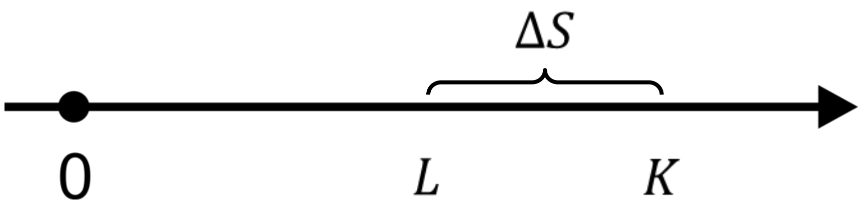
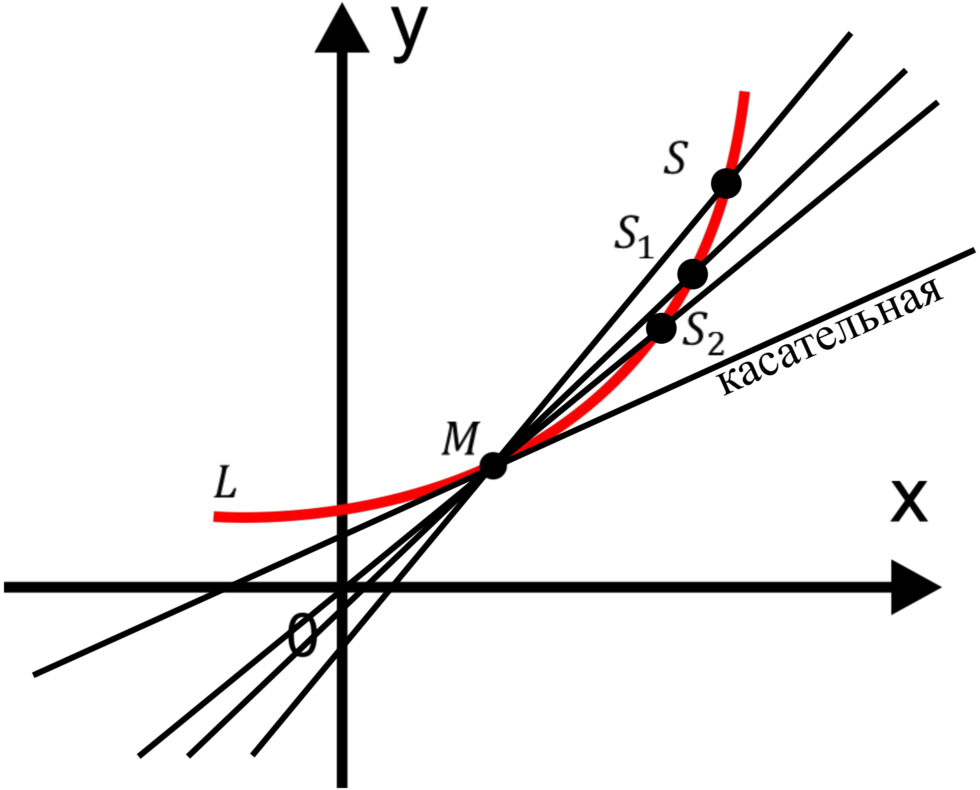
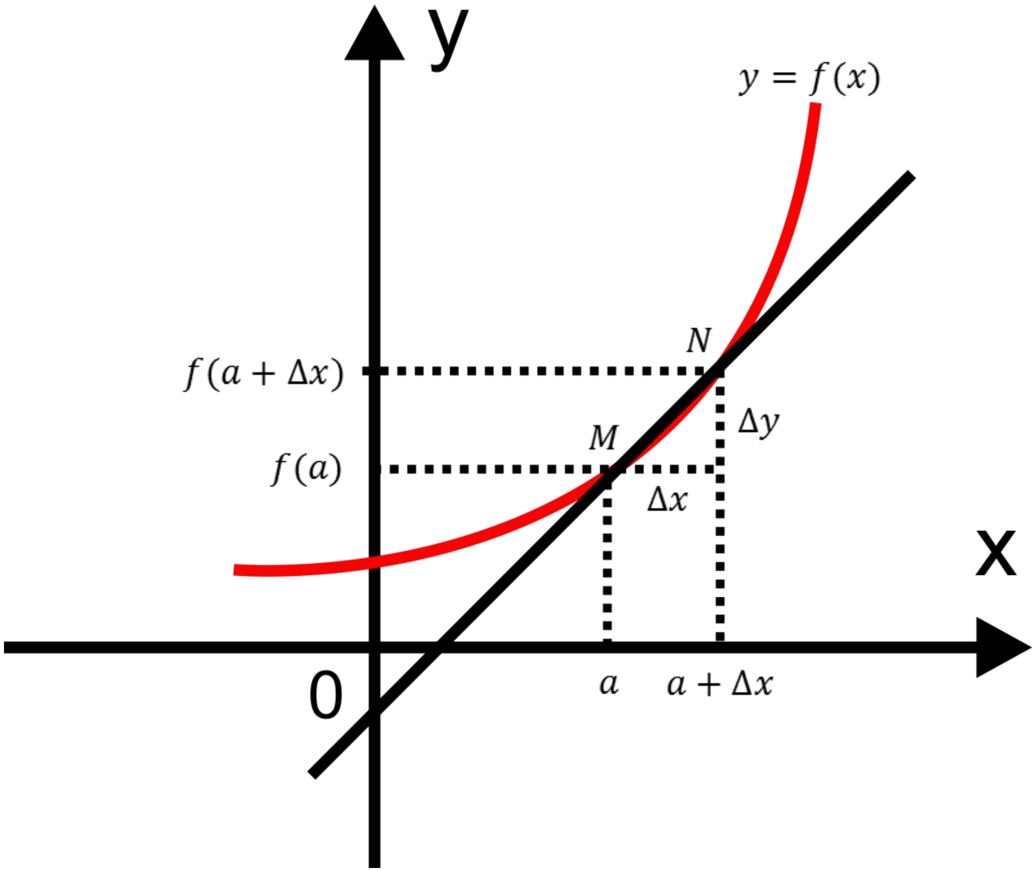
Задача 1 (о скорости движения).

Закон движения задан формулой $s = s(t)$.

1) $t: OL = s(t)$;
2) $t + \Delta t: OK = s(t + \Delta t)$;
3) $LK = OK - OL = s(t + \Delta t) - s(t), LK = \Delta s$;
4) $[t, t + \Delta t]$: $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$;
5) $v_t = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}$;
6) $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.




y
x
0
L
M
S
S_1
S_2
касательная



$$k_{\text{сек.}} = \frac{\Delta y}{\Delta x};$$

$$k_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек.}};$$

$$k_{\text{кас.}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Определение 1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в конкретной точке x и в некоторой её окрестности. Дадим аргументу x приращение Δx такое, чтобы не выйти из указанной окрестности. Найдём Δy и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при условии $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначают $f'(x)$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Для линейной функции $y = kx + m$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$.

Это означает, что $y' = k$ или, подробнее, $(kx + m)' = k$.

Для функции $y = x^3$ справедливо равенство $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2$.

Это означает, что $y' = 3\mathrm{x}^2$ или, подробнее, $(x^3)' = 3x^2$.

Физический смысл производной. Если $s(t)$ — закон прямолинейного движения тела, то производная выражает мгновенную скорость в момент времени t: $v = s'(t)$.

Геометрический смысл производной. Если к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = a$ можно провести касательную, непараллельную оси y, то $f'(a)$ — это есть угловой коэффициент касательной.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в конкретной точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$$

или

$$\Delta y \approx f'(x) \cdot \Delta x$$

$$y = x^3, \qquad \Delta y \approx 3x^2 \cdot \Delta x$$

Алгоритм отыскания производной (для функции $y = f(x)$)

1) Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.

2) Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.

3) Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

4) Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

5) Вычислить предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. Найти производную постоянной функции $y = C$.

Решение.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = C$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = C$.

3) $\Delta y = C - C = 0$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Ответ: $(C)' = 0$. ■

Пример 2. Найти производную постоянной функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = \frac{1}{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x+\Delta x}$.

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

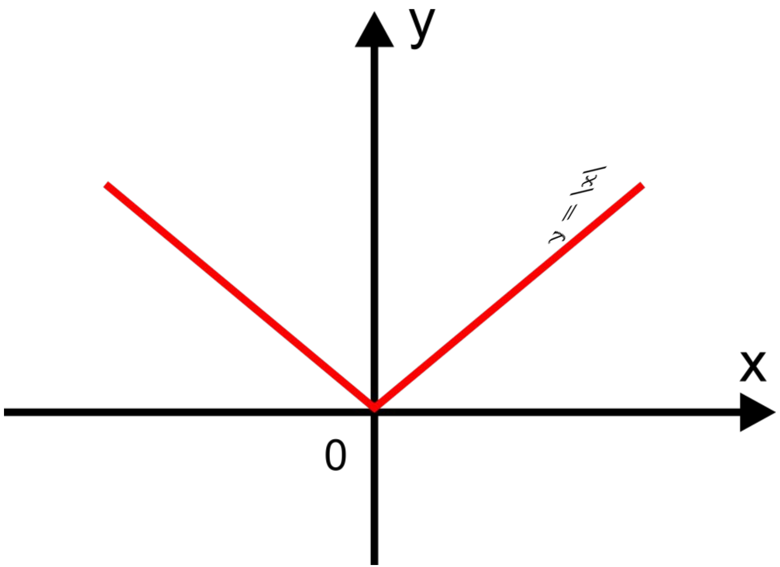
4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x+\Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$.

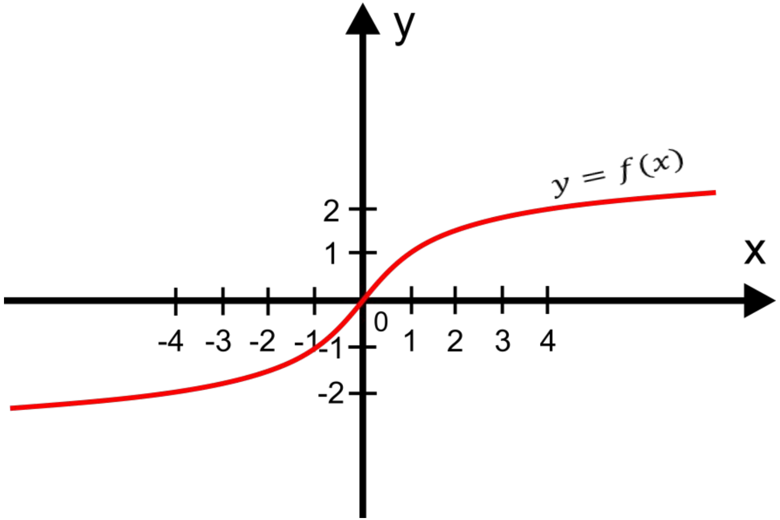
Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$. ◀■

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x, то её называют дифференцируемой в точке x. Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется дифференцированием функции $y = f(x)$.

Если функция дифференцируема в точке x, то она и непрерывна в этой точке. Обратное не верно.

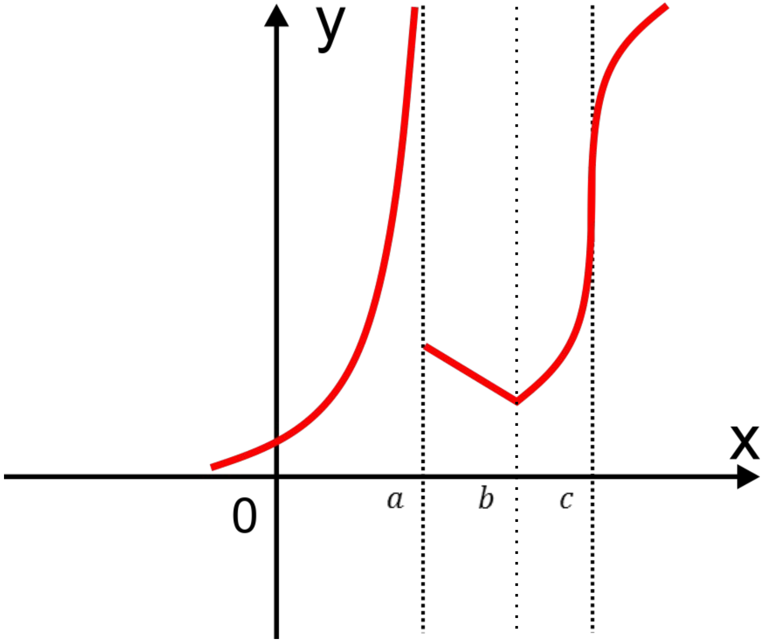


Функция $y = |x|$ непрерывна везде, и в точке $x = 0$, но касательной к графику функции в «точке стыка» (0; 0) не существует.



$$y = f(x), \text{где}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x}, \text{если } x < 0; \\ \sqrt{x}, \text{если } x \geq 0. \end{cases}$$



Функция непрерывна всюду, кроме точки $x = a$; функция дифференцируема всюду, кроме точек $x = a, x = b$ — здесь касательная не существует, $x = c$ — здесь касательная параллельна оси y.