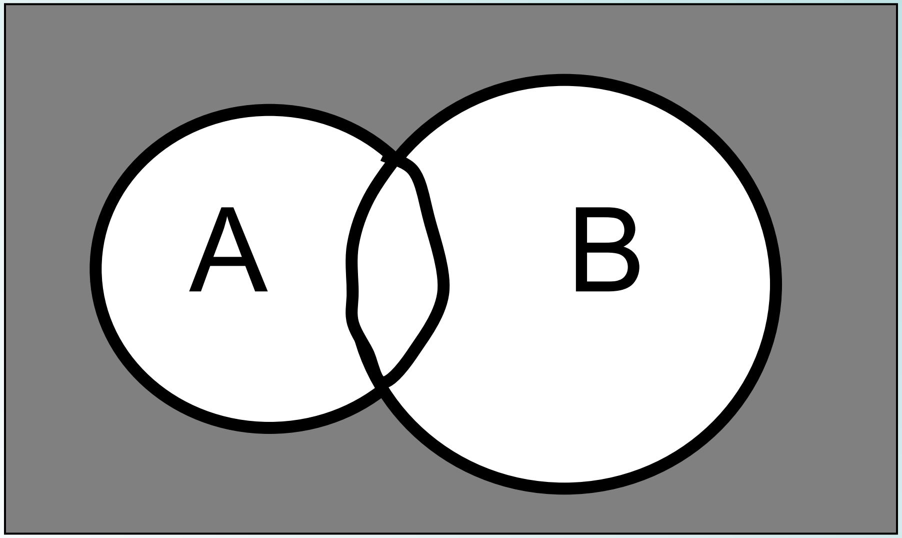
A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Стрелка Пирса (ИЛИ -НЕ)

$$A \downarrow B$$

Множество A элементов, для которых высказывание A - истинно

Множество B элементов, для которых высказывание B - истинно



Множество $\overline{A \vee B}$

всех элементов универсального множества, за исключением тех, для которых истинно высказывание A или истинно высказывание B.

Запрет по B $A \wedge \overline{B}$

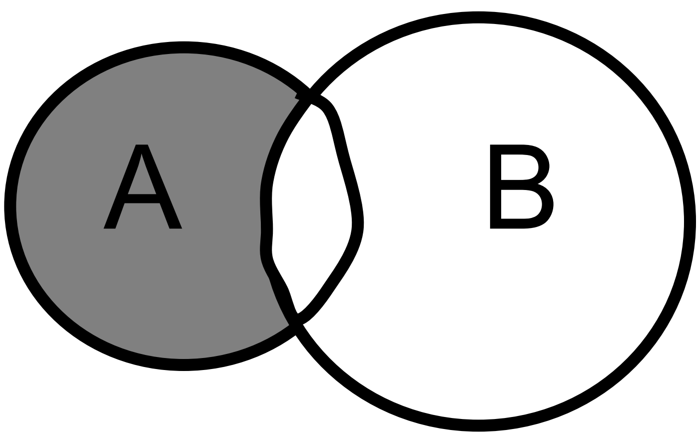
A	B	$A \wedge \overline{B}$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Запрет по В

$$A \wedge \overline{B}$$

Множество А элементов, для которых высказывание А - истинно

Множество В элементов, для которых высказывание В - истинно



Множество $A \wedge \overline{B}$ всех элементов, для которых истинно высказывание А за исключением тех, для которых истинно высказывание В.

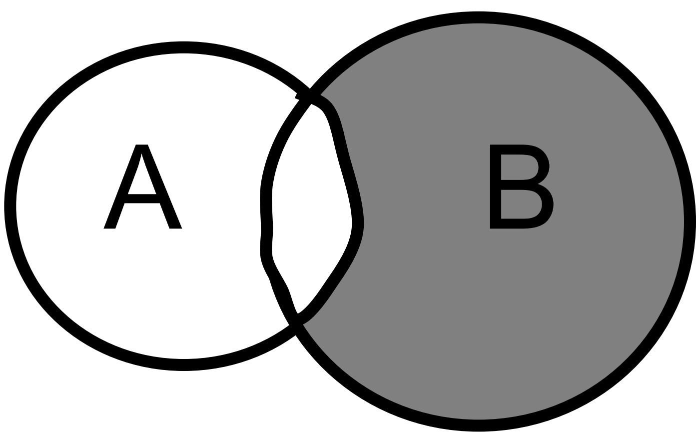
Запрет по A $\quad \overline{A} \wedge B$

A	B	$\overline{A} \wedge B$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	0

Запрет по А $\overline{A} \wedge B$

Множество А элементов, для которых высказывание А - истинно

Множество В элементов, для которых высказывание В - истинно



Множество $\overline{A} \wedge B$ всех элементов, для которых истинно высказывание В за исключением тех, для которых истинно высказывание А.

A	0	0	1	1	Название
B	0	1	0	1	
$F_{1}(A,B)$	0	0	0	0	Константа 0
$F_{2}(A,B)$	0	0	0	1	Конъюнкция A&B
$F_{3}(A,B)$	0	0	1	0	Запрет по B A&¬B
$F_{4}(A,B)$	0	0	1	1	Повторитель A
$F_{5}(A,B)$	0	1	0	0	Запрет по A ¬A&B
$F_{6}(A,B)$	0	1	0	1	Повторитель B
$F_{7}(A,B)$	0	1	1	0	Исключающее ИЛИ A&¬B+¬A&B Сложение по модулю 2 A☺B
$F_{8}(A,B)$	0	1	1	1	Дизъюнкция A+B
$F_{9}(A,B)$	1	0	0	0	Стрелка Пирса (или-не) ↓ ¬(A+B)
$F_{10}(A,B)$	1	0	0	1	Эквиваленция (равнозначность) A≡B A&B+¬A&¬B
$F_{11}(A,B)$	1	0	1	0	Инвертор B ¬B
$F_{12}(A,B)$	1	0	1	1	Импликация B->A
$F_{13}(A,B)$	1	1	0	0	Инвертор A ¬A
$F_{14}(A,B)$	1	1	0	1	Импликация A->B
$F_{15}(A,B)$	1	1	1	0	Штрих Шейфера (и-не) | ¬ (A&B)
$F_{16}(A,B)$	1	1	1	1	Константа 1

Элементарная конъюнкция

Конъюнкция переменных функции или их отрицаний.

$$x \wedge \overline{y} \wedge z$$

Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)

Дизъюнкция элементарных конъюнкций

$$F(x,y,z)=(x\wedge y\wedge z)\vee(\overline{x}\wedge y\wedge z)\vee(x\wedge \overline{y}\wedge \overline{z})$$

Аналитическое представление табличнозаданной функции

A	B	F(A.B)
0	**0**	**1**
0	1	0
1	**0**	**1**
1	1	0

$$F(A,B)=(\overline{A}\wedge\overline{B})\vee(A\wedge\overline{B})$$

Элементарная дизъюнкция

Дизъюнкция переменных функции или их отрицаний.

$$x \vee \overline{y} \vee z$$

Конъюнктивная нормальная форма (КНФ)

Конъюнкция элементарных дизъюнкций

$$F(x,y,z)=(x\vee y\vee z)\wedge(\overline{x}\vee y\vee z)\wedge(x\vee\overline{y}\vee\overline{z})$$

Таким образом, отметим следующие определения:

Элементарной конъюнкцией называется конъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые.

Элементарной дизъюнкцией называется дизъюнкция нескольких переменных, взятых с отрицанием или без отрицания, причем среди переменных могут быть одинаковые.

Всякую дизъюнкцию элементарных конъюнкций назовем дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ).

Всякую конъюнкцию элементарных дизъюнкций назовем конъюнктивной нормальной формой (КНФ).

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется ДНФ, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все конъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно, с отрицанием).

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется КНФ, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все дизъюнкции состоят из одного и того же набора переменных, в который каждая переменная входит только один раз (возможно, с отрицанием).

Приведем примеры формул, соответствующих и не соответствующих этим определениям:

Название формулы в определении	Формула, соответствующая определению	Формула, не соответствующая определению
Элементарная дизъюнкция	$X \vee \overline{X}$ $X \vee \overline{Z}$ $\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}$	$X \vee Y \& X$
Элементарная конъюнкция	$\overline{X} \& X$ $X \& Z$ $X \& \overline{Y} \& \overline{X}$ $\overline{X} \& Y \& \overline{Z}$	$X \vee Y \& X$

Название формулы в определении	Формула, соответствующая определению	Формула, не соответствующая определению
ДНФ	$X \& \overline{X} \vee X \& Y \& \overline{Z}$ $X \& Y \vee \overline{Y} \vee X \& Z$	ДНФ можно построить для всякой формулы (путем преобразования)
КНФ	$(X \vee Y \vee \overline{X}) \& (\overline{X} \vee Z)$ $X \& (\overline{X} \vee Y) \& (Y \vee \overline{Z})$	КНФ можно построить для всякой формулы (путем преобразования)
СДНФ	$X \& Y \& \overline{Z} \vee X \& Y \& Z$	$X \& Y \vee \overline{Y} \vee X \& \overline{Z}$
СКНФ	$(\overline{X} \vee Y \vee Z) \& (X \vee \overline{Y} \vee Z)$	$(X \vee Y \vee \overline{X}) \& (\overline{X} \vee Z)$

Любую функцию, кроме констант 0 и 1, можно представить в виде как СДНФ, так и СКНФ.

Этот факт является теоремой алгебры логики. Из него следует, что любая формула (кроме констант 0 и 1) может быть преобразована к виду как СДНФ, так и СКНФ.

Константа 0 может быть представлена только СКНФ ($0 = X \& \overline{X}$), а константа 1 — только СДНФ ($1 = X \vee \overline{X}$).

Из вышесказанного следует, что если мы хотим построить формулу некоторой функции по таблице истинности этой функции, то всегда можно и достаточно получить СКНФ или СДНФ этой функции.

Пример. По мишени производится стрельба 3-мя выстрелами и рассматриваются простые события: A_1-попадание при 1-м выстреле, A_2-попадание при втором, A_3-попадание при 3-м выстреле. Получить выражение о том, что в мишени будет не менее 2-х попаданий?

1. Рассмотрим, сложное событие B, как результате 3-х выстрелов, т.е. будет ровно одно попадание в мишень

$$B=A_1\neg A_2 \neg A_3 + \neg A_1A_2 \neg A_3 + \neg A_1 \neg A_2A_3.$$

2. Событие, что в мишени будет не менее 2-х попаданий

$$C=A_1A_2 \neg A_3+A_1 \neg A_2A_3+ \neg A_1A_2A_3+A_1A_2A_3.$$

Далее, самостоятельно построить математическую модель и определить вероятности событий ?

Метод Квайна

Оптимизация логических функций (ЛФ).
(основу метода Квайна составляют –
– теоремы поглощения и склеивания ЛФ)