Διδακτική Ενότητα Γ: Πιθανότητες

Ποσοτικές Μέθοδοι στην Οικονομία και Διοίκηση Ι

Εμμανουήλ Ζαχαριάδης
Επίκουρος Καθηγητής ΟΠΑ
email: ezach@aueb.gr

Ακαδημαϊκό Έτος 2017-2018

Πιθανότητα Ενδεχομένων

- Πείραμα με Δειγματικό Χώρο Ω
- Για κάθε ενδεχόμενο E του δειγματικού χώρου, μπορουμε να ορίσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου E, ως:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(E)}{n}$$

- $n(E)$: Ο αριθμός των φορών που συμβαίνει το E
- Διεξαγωγή του πειράματος άπειρες φορές καταγραφή του πόσες φορές συνέβη το E
- $P(E)$: Το οριακό ποσοστό του χρόνου για τον οποίο συμβαίνει το E (η οριακή συχνότητα του ενδεχομένου E)

Πιθανότητα Ενδεχομένων

- Βασικό Πλεονέκτημα του συχνοτικού ορισμού:
  - Διαισθητικά Ευχάριστος & κατανοήτος
- Μειονεκτήματα του συχνοτικού ορισμού:
  - Η ποσότητα $n(\mathrm{E})$ είναι βέβαιο πως συγκλίνει σε κάποια τιμή?
  - Αν ναι, είναι βέβαιο πως σε δύο διαφορετικές ακολουθίες άπειρων επαναλήψεων του πειράματος, η ποσότητα θα συγκλίνει στην ίδια τιμή;
  - Οι υπέρμαχοι του συχνοτικού ορισμού απαντούν στα παραπάνω ερωτήματα θέτοντας ως αξίωμα την συγκλιση της οριακής συχνότητας σε μία σταθερή τιμή
  - Τα αξιώματα αυτά είναι ασυνήθιστα πολύπλοκα
- Ακολουθούμε τη σύγχρονη αξιωματική προσέγγιση της θεωρίας των πιθανοτήτων
- Απλούστερα και περισσότερο αυταπόδεικτα αξιώματα

Πιθανότητα Ενδεχομένων

- Για κάθε ενδεχόμενο E στον δειγματικό χώρο Ω, ορίζουμε τη συνάρτηση $P(E)$ ως την πιθανότητα του ενδεχομένου E.
- Η πιθανότητα $P(E)$ ικανοποιεί τα παρακάτω τρία αξιώματα:

Αξίωμα 1	
Αξίωμα 2	
Αξίωμα 3	

Πιθανότητα Ενδεχομένων

- Το **Αξίωμα 1** ορίζει πως η πιθανότητα κάθε ενδεχομένου είναι ένας αριθμός μεταξύ του 0 και του 1
- Το **Αξίωμα 2** ορίζει πως η πιθανότητα να είναι το αποτέλεσμα του πειράματος στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με 1. (Το αποτέλεσμα του πειράματος είναι πάντα εντός του δειγματικού χώρου του πειράματος)
- Το **Αξίωμα 3** ορίζει πως για κάθε ακολουθία αλληλοαποκλειόμενων ενδεχομένων, η πιθανότητα να συμβεί τουλάχιστον ένα από αυτά είναι ίση με το άθροισμα των αντίστοιχων πιθανοτήτων τους.

Πιθανότητα Ενδεχομένων

- Στρίψιμο Νομίσματος
  - Δυνατά αποτελέσματα (Απλά Ενδεχόμενα): $\{\mathrm{K}, \Gamma\}$
  - <u>Υπόθεση 1</u>. Η πιθανότητα Κ είναι ίση με την πιθανότητα Γ

    $\Omega = \{K, \Gamma\}$, με $P(\Omega) = 1$

    $P(K) = P(\Gamma)$

    $P(\Omega) = P(K) + P(\Gamma) = 1 \Longrightarrow P(K) = P(\Gamma) = ½$
  - <u>Υπόθεση 2</u>. Το νόμισμα είναι πειραγμένο & η πιθανότητα του Γ είναι τετραπλάσια της πιθανότητας Κ

    $P(\Omega) = P(K) + P(\Gamma) = P(K) + 4\,P(K) = 1 \Longrightarrow$

    $P(K) = 0.2$ και $P(\Gamma) = 0.8$

Πιθανότητα Ενδεχομένων

- Ρίψη Ζαριού
  - Υπόθεση. Οι πλευρές του ζαριού είναι ισοπίθανες

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \mu\varepsilon\ P(\Omega) = 1$$

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6)$$

$$P(\Omega) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Longrightarrow P(i) = 1/6, \quad i = 1, \ldots, 6$$

Η πιθανότητα να φέρουμε κάθε i $(1 \leq i \leq 6)$ όταν ρίξουμε ένα δίκαιο ζάρι είναι ίση με $1/6$

Πιθανότητα Ενδεχομένων

- Ρίψη Ζαριού
  - Ποια η πιθανότητα το ζάρι να δείξει ζυγό αριθμό μικρότερο του 4?
  - Ενδεχόμενα που μας απασχολούν
    - $E1 = \{1, 2, 3\}$ (μικρότερο από 4)
    - $E2 = \{2, 4, 6\}$ (ζυγός αριθμός)
  - Ζητούμενο ενδεχόμενο:

$$E = E1 \cap E2 = \{2\}$$

$$P(E) = 1/6$$

Πιθανότητα Ενδεχομένων

- Ρίψη Ζαριού
  - Ποια η πιθανότητα το ζάρι να δείξει αριθμό μικρότερο του 4?
  - Ενδεχόμενο που μας απασχολεί $E = \{1, 2, 3\}$
  - $E = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$
  - Είναι τα ενδεχόμενα $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ αλληλοαποκλειόμενα?
    - $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$, $\{1\} \cap \{3\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset \Longrightarrow$ Ναι
    - Σχόλιο: Τα {1}, {2} και {3} αποτελούν αποτελέσματα του πειράματος (απλά ενδεχόμενα), επομένως είναι de facto αλληλοαποκλειόμενα (δε μπορούν να συμβούν ταυτόχρονα πάνω από ένα αποτελέσματα)
  - Κάνοντας χρήση του **Αξιώματος 3**, έχουμε:
    $$\mathrm{P(E)} = \mathrm{P}(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \mathrm{P}(3) = 3/6$$

Απλές Χρήσιμες Προτάσεις

- Πρόταση 1.

$$P(E) + P(E^C) = 1$$

Απόδειξη

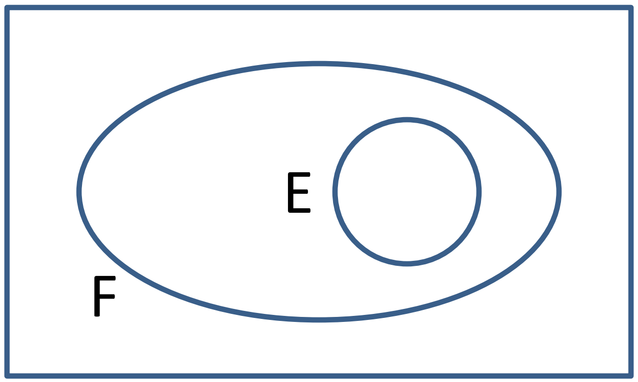
$$1 = P(\Omega) = P(E \cup E^C) = P(E) + P(E^C)$$

(Το ενδεχόμενο E είτε θα συμβεί είτε δε θα συμβεί)

Χρήσιμες Προτάσεις

Πρόταση 2.

Αν $E \subset F \implies P(E) \leq P(F)$



Απόδειξη

Εφόσον E ⊂ F,

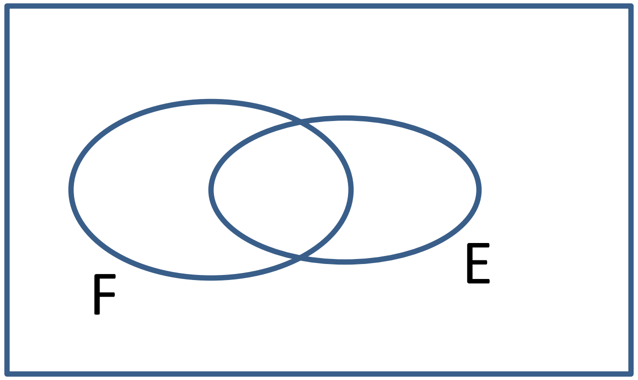
$F = E \cup (E^C \cap F)$ και επειδή τα E και $(E^C \cap F)$ είναι αλληλοαποκλειόμενα, έχουμε:

$P(F) = P(E) + P(E^C \cap F)$, που αποδεικνύει την πρόταση καθώς $P(E^C \cap F) \geq 0$

Χρήσιμες Προτάσεις

- Πρόταση 3.

$P\ (E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$



Απόδειξη:

$E \cup F = E \cup (E^C \cap F)$

Επόμένως,

$P(E \cup F) = P(E \cup (E^C \cap F)) = P(E) + P(E^C \cap F)$ (1)

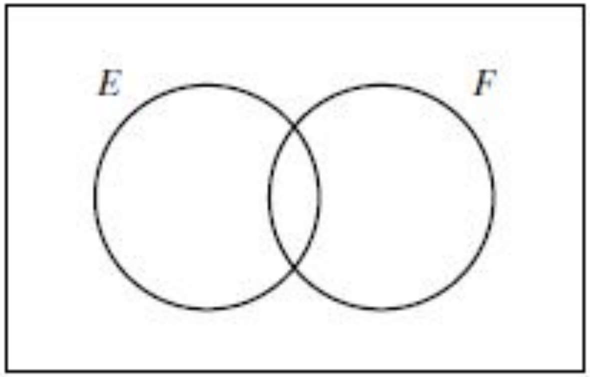
Επίσης, $F = (E \cap F) \cup (E^C \cap F)$

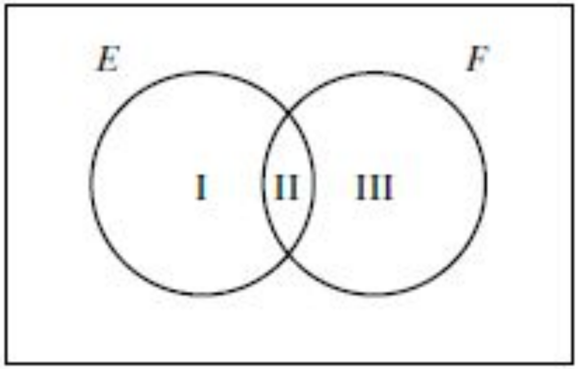
Επομένως, $P(F) = P(E \cap F) + P(E^C \cap F)$ (2)

Από (1) και (2) $\Longrightarrow$ $\mathrm{P}(E \cup F) = \mathrm{P(E)} + P(F) - P(E \cap F)$

Χρήσιμες Προτάσεις

<u>Απόδειξη Πρότασης 3 με χρήση διαγραμμάτων Venn</u>





Ορίζουμε τα αλληλοαποκλειόμενα I, II, III ως:

$I = E \cap F^C$

$II = E \cap F$

$III = E^C \cap F$

Έχουμε $E \cup F = I \cup II \cup III$,

με $E = I \cup II$ και $F = II \cup III$,

Τα I, II, III είναι αλληλοαποκλειόμενα $\Longrightarrow$

$P(E \cup F) = P(I \cup II \cup III) = P(I) + P(II) + P(III)$

$P(E) = P(I) + P(II)$

$P(F) = P(II) + P(III)$

Επομένως

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(II)$$
$$= P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Παραδείγμα 1

- Αγορά 2 παιχνιδιών
- Πιθανότητα το 1^{ο} παιχνίδι να μας αρέσει 0.7
- Πιθανότητα το 2^{ο} παιχνίδι να μας αρέσει 0.4
- Πιθανότητα να μας αρέσουν και τα δύο παιχνίδια είναι 0.2
- Ποια η πιθανότητα να μη μας αρέσει κανένα παιχνίδι?

Παράδειγμα 2

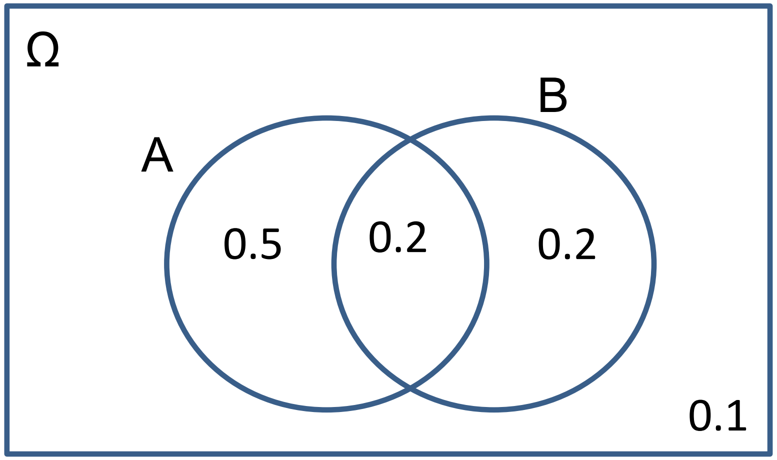
- <u>Λύση</u>
- Ορισμός ενδεχομένων
  - A: μας αρέσει το 1ο παιχνίδι
  - B: μας αρέσει το 2ο παιχνίδι
- $P(A) = 0.7, P(B) = 0.4, P(A \cap B) = 0.2$
- $A \cup B$: Το ενδεχόμενο να μας αρέσει κάποια από τα δύο παιχνίδια
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.2 = 0.9$
- Το ενδεχόμενο να μη μας αρέσει κανένα παιχνίδι

$$(A \cup B)^C \Longrightarrow P\left((A \cup B)^C\right) = 1 - P(A \cup B) =$$
$$= 1 - 0.9 = 0.1$$

Παράδειγμα 2

Γραφική Αναπαράσταση του προβλήματος

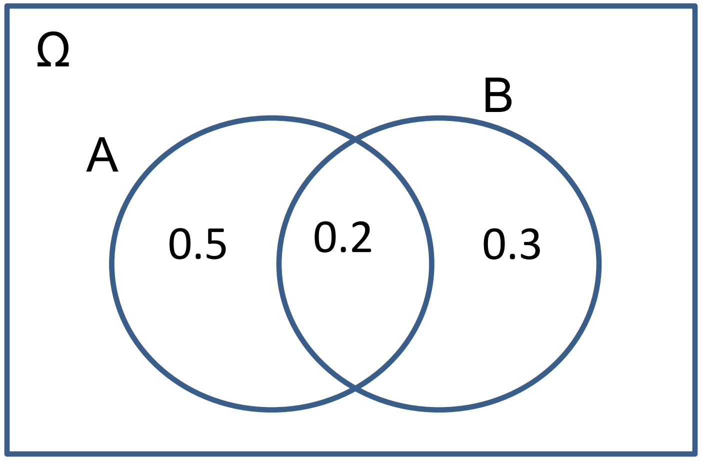
- $P(A) = 0.7$ & $P(B) = 0.4$ & $P(A \cap B) = 0.2$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.2 = 0.9$
- $P((A \cup B)^C) = 1 - 0.9 = 0.1$



Παράδειγμα 2

Αν η πιθανότητα το 2ο παιχνίδι να μας άρεσε ήταν **0.5**

- $P(A) = 0.7$ & $P(B) = \mathbf{0.5}$ & $P(A \cap B) = 0.2$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + \mathbf{0.5} - 0.2 = 1$
- $P((A \cup B)^C) = 1 - 1 = 0$



Ταυτότητα Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

- Η Πρόταση 3 μπορεί να γενικευθεί για ενώσεις περισσότερων των δύο συνόλων, ως έξής

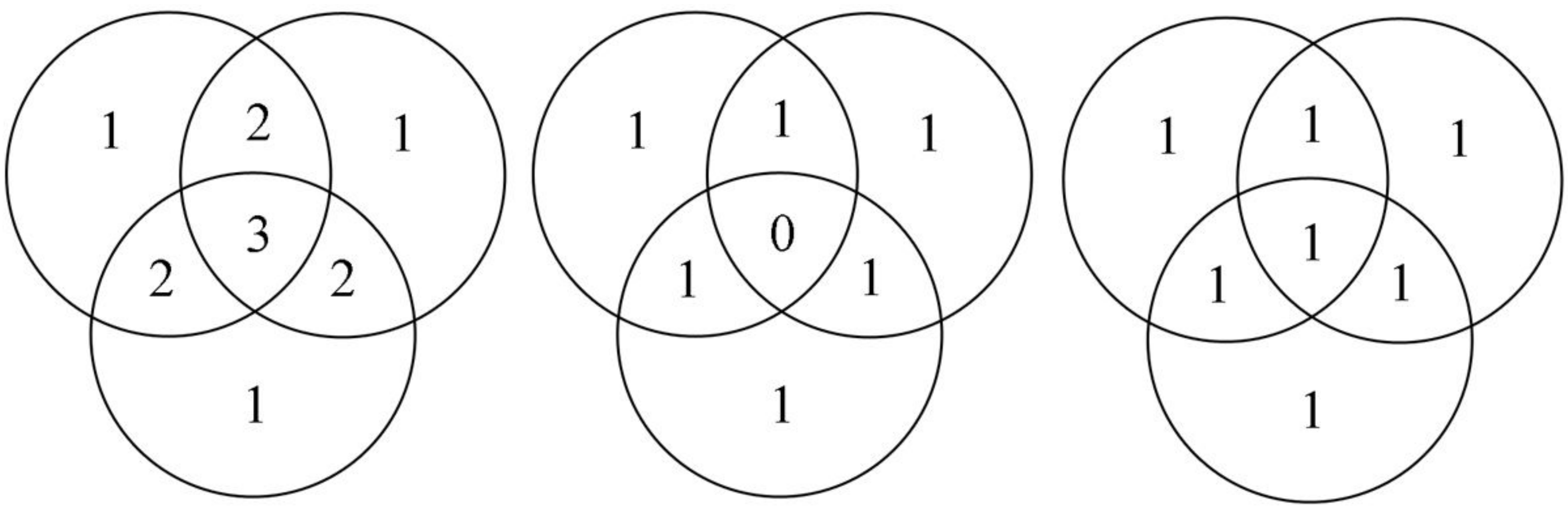
$$
\begin{aligned}
P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) &- \sum_{i_1<i_2} P(E_{i_1}E_{i_2}) + \cdots \\
&+ (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} P(E_{i_1}E_{i_2}\cdots E_{i_r}) \\
&+ \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1E_2\cdots E_n)
\end{aligned}
$$

- Το άθροισμα $\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_r} P(\bigcap_{j=1}^{n} E_{i_j})$ υπολογίζεται για όλους τους συνδυασμούς n ανά r του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Ταυτότητα Εγκλεισμού-Αποκλεισμού

- Ταυτότητα Εγκλεισμού-Αποκλεισμού για τρία σύνολα

$$P(E \cup F \cup G) =$$
$$P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F) - P(F \cap G) - P(E \cap G) + P(E \cap F \cap G)$$



P(*E*) + P(*F*) + P(*G*)

P(*E*) + P(*F*) + P(*G*) − P(*E* ∩ *F*) − P(*F* ∩ *G*) − P(*E* ∩ *G*)

P(*E*) + P(*F*) + P(*G*) − P(*E* ∩ *F*) − P(*F* ∩ *G*) − P(*E* ∩ *G*) + P(*E* ∩ *F* ∩ *G*)

Δειγματικοί Χώροι με Ισοπίθανα Ενδεχόμενα

- Σε πολλά προβλήματα όλα τα αποτελέσματα που περιέχονται στο δειγματικό χώρο είναι ισοπίθανα.
- Έστω, $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$ και $\mathrm{P}(\{1\}) = \mathrm{P}(\{2\}) = \ldots = \mathrm{P}(\{N\})$
- Επομένως (όπως είδαμε και στο παράδειμα του ζαριου) από τα Αξιώματα 2 και 3:
$$\mathrm{P}(i) = 1/N, \gamma\iota\alpha\ i = 1, 2, \ldots, N$$
- Επομένως, αν ένα ενδεχόμενο E περιέχει $|\mathrm{E}|$ αποτελέσματα και ο δειγματικός χώρος περιέχει $|N|$ αποτελέσματα:
$$\mathrm{P}(\mathrm{E}) = |\mathrm{E}|/|N|$$
- Αν τα αποτελέσματα ενός πειράματος είναι ισοπίθανα, τότε η πιθανότητα ενός ενδεχομένου E ισούται με το ποσοστό των αποτελεσμάτων του δειγματικού χώρου που ανήκουν στο E.

Παράδειγμα 3

<u>Πρόβλημα</u>

- Ρίψη Δύο Δίκαιων Εξάπλευρων Ζαριών.
- Ποια η πιθανότητα τα ζάρια να φέρουν άθροισμα 4?

Παράδειγμα 3

Πρόβλημα

- Ρίψη Δύο Δίκαιων Εξάπλευρων Ζαριών.
- Ποια η πιθανότητα τα ζάρια να φέρουν άθροισμα 4?

Λύση

- Δειγματικός Χώρος, $\Omega = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq 6\}$
- $|\Omega| = 36$, Τα 36 δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα εφόσον και τα δύο ζάρια είναι δίκαια
- Ορισμός Ενδεχομένου: $E = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$
- Ζητουμενη Πιθανότητα: $P(E) = |E|/|\Omega| = 3/36.$

Παράδειγμα 4

Πρόβλημα

- Σύνολο 10 ανθρώπων: 4 ανδρες & 6 γυναίκες
- Επιλέγεται ένας άνθρωπος τυχαία.
- Ποιά η πιθανότητα να είναι άνδρας?

Παράδειγμα 4

Πρόβλημα

- Σύνολο 10 ανθρώπων: 4 ανδρες & 6 γυναίκες
- Επιλέγεται ένας άνθρωπος τυχαία.
- Ποιά η πιθανότητα να είναι άνδρας?

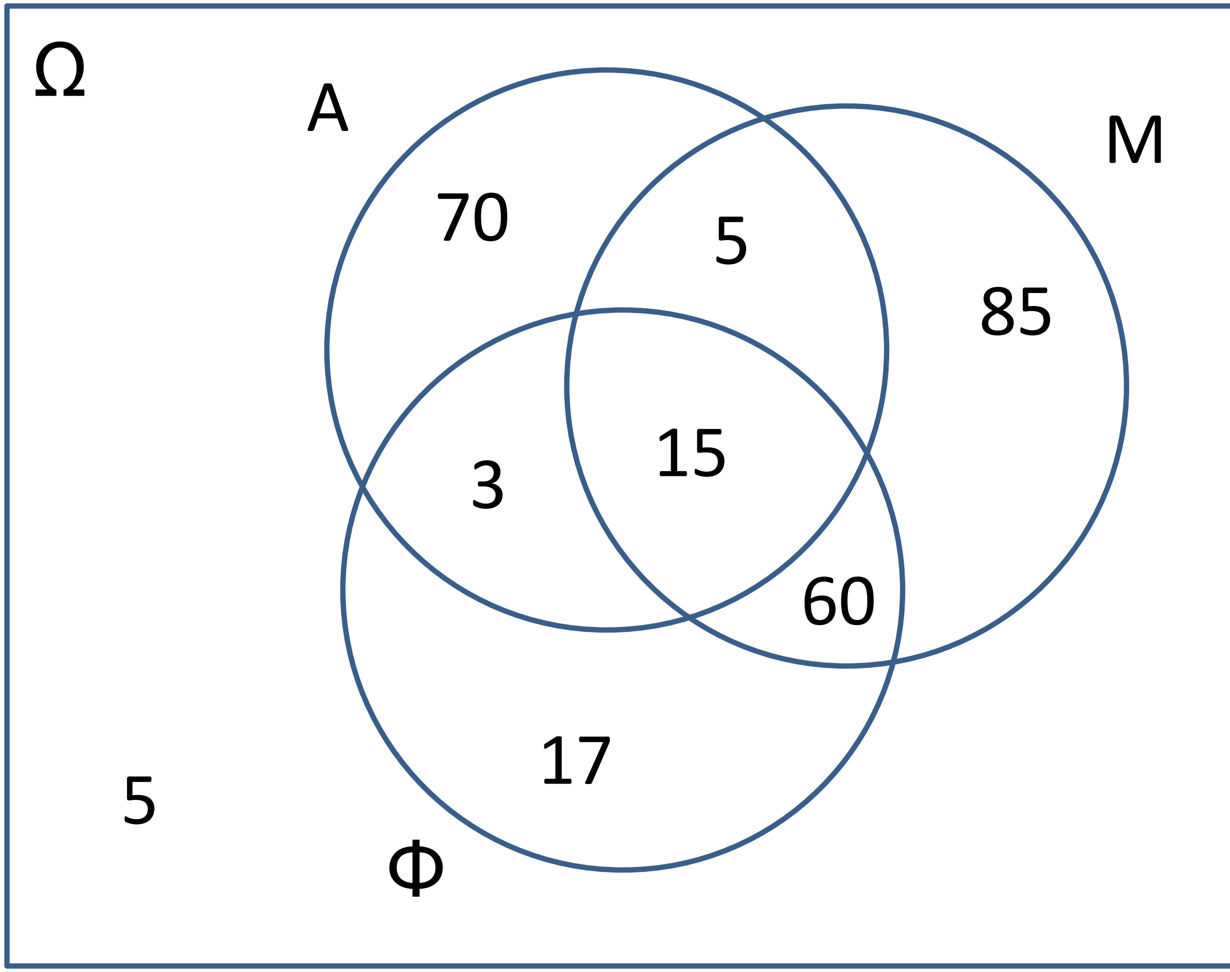
Λύση

- Δειγματικός Χώρος, $\Omega = \{1, 2, \dots, 10\}$
- $|\Omega|$ = 10, Τα 10 δυνατά ατομα να επιλεγούν
- Σύνολο ανδρών A & Σύνολο Γυναικών Γ
- Ορισμός Ενδεχομένων: $E = A = \{\cup_{i \in \mathrm{A}}\{i\}\}$
- Ζητουμενη Πιθανότητα: $\mathrm{P}(\mathrm{E}) = |\mathrm{E}|/|\Omega| = 4/10.$

Παράδειγμα 5

- Για μία τάξη 260 φοιτητών γνωρίζουμε τα παρακάτω :
  - 93 σπουδάζουν Αγγλικά
  - 95 σπουδάζουν Φυσική
  - 165 σπουδάζουν Μαθηματικά
  - 18 σπουδάζουν Αγγλικά και Φυσική
  - 75 σπουδάζουν Φυσική και Μαθηματικά
  - 20 σπουδάζουν Μαθηματικά και Αγγλικά
  - 15 φοιτητές σπουδάζουν Αγγλικα, Φυσική και Μαθηματικά
- Ποια η πιθανότητα ένας τυχαία επιλεγμένος φοιτητης να σπουδάζει α) Μαθηματικά, β) Μαθηματικά και Φυσική αλλά όχι Αγγλικά? γ) Μαθηματικά, Φυσική και Αγγλικά και δ) Μαθηματικά ή Αγγλικά ή Φυσική?

Παράδειγμα 5



$|A| = 93$
$|Φ| = 95$
$|M| = 165$
$|Ω| = 260$

Παράδειγμα 5

Λύση

- Ο δειγματικός μας χώρος αποτελείται από 260 άτομα, τα οποία θεωρούμε ισοπίθανα στο να επιλεγούν.
- Επομένως, κάθε άτομο *i* = 1, 2, …, 260, έχει πιθανότητα επιλογής 1/260.
- α) Ορίζουμε το ευνοϊκό ενδεχόμενο για το ερώτημα α:

  E_{α} : Επιλογή ενός φοιτητή που κάνει μαθηματικά

  $|\mathrm{E}_{\alpha}| = |\mathrm{M}| = 165 / 260$
- β) Ορίζουμε το ευνοϊκό ενδεχόμενο για το ερώτημα β:

  E_{β} : Επιλογή ενός φοιτητή που κάνει Μαθηματικά και Φυσική και δεν κάνει Αγγλικά

  $|\mathrm{E}_{\beta}| = |(\mathrm{M} \cap \Phi \cap \mathrm{A}^{C})| = 60 / 260$
- γ) Ορίζουμε το ευνοϊκό ενδεχόμενο για το ερώτημα γ:

  $E_{β}$: Επιλογή ενός φοιτητή που κάνει Μαθηματικά και Φυσική και Αγγλικά

  $|\mathrm{E}_{\beta}| = |(\mathrm{M} \cap \Phi \cap \mathrm{A})| = 15 / 260$

Παράδειγμα 5

Λύση (συνέχεια)

- δ) Ορίζουμε το ευνοϊκό Ενδεχόμενο για το ερώτημα δ:

E_δ : Επιλογή ενός φοιτητή που κάνει Μαθηματικά ή Φυσική ή Αγγλικά

$$|E_\delta| = |A \cup M \cup \Phi| = 255/260$$

$$P(E_\delta) = 255/260$$

Παράδειγμα 5

- Εναλλακτικά με χρήση της ταυτότητας εγκλεισμού-αποκλεισμού:

$$P(E_\delta) = P(A \cup M \cup \Phi) =$$

$$P(A) + P(M) + P(\Phi) - P(A \cap M) - P(A \cap \Phi) - P(M \cap \Phi) + P(A \cap M \cap \Phi) =$$

$$93/265 + 95/165 + 165/265 - 20/265 - 18/265 - 75/265 + 15/265 = 255 / 260$$

- Πρακτικά η ταυτότητα εγκλεισμού-απόκλεισμού κάνει τους ακριβώς τους υπολογισμούς που κάναμε με τη βοήθεια του διαγράμματος Venn για να καθορίσουμε τον πληθικό αριθμό των διάφορων τομών

Παράδειγμα 6

Πρόβλημα

- Σύνολο 10 ανθρώπων: 4 ανδρες & 6 γυναίκες
- Επιλέγονται δύο άνθρωποι τυχαία.
- Ποιά η πιθανότητα να είναι και οι δύο άνδρες?

Παράδειγμα 6

Πρόβλημα

- Σύνολο 10 ανθρώπων: 4 ανδρες & 6 γυναίκες
- Επιλέγονται δύο άνθρωποι τυχαία.
- Ποιά η πιθανότητα να είναι και οι δύο άνδρες?

Λύση (Διατάξεις)

- Δειγματικός Χώρος Ω: Όλες οι δυνατές διατάξεις δύο ανθρώπων
- $|\Omega| = 10!/(10-2)! = 90$
- Ορισμός Ευνοϊκού Ενδεχόμενου: Ε = {όλες οι διατάξεις δύο ανδρών}
- $|E| = 4!/(4-2)! = 12$
- Ζητουμενη Πιθανότητα: $P(E) = |E|/|\Omega| = 12/90.$

Παράδειγμα 6

Πρόβλημα

- Σύνολο 10 ανθρώπων: 4 άνδρες & 6 γυναίκες
- Επιλέγονται δύο άνθρωποι τυχαία
- Ποιά η πιθανότητα να είναι και οι δύο άνδρες;

Λύση (Συνδυασμοί)

- Δειγματικός Χώρος Ω: Όλοι δυνατοί συνδυασμοί $\binom{10}{2}$ επιλεγμένων ανθρώπων
- $|\Omega| = 10!/(8! \times 2!) = 45$
- Ορισμός Ευνοϊκού Ενδεχόμενου: Ε = {όλοι οι συνδυασμοί δύο ανδρών}
- $|\mathrm{E}| = \binom{4}{2} = 6$
- Ζητούμενη Πιθανότητα: $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\Omega| = 6/45.$

Παράδειγμα 7

<u>Πρόβλημα</u>

- Σύνολο 10 ανθρώπων: 4 ανδρες & 6 γυναίκες
- Επιλέγονται δύο άνθρωποι τυχαία.
- Ποιά η πιθανότητα να να επιλεγούν ένας άνδρας και μία γυναίκα?

Παράδειγμα 7

Πρόβλημα

- Σύνολο 10 ανθρώπων: 4 ανδρες & 6 γυναίκες
- Επιλέγονται δύο άνθρωποι τυχαία.
- Ποιά η πιθανότητα να να επιλεγούν ένας άνδρας και μία γυναίκα?

Λύση (με διατάξεις)

- Δειγματικός Χώρος Ω: Δυνατές διατάξεις των δύο ατόμων
- $|\Omega| = 10 \times 9 = 90$
- Ορισμός Ευνοϊκού Ενδεχόμενου E: όλες οι διατάξεις που έχουν πρώτη γυναίκα και δεύτερο άνδρα ή πρώτο άνδρα και δεύτερη γυναίκα
- $|\mathrm{E}| = 6 \times 4 + 4 \times 6 = 48$
- Ζητουμενη Πιθανότητα: $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\Omega| = 48/90$
- $\mathrm{E1}$: Άτομο 1 Γυναίκα και Άτομο 2 Ανδρας
- $\mathrm{E2}$: Άτομο 1 Άνδρας και Άτομο 1 Γυναίκα
- Εναλλακτικά, $\mathrm{P(E)} = \mathrm{P(E1 \cup E2)} = \mathrm{P(E1)} + \mathrm{P(E2)} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90}$
  - $\mathrm{E1}$ και $\mathrm{E2}$ αλληλοαποκλειόμενα

Παράδειγμα 7

Πρόβλημα

- Σύνολο 10 ανθρώπων: 4 ανδρες & 6 γυναίκες
- Επιλέγονται δύο άνθρωποι τυχαία.
- Ποιά η πιθανότητα να να επιλεγούν ένας άνδρας και μία γυναίκα?

Εναλλακτική Λύση (με συνδυασμούς)

- Δειγματικός Χώρος Ω: δυνατοί συνδυασμοί $\binom{10}{2}$ επιλεγμένων ανθρώπων
- $|\Omega| = 10!/(8!\ 2!) = 45$
- Ορισμός Ευνοϊκού Ενδεχόμενου: E = {όλοι οι συνδυασμοί ενός άνδρα και μίας γυναίκας}
- $|\mathrm{E}| = \binom{4}{1}\binom{6}{1} = 24$
- Ζητουμενη Πιθανότητα: $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\Omega| = 24/45 = 48/90$

Παράδειγμα 8

Πρόβλημα

- Ρίψη Δύο Δίκαιων Εξάπλευρων Ζαριών.
- Ποια η πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον ένα έξι?

Λύση

- Δειγματικός Χώρος, $\Omega = \{(i,j) \mid 1 \leq i,j \leq 6\}$
- $|\Omega| = 36$, Τα 36 δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα εφόσον και τα δύο ζάρια είναι δίκαια
- Ορισμός Ενδεχομένου:
$$\mathrm{E} = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)\}$$
- Ζητουμενη Πιθανότητα: $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\Omega| = 11/36.$

Παράδειγμα 8

<u>Εναλλακτική Λύση</u>

- Δειγματικός Χώρος, $\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$
- Ορισμός Ενδεχομένων:

$$\mathrm{E1}: \text{Το πρώτο ζάρι να φέρει 6}$$

$$\mathrm{E2}: \text{Το δεύτερο ζάρι να φέρει 6}$$

$$\mathrm{E} = \mathrm{E1} \cup \mathrm{E2}$$

- Ζητουμενη Πιθανότητα:

$$P(E) = P(E1 \cup E2) = P(E1) + P(E2) - P(E1 \cap E2) = 6/36 + 6/36 - 1/36 = 11/36$$

Παράδειγμα 9

- Ρίψη Ζαριού 5 φορές
- Ποια η πιθανότητα να μη φέρω κανένα 1?

- <u>Ορισμός Ενδεχομένων</u>
- Ε: Δε φέρνω 1 σε καμία ρίψη
- Ε1: Φέρνω 1 στην $1^η$ ρίψη
- Ε2: Φέρνω 1 στη $2^η$ ρίψη
- Ε3: Φέρνω 1 στην $3^η$ ρίψη
- Ε4: Φέρνω 1 στην $4^η$ ρίψη
- Ε5: Φέρνω 1 στην $5^η$ ρίψη

Παράδειγμα 9

- Ρίψη Ζαριού 5 φορές
- Ποια η πιθανότητα να μη φέρω κανένα 1?
- <u>Ορισμός Ενδεχομένων</u>
- Ε: Δε φέρνω σε καμία ρίψη
- Ε1: Φέρνω 1 στην $1^η$ ρίψη
- Ε2: Φέρνω 1 στη $2^η$ ρίψη
- Ε3: Φέρνω 1 στην $3^η$ ρίψη
- Ε4: Φέρνω 1 στην $4^η$ ρίψη
- Ε5: Φέρνω 1 στην $5^η$ ρίψη

$$\mathrm{P(E)} = P\Big((E1 \cup E2 \cup E3 \cup E4 \cup E5)^C\Big) =$$
$$= 1 - P(E1 \cup E2 \cup E3 \cup E4 \cup E5)$$

Παράδειγμα 9

- Με χρήση ταυτότητας εγκλεισμού-αποκλεισμού

$$P(E1 \cup E2 \cup E3 \cup E4 \cup E5) =$$
$$\mathrm{P(E1)+P(E2)+P(E3)+P(E4)+P(E5)}$$
$$-[\mathrm{P}(\mathrm{E1} \cap E2) + \mathrm{P}(\mathrm{E1} \cap E3) + \mathrm{P}(\mathrm{E1} \cap E4) + \ \ldots + \mathrm{P}(\mathrm{E4} \cap E5)]$$
$$+ [\mathrm{P}(\mathrm{E1} \cap E2 \cap E3) + \mathrm{P}(\mathrm{E1} \cap E2 \cap E4) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{E3} \cap E4 \cap E5)]$$
$$-[\mathrm{P}(\mathrm{E1} \cap E2 \cap E3 \cap E4) + \mathrm{P}(\mathrm{E1} \cap E2 \cap E3 \cap E5) + \cdots + \mathrm{P}(\mathrm{E2} \cap E3 \cap E4 \cap E5)]$$
$$+[\mathrm{P}(\mathrm{E1} \cap E2 \cap E3 \cap E4 \cap E5)] =$$

$$5 \times \frac{1}{6} - \left[\binom{5}{2} \times \frac{1}{6^2}\right] + \left[\binom{5}{3} \times \frac{1}{6^3}\right] - \left[\binom{5}{4} \times \frac{1}{6^4}\right] + \left[\binom{5}{5} \times \frac{1}{6^5}\right] =$$
$$5 \times \frac{1}{6} - \left[10 \times \frac{1}{6^2}\right] + \left[10 \times \frac{1}{6^3}\right] - \left[5 \times \frac{1}{6^4}\right] + \left[1 \times \frac{1}{6^5}\right] =$$
$$\frac{6480}{7776} - \frac{2160}{7776} + \frac{360}{7776} - \frac{30}{7776} + \frac{1}{7776} = \frac{4651}{7776}$$

- Επομένως, $P(E) = 1 - \frac{4651}{7776} = \frac{3125}{7776}$

Παράδειγμα 9

- Εναλλακτικά,
- Δειγματικός χώρος, $\Omega = \{(a, b, c, d, e) \mid 1 \leq a, b, c, d, e \leq 6\}$
- Όλα τα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα.
- $|\Omega| = 6^5$

- Ενδεχόμενο Ε: Κανένα 1 στις 5 ρίψεις,
  $\mathrm{E} = \{(a, b, c, d, e) \mid 2 \leq a, b, c, d, e \leq 6\}, |\mathrm{E}| = 5^5$

- Επομένως,

$$P(E) = \frac{5^5}{6^5} = \frac{3125}{7776}$$

Παράδειγμα 10

<u>Πρόβλημα</u>

- Σε μία κούρσα 8 δρομέων (A, B, C.., H) θεωρούμε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα
- Ποιά η πιθανότητα να κερδίσει ο Α?

Παράδειγμα 10

Πρόβλημα

- Σε μία κούρσα 8 δρομέων (A, B, C.., H) θεωρούμε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα
- Ποιά η πιθανότητα να κερδίσει ο A?

Λύση

- Εφόσον όλα τα δύνατα αποτελέσματα είναι ισοπίθανα, κι οι 8 δρομείς μοιράζονται την ίδια πιθανότητα να νικήσουν
- $\Omega = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, C.., \mathrm{H}\}$, το σύνολο των δυνατών νικητών
- Ενδεχόμενο νίκης A: $\mathrm{E} = \{\mathrm{A}\}$
- $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\mathrm{A}| = 1/8$

Παράδειγμα 10

Πρόβλημα

- Σε μία κούρσα 8 δρομέων (A, B, C.., H) θεωρούμε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα
- Ποιά η πιθανότητα να κερδίσει ο A?

Εναλλακτική Λύση

- Δειγματικός χώρος Ω: Σειρά κατάταξης του A
- $\Omega = \{1, 2, \dots, 8\}$ με όλα τα ενδεχόμενα ισοπίθανα
- Ενδεχόμενο νίκης A: $\mathrm{E} = \{1\}$
- $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\Omega| = 1/8$

Παράδειγμα 10

<u>Πρόβλημα</u>

- Σε μία κούρσα 8 δρομέων (A, B, C.., H) θεωρούμε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα
- Ποιά η πιθανότητα να κερδίσει ο A?

<u>Εναλλακτική Λύση (Διατάξεις)</u>

- Δειγματικός χώρος: τελική κατάταξη κούρσας
- Ω = {Οι διατάξεις των 8 δρομέων}
- Ενδεχόμενο νίκης A: E = {Οι διατάξεις των 7 χαμένων (B, …,H)}
- $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\Omega| = 7!/8! = 1/8$

Παράδειγμα 11

Πρόβλημα

- Σε μία κούρσα 8 δρομέων (A, B, C.., H) θεωρούμε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα
- Ποια η πιθανότητα να ανέβουν στο βάθρο οι A, B και C?

Παράδειγμα 11

Πρόβλημα

- Σε μία κούρσα 8 δρομέων (A, B, C.., H) θεωρούμε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα
- Ποια η πιθανότητα να ανέβουν στο βάθρο οι A, B και C?

Λύση (Διατάξεις)

- Δειγματικός χώρος: τελική κατάταξη κούρσας
- Ω = {Οι διατάξεις των 8 δρομέων}
- Ευνοϊκό Ενδεχόμενο E = {Οι διατάξεις με ABC στις τρεις πρώτες θέσεις}
- $|\mathrm{E}| = 3!\ 5!$ (οι δυνατες διατάξεις των νικητών επί τις δυνατές διατάξεις των χαμένων)
- $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\Omega| = (3!\ 5!)/8!$

Παράδειγμα 11

Πρόβλημα

- Σε μία κούρσα 8 δρομέων (A, B, C.., H) θεωρούμε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα
- Ποια η πιθανότητα να ανέβουν στο βάθρο οι A, B και C?

Λύση (Εναλλακτική προσέγγιση με διατάξεις)

- Δειγματικός χώρος: Οι δυνατές τριάδες των νικητών
- Ω = {Οι διατάξεις 3 από τους 8 δρομείς}, $|\Omega| = 8\ 7\ 6 = \frac{8!}{(8-3)!}$
- Ευνοϊκό Ενδεχόμενο E = {Οι διατάξεις με ABC στις τρεις πρώτες θέσεις}
- $|\mathrm{E}| = 3!$ (οι δυνατες διατάξεις των νικητών επί τις δυνατές διατάξεις των χαμένων)
- $\mathrm{P}(\mathrm{E}) = \frac{|\mathrm{E}|}{|\Omega|} = \frac{3!}{\frac{8!}{(8-3)!}} = \frac{3!\ 5!}{8!}$

Παράδειγμα 11

Πρόβλημα

- Σε μία κούρσα 8 δρομέων (A, B, C.., H) θεωρούμε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα
- Ποια η πιθανότητα να ανέβουν στο βάθρο οι A, B και C?

Εναλλακτική Λύση (Συνδυασμοί)

- Δειγματικός χώρος: Όλα τα σύνολα τριών δρομέων
- Ω = {Οι συνδυασμοί των 8 δρομέων ανα τρεις}
- Ευνοϊκό Ενδεχόμενο $\mathrm{E} = \{(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})\}$
- $|\mathrm{E}| = 1$ (ο ένα συνδυασμός $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$)
- $\mathrm{P}(\mathrm{E}) = |\mathrm{E}|/|\Omega| = 1 \,/ \binom{8}{3} = (3!\ 5!)/8!$

Παράδειγμα 11

Πρόβλημα

- Σε μία κούρσα 8 δρομέων (A, B, C.., H) θεωρούμε πως όλα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα
- Ποια η πιθανότητα να ανέβουν στο βάθρο οι A B και C?

Εναλλακτική Λύση (Διατάξεις σειράς κατάταξης)

- Δειγματικός χώρος: Οι διατάξεις της σειράς κατάταξης των (A, B, C),

  π.χ. (4, 2, 3), (7, 4, 1)...
- Ω = {Οι διατάξεις τριών σειρών κατάταξης}, $|\Omega| = 8\ 7\ 6 = \frac{8!}{(8-3)!}$
- Ευνοϊκό Ενδεχόμενο E = {Οι διατάξεις των 1, 2, 3 }
- $|\mathrm{E}| = 3!$
- $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\Omega| = 3!/(8\ 7\ 6) = 1\ / = (3!\ 5!)/8!$

Παράδειγμα 12

Πρόβλημα

- 6 παιδιά (A, B, C, D, E, F) θα μπουν τυχαία σε μία σειρά για να πάρουν το δεκατιανό τους
- Ποια η πιθανότητα το παιδί F να πάρει το φαγητό του νωρίτερα από το παιδί B και το παιδί B να πάρει το φαγητό του νωρίτερα από το παιδί D;

Λύση

- Δειγματικός χώρος: Οι μεταθέσεις των 6 παιδιών, $|\Omega| = 6!$
- Ευνοϊκό ενδεχόμενο E: Οι μεταθέσεις των παιδιών στις οποίες το F προηγείται του B και το B προηγείται του H
- Πόσες είναι αυτές οι μεταθέσεις;

Παράδειγμα 12

Λύση (συνέχεια)

Θα κατασκευάσουμε τις μεταθέσεις ως εξής:

1. Αρχικά θα επιλέξουμε τους συνδυασμούς θέσεων για τα A, C, E.

   Επιλέγουμε μία τριάδα θέσεων από τις έξι δυνατές $\binom{6}{3}$.

   Π.χ. _ _ X _ X X

2. Τοποθετούμε τα παιδιά A, C, E στις επιλεγμένες θέσεις:

   Όλες οι δυνατές τους διατάξεις $3!$:

   Π.χ. _ _ A _ C E, _ _ C _ A E, _ _ E _ C A,…

3. Τοποθετούμε τα υπόλοιπα παιδιά F, B, D, έτσι ώστε να ικανοποιείται το ενδεχόμενο E;

   Πόσοι τρόποι υπάρχουν; Μόνο ένας! Ορίζεται από το Ενδεχόμενο E

Επομένως, οι συνολικές διατάξεις που ικανοποιούν το ενδεχόμενο E έχουν πλήθος:

$$|\mathrm{E}| = \binom{6}{3} \times 3! \times 1$$

Άρα,

$$P(E) = \frac{\binom{6}{3} \times 3! \times 1}{6!} = \frac{1}{3!}$$

Παράδειγμα 12

<u>Εναλλακτική Λύση</u>

Πολλές φορές μπορούμε να επικεντρωθούμε, μόνο στο ενδεχόμενο που μας απασχολεί.

Ανεξάρτητα του πως θα μπουν στην ουρά όσα παιδία δεν εμπλέκονται στο εξεταζόμενο ενδεχόμενο, τα τρία παιδιά F, B, και D θα μπουν στην ουρά έχοντας μία μεταξύ τους διάταξη.

Άρα, ο δειγματικός χώρος μπορεί να γίνει αντιληπτός ως οι 3! διατάξεις των τριών παιδιών που μας ενδιαφέρουν. $|\Omega| = 3!$

Είναι τα ενδεχόμενα (οι διατάξεις των τριών παιδιών) στο Ω ισοπίθανα;

Ναι, καθώς με όσους τρόπους μπορεί ο F να προηγείται του B και ο B να προηγείται του D, με τόσους τρόπους μπορεί ο B να προηγείται του F και ο F να προηγείται του D, κοκ. (ορίζονται από τις διατάξεις των υπόλοιπων παιδιών.)

Επομένως, $\mathrm{P(E)} = \frac{1}{3!}$

Παράδειγμα 13

<u>Πρόβλημα</u>

- Δέκα κουτιά και ένα από αυτά έχει το μοναδικό δώρο
- Κάθε κουτί έχει την ίδια πιθανότητα να έχει το δώρο
- Επιλέγουμε τρία κουτιά
- Ποια η πιθανότητα να κερδίσουμε το δώρο;

Παράδειγμα 13

Λύση

- Αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα με χρήση συνδυασμών
- Δειγματικός Χώρος Ω: Όλες οι τριάδες κουτιών που μπορούμε να επιλέξουμε.
- $|\Omega| = \binom{10}{3}$
- Ευνοϊκό Ενδεχόμενο E: Επιλογή μίας τριάδας η οποία περιέχει το κουτί με το δώρο. Πόσες είναι οι τριάδες που περιέχουν το κουτί με το δώρο;
  - Είναι όλοι οι συνδυασμοί που περιέχουν το σωστό κουτί και 2 από τα υπόλοιπα 9 κουτιά
  - $|\mathrm{E}| = 1 \times \binom{9}{2}$
- Επομένως: $P(E) = \frac{\binom{9}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$

Παράδειγμα 13

Λύση (Εναλλακτική προσέγγιση)

- Το Ενδεχόμενο να κερδίσουμε το δώρο επιλέγοντας 3 κουτιά, ταυτίζεται με την ένωση των ενδεχομένων να κερδίσουμε το δώρο με το 1ο επιλεγμένο κουτί ($E1$), να κερδίσουμε το δώρο με το 2ο επιλεγμένο κουτί ($E2$) και να κερδίσουμε το δώρο με το 3ο επιλεγμένο κουτί (Ε3)
- Υπολογισμός $P(E1)$
  - Δειγματικός Χώρος Ω: Το σύνολο των 10 επιλογών (10 κουτιών), $|\Omega| = 10$
  - Ευνοϊκό Ενδεχόμενο Ε: Η επιλογή του σωστού κουτιού (ένα κουτί με το δώρο), $|E| = 1$
- Προφανώς, $P(E1)$= $P(E2)$= $P(E3)$
- Είναι τα ενδεχόμενα $E1$, $E2$ και $E3$ αλληλοαποκλειόμενα;
  - Ναι, θεωρούμε πως έχουμε επιλέξει τρία διαφορετικά κουτιά, επομένως μόνο ένα από τα τρία ενδεχόμενα μπορεί να συμβεί.
- Επομένως:

$$P(E) = P(E1 \cup E2 \cup E3) = P(E1) + P(E2) + P(E3) = 3/10$$

Παράδειγμα 14

<u>Πρόβλημα</u>

- Μία πενταμελής ομάδα φοιτητών πρόκειται να σχηματιστεί τυχαία από ένα σύνολο 6 αντρών και 9 γυναικών
- Ποια η πιθανότητα η επιτροπή να σχηματίζεται από τρεις αντρες & δύο γυναίκες?

Παράδειγμα 14

Πρόβλημα

- Μία πενταμελής ομάδα φοιτητών πρόκειται να σχηματιστεί τυχαία ένα σύνολο 6 αντρών και 9 γυναικών
- Ποια η πιθανότητα η επιτροπή να σχηματίζεται από τρεις αντρες & δύο γυναίκες?

Λύση Α

- Δειγματικός χώρος Ω: Όλες οι δυνατες πενταμελείς επιτροπές, $|\Omega| = \binom{15}{5}$.
- Ευνοικό ενδεχόμενο Ε: Τα πενταμελή σύνολα με τρεις άντρες και δύο γυναίκες
- Υπολογισμός |Ε|:
  - Πόσοι συνδυασμοί τριών αντρών? Οι συνδυασμοί $\binom{6}{3}$
  - Πόσοι συνδυασμοί δύο γυναικών? Οι συνδυασμοί $\binom{9}{2}$
- $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E}|/|\Omega| = (\binom{6}{3}\binom{9}{2})/\binom{15}{5} = (36\ 20)/3003 = 720/3003$

Παράδειγμα 15

Πρόβλημα

- Επιλέγουμε τυχαία τρεις μπάλες από ένα δοχείο με τέσσερεις μαύρες και πέντε λευκές
- Ποια η πιθανότητα να έχουμε τραβήξει μία λευκή και δύο μαύρες μπάλες

Παράδειγμα 15

<u>Πρόβλημα</u>

- Επιλέγουμε τυχαία τρεις μπάλες από ένα δοχείο με τέσσερεις μαύρες και πέντε λευκές
- Ποια η πιθανότητα να έχουμε τραβήξει μία λευκή και δύο μαύρες μπάλες

<u>Λύση</u>

- Λαμβάνουμε υπόψιν τη σειρά με την οποία εξάγονται οι μπάλες
- Δειγματικός Χώρος, $\Omega = \{(i, j, k) \mid i \neq j, i \neq k, j \neq k, 1 \leq i, j \leq 9\}$ =

  {'Ολες οι διατάξεις τριών από τις εννέα μπάλες}
- $|\Omega| = 9\ 8\ 7 = 504$. Τα 504 αποτελέσματα είναι ισοπίθανα εφόσον η επιλογή γίνεται τυχαία
- Ορισμός Τριών Ενδεχομένων:

Ε1: Η πρώτη λευκή και οι δεύτερη και τρίτη μαύρες

Ε2: Η πρώτη μαύρη, η δεύτερη λευκή και η τρίτη μαύρη

Ε3: Η πρώτη και η δεύτερη μαύρες και η τρίτη λευκή

Προφανώς αλληλοαποκλειόμενα!

Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $\mathrm{E} = \mathrm{E}1 \cup \mathrm{E}2 \cup \mathrm{E}3$

Παράδειγμα 15

<u>Λύση Α</u>

- Υπολογισμός $P(E1)$
  - Υπολογισμός $|E1|$
  - Πόσες επιλογές για την πρώτη λευκή? 5
  - Πόσες επιλογές για τη δεύτερη μαύρη? 4
  - Πόσες επιλογές για την τρίτη μαύρη? 3
  - $P(E1) = |E1| / |\Omega| = 5\ 4\ 3 / 504 = 60 / 504$
- Υπολογισμός $P(E2)$
  - Υπολογισμός $|E2|$
  - Πόσες επιλογές για την πρώτη μαύρη? 4
  - Πόσες επιλογές για τη δεύτερη λευκή? 5
  - Πόσες επιλογές για την τρίτη μαύρη? 3
  - $P(E2) = |E2| / |\Omega| = 4\ 5\ 3 / 504 = 60 / 504$

Παράδειγμα 15

Λύση Α

- Υπολογισμός $\mathrm{P(E3)}$
  - Υπολογισμός $|\mathrm{E3}|$
  - Πόσες επιλογές για την πρώτη μαύρη? 4
  - Πόσες επιλογές για τη δεύτερη μαύρη? 3
  - Πόσες επιλογές για την τρίτη λευκή? 5
  - $\mathrm{P(E3)} = |\mathrm{E3}| / |\Omega| = 5\ 4\ 3 / 504 = 60 / 504$

- $P(\mathrm{E}) = \mathrm{P(E1} \cup \mathrm{E2} \cup \mathrm{E3)} = 180 / 504 = 30 / 84$

Παράδειγμα 15

Πρόβλημα

- Επιλέγουμε τυχαία τρεις μπάλες από ένα δοχείο με τέσσερεις μαύρες και πέντε λευκές
- Ποια η πιθανότητα να έχουμε τραβήξει μία λευκή και δύο μαύρες μπάλες

Εναλλακτική Λύση (Συνδυασμοί)

- Δε λαμβάνουμε υπόψιν τη σειρά με την οποία εξάγονται οι μπάλες
- Δειγματικός Χώρος, $\Omega = \{(i,j,k) | i < j < k, 1 \leq i, j, k \leq 9\}$ = {Οι συνδιασμοί τριών από εννέα μπάλες}
- $|\Omega| = \binom{9}{3} = 9!/(3!\ 6!) = 84$. Τα 84 αποτελέσματα είναι ισοπίθανα εφόσον η επιλογή γίνεται τυχαία
- Ορισμός Ευνοϊκού Ενδεχομένου:

E: Επιλογή δύο μαύρων και μίας λευκής μπάλας

Παράδειγμα 15

<u>Λύση Β (συνέχεια)</u>

- Υπολογισμός P(E)
  - Υπολογισμός |E|
  - Ο αριθμός των συνδυασμών με μία λευκή και δύο μαύρες μπάλες
  - Πόσες επιλογές για τη λευκή μπάλα? $\binom{5}{1}$ = 5
  - Πόσες επιλογές για τις δύο μαύρες μπάλες?

    Συνδυασμοί 4 ανά 2 = $\binom{4}{2}$ = $4!/(2!\ 2!) = 6$
  - Επομένως, $|E| = 5\ 6 = 30$
  - $P(E) = |E|/|\Omega| = 30 / 84$

Παράδειγμα 16

Πρόβλημα

- Έξι άτομα μεταξύ των οποίων η Άννα και ο Γιώργος θα κάτσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι έξι θέσεων
- Ποια η πιθανότητα η Άννα και ο Γιώργος να κάθονται σε διπλανές θέσεις

Παράδειγμα 16

<u>Πρόβλημα</u>

- Έξι άτομα μεταξύ των οποίων η Άννα και ο Γιώργος θα κάτσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι έξι θέσεων
- Ποια η πιθανότητα η Άννα και ο Γιώργος να κάθονται σε διπλανές θέσεις;

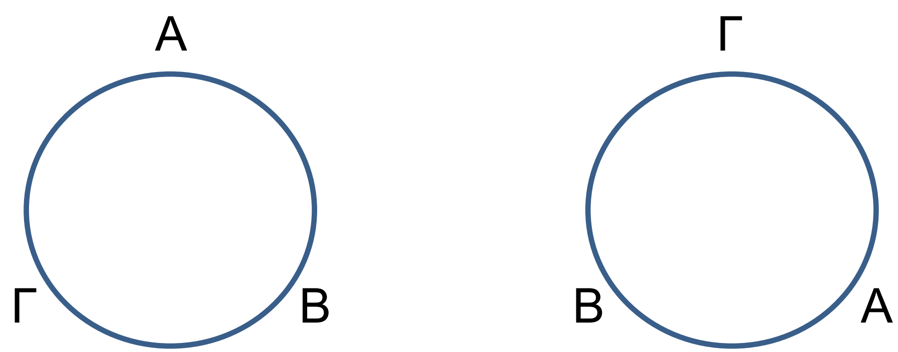
<u>Λύση Α</u>

- Λαμβάνουμε υπόψιν τις θέσεις
- Δειγματικός Χώρος, Ω = {Οι διατάξεις των έξι ανθρώπων}, $|\Omega| = 6!$
- Ορισμός Ευνοικού Ενδεχομένου:

  Ε: {Οι διατάξεις που έχουν Α & Γ σε διπλανές θέσεις}
- Υπολογισμός $|E|$:
  - Μία από τις έξι θέσεις για την Α: Επιλογές 6
  - Δύο θέσεις για τον Γ: Επιλογές 2
  - Για τους υπόλοιπους τέσσερεις: Όλες οι δυνατές διατάξεις: Επιλογές $4!$
  - Σύνολο ευνοικών διατάξεων : $6 \times 2 \times 4! = 12 \times 4!$
- $P(E) = (12 \times 4!)/6! = 12 / (5 \times 6) = 2/5$

Παράδειγμα 16

- Μια Διαφορετική Προσέγγιση: Κυκλικές Διατάξεις
- Σε προβλήματα κυκλικών διατάξεων, πολλές φορές δεν ενδιαφερόμαστε για τη συγκεκριμένη θέση ενός αντικειμένου, αλλά για τη σχετική θέση του σε σχέση με άλλα αντικείμενα.
- Π.χ. Οι δύο τρόποι διάταξης του σχήματος θεωρούνται ισοδύναμοι (Ο Α έχει δεξιά του τον Γ που έχει δεξιά του τον Β που έχει δεξιά του τον Α)
- Σε αυτές τις περιπτώσεις μπορούμε να «καρφώσουμε» ένα αντικείμενο στη θέση εκκίνησης και να εξετάζουμε τις διατάξεις με αυτό το δεδομένο
- Αριθμός κυκλικών διατάξεων n αντικειμένων $(n-1)!$
  - Οι διατάξεις αφού καρφώσουμε ενα αντικείμενο σε ένα σημείο αναφοράς



Παράδειγμα 16

Πρόβλημα

- Έξι άτομα μεταξύ των οποίων η Άννα και ο Γιώργος θα κάτσουν σε ένα κυκλικό τραπέζι έξι θέσεων
- Ποια η πιθανότητα η Άννα και ο Γιώργος να κάθονται σε διπλανές θέσεις;

Λύση Β (κυκλικές διατάξεις)

- Δειγματικός Χώρος Ω: {Όλες οι κυκλικές διατάξεις}, $|\Omega| = 5!$
- Τοποθετούμε την Άννα στη θέση αναφοράς (η Άννα σίγουρα θα κάτσει σε κάποια θέση, επιλέγουμε να θέσουμε τη θέση αυτή ως το σημείο αναφοράς)
- Ορισμός Ευνοικού Ενδεχομένου:

  E: {Οι κυκλικές διατάξεις που έχουν Α & Γ σε διπλανές θέσεις}
- Υπολογισμός $|\mathrm{E}|$:
  - Δύο θέσεις για τον Γ: Επιλογές 2
  - Για τους υπόλοιπους τέσερεις: Όλες οι δυνατές διατάξεις: Επιλογές 4!
  - $|\mathrm{E}| = 2 \times 4!$
  - $\mathrm{P(E)} = (2 \times 4!)/5! = 2/5$

Παράδειγμα 17

Πρόβλημα

- Ποια η πιθανότητα για φουλ στο πόκερ με 5 φύλλα?

Παράδειγμα 17

Πρόβλημα

- Ποια η πιθανότητα για φουλ στο πόκερ με 5 φύλλα?

Λύση Α

- Δειγματικός χώρος Ω: Όλοι συνδιασμοί 52 φύλλων ανά 5, $|\Omega| = \binom{52}{5}$.
- Ευνοικό ενδεχόμενο Ε: Τα χέρια με τρία ισοδύναμα και δύο ισοδύναμα φύλλα
- Υπολογισμός $|E|$:
  - Πόσοι συνδυασμοί των τριών ισοδυνάμων 13 $\binom{4}{3}$

    (13 είδη με 3 από τα 4 φύλλα)
  - Πόσοι συνδιασμόι των δύο ισοδύναμων? 12 $\binom{4}{2}$

    (12 είδη –όχι της τριάδας– με 3 από 4 φύλλα)
- $P(E) = |E|/|\Omega| = \dfrac{13\ 12\binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = 0.0014$

Παράδειγμα 18

Πρόβλημα

- Μία τράπουλα μοιράζεται τυχαία σε 4 παίκτες (Α, Β, Γ, Δ).
  - α) Ποια η πιθανότητα ο παίκτης Α να έχει όλους τους άσσους?
  - β) Ποια η πιθανότητα ένας παίκτης να έχει όλους τους άσσους?
  - γ) ποια η πιθανότητα κάθε παίκτης να έχει από έναν άσσο?

Παράδειγμα 18

<u>Πρόβλημα</u>

- Μία τράπουλα μοιράζεται τυχαία σε 4 παίκτες (Α, Β, Γ, Δ).
  - α) Ποια η πιθανότητα ο παίκτης Α να έχει όλους τους άσσους?

<u>Λύση (α)</u>

- Δειγματικός χώρος Ω: Όλες τα δυνατά «χέρια» για τον παίκτη A, $|\Omega| = \binom{52}{13}$.
- Ευνοϊκό ενδεχόμενο $\mathrm{E1}$: Τα χέρια με όλους τους άσσους
- Υπολογισμός $|\mathrm{E1}|$:
  - Οι συνδυασμοί των τεσσάρων άσσων $\binom{4}{4} = 1$
  - Οι συνδυασμοί των υπόλοιπων 48 ανά 9 φύλλα
- $\mathrm{P(E)} = |\mathrm{E1}|/|\Omega| = \dfrac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} = 0.0026$

Παράδειγμα 18

Πρόβλημα

- Μία τράπουλα μοιράζεται τυχαία σε 4 παίκτες (Α, Β, Γ, Δ).
  - β) Ποια η πιθανότητα ένας παίκτης να έχει όλους τους άσσους?

Παράδειγμα 18

Πρόβλημα

- Μία τράπουλα μοιράζεται τυχαία σε 4 παίκτες (Α, Β, Γ, Δ).
  - β) Ποια η πιθανότητα ένας παίκτης να έχει όλους τους άσσους?

Λύση (β)

- Η πιθανότητα ένας παίκτης να έχει τους 4 άσσους (ενδεχόμενο Ε2) είναι ισοδύναμη με το να έχει 4 άσσους ο Α ή ο Β ή ο Γ ή ο Δ
- Τα ενδεχόμενα αυτά ειναι αλληλοαποκλειόμενα.
- Επομένως, χρησιμοποιώντας την απάντηση στο ερώτημα (15.α)
- $\mathrm{P(E2)} = 4 \times \mathrm{P(E1)} = 4 \times \frac{\binom{48}{9}}{\binom{52}{13}} = 0.010564$

Παράδειγμα 18

Πρόβλημα

- Μία τράπουλα μοιράζεται τυχαία σε 4 παίκτες (Α, Β, Γ, Δ).
  - γ) Ποια η πιθανότητα κάθε παίκτης να έχει από έναν άσσο?

Παράδειγμα 18

Πρόβλημα

- Μία τράπουλα μοιράζεται τυχαία σε 4 παίκτες (Α, Β, Γ, Δ).
  - γ) ποια η πιθανότητα κάθε παίκτης να έχει από έναν άσσο?

Λύση (γ)

- Δειγματικός χώρος Ω: Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί 13 φύλλων για τους 4 παίκτες
- Υπολογισμός $|\Omega|$ (έστω πως μας ενδιαφέρει η ταυτότητα των παικτών)
  - Παίκτης Α = $\binom{52}{13}$, Παίκτης Β = $\binom{39}{13}$, Παίκτης Γ = $\binom{26}{13}$, Παίκτης Δ = $\binom{13}{13}$
  - $|\Omega| = \binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$

Παράδειγμα 18

Λύση (γ) - συνέχεια

- Ευνοικό ενδεχόμενο Ε3: Οι δυνατοί συνδυασμοί 52 ανά 13 φύλλων στους 4 παίκτες με έναν άσσο στον καθένα
- Υπολογισμός |Ε3|:
  - Για τον Α: $\binom{4}{1}\binom{48}{12}$ (Μία επιλογή για άσσο, 12 επιλογές για τα υπόλοιπα φύλλα)
  - Για τον Β: $\binom{3}{1}\binom{36}{12}$ (Μία επιλογή για άσσο, 12 επιλογές για τα υπόλοιπα φύλλα)
  - Για τον Γ: $\binom{2}{1}\binom{24}{12}$ (Μία επιλογή για άσσο, 12 επιλογές για τα υπόλοιπα φύλλα)
  - Για τον Δ: 1
- $\mathrm{P(E4)} = \frac{|\mathrm{E3}|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}\binom{3}{1}\binom{36}{12}\binom{2}{1}\binom{24}{12}}{\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}} = 0.1054982$

Παράδειγμα 19

<u>Πρόβλημα</u>

- Αν n άτομα είναι παρόντα σε ένα δωμάτιο, ποια η πιθανότητα να μην υπάρχει ζεύγος ατόμων με την ίδια μέρα γενεθλίων.

Παράδειγμα 19

<u>Πρόβλημα</u>

- Αν n άτομα είναι παρόντα σε ένα δωμάτιο, ποια η πιθανότητα να μην υπάρχει ζεύγος ατόμων με την ίδια μέρα γενεθλίων.

<u>Λύση</u>

- Δειγματικός χώρος Ω
  - Κάθε άτομο έχει 365 επιλογές για τα γενέθλια του
  - Συνολικό πλήθος αποτελεσμάτων για τα n ατομα: $|\Omega| = (365)^n$
- Υπολογισμός $|\mathrm{E}|$
  - Κανένα άτομο να μήν έχει την ίδια μέρα γενέθλια με κάποιο άλλο
  - Το 1^{o} άτομο 365 επιλογές, το 2^{o} άτομο 364, το 3^{o} άτομο 363, το n-στο άτομο 365-n+1
  - $|E| = 365\ 364\ \ldots\ (365 - n + 1)$
- Πιθανότητα Ε: $\mathrm{P(E)} = 365\ 364\ \ldots\ (365 - n + 1)\ /\ (365)^n$
  - Για n = 23, P(E) ≈ ½ !!!
  - Για n = 50, P(E) ≈ 0.97 !!!

Παράδειγμα 20

Πρόβλημα

- Από ένα σύνολο 20 φοιτητών με 10 άντρες και 10 γυναίκες θα προκύψουν με τυχαία κλήρωση 10 ζεύγη για μία συνεργατική εργασία
- Ποια η πιθανότητα κανένα από τα ζευγάρια να μην περιέχει έναν άντρα και μία γυναίκα?

Παράδειγμα 20

Λύση (συνέχεια)

- Προσδιορισμός δειγματικού χώρου Ω
  - Όλες οι μη διατεταγμένες διαμερίσεις των 20 ατόμων ανά δύο
  - Αριθμός Διατεταγμένων Διαμερίσεων:

    $$\frac{20!}{(2!)^{10}}$$

    Τα ίδια ζεύγη σε άλλες θέσεις ορίζουν διαφορετικές διατεταγμένες διαμερίσεις

    {(Y1, Y2), (Y3, Y4), (Y5, Y6)…, (Y19, Y20)}

    {(Y3, Y4), (Y1, Y2), (Y5, Y6)…, (Y19, Y20)}

    …
  - Αριθμός μη-Διατεταγμένων Διαμερίσεων:

    $$|\Omega| = \frac{20!}{10!\,(2!)^{10}}$$

    Η θέση ενός ζεύγους είναι αδιάφορη, οπότε κάθε μη-διατεταγμένη διαμέριση περιέχει ένα μοναδικό σύνολο ζευγών

    {(Y1, Y2), (Y3, Y4), (Y5, Y6)…, (Y19, Y20)}

    {(Y1, Y3), (Y2, Y4), (Y5, Y6)…, (Y19, Y20)}

    …

Παράδειγμα 20

<u>Λύση (συνέχεια)</u>

- Υπολογισμός ενδεχομένου
  - Κανένα ζεύγος άνδρα – γυναίκας
  - Θα μοιραστούν οι 10 άνδρες σε 5 ζεύγη των 2 και οι 10 γυναίκες σε 5 ζεύγη των 2, χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά των ζευγών.
  - Πλήθος Μη-Διατεταγμένων Διαμερίσεων για τους 10 άνδρες:

    $$\frac{10!}{5!\,(2!)^5}$$

    {(Α1, Α2), (Α3, Α4), (Α5, Α6)..., (Α9, Α10)}

    {(Α1, Α3), (Α2, Α4), (Α5, Α6)..., (Α9, Α10)}

    ...
  - Πλήθος Μη-Διατεταγμένων Διαμερίσεων για τις 10 γυναίκες:

    $$\frac{10!}{5!\,(2!)^5}$$

    {(Γ11, Γ12), (Γ13, Γ14), (Γ15, Γ16)..., (Γ19, Γ20)}

    {(Γ11, Γ13), (Γ12, Γ14), (Γ15, Γ16)..., (Γ19, Γ20)}

    ...

Παράδειγμα 20

Λύση (συνέχεια)

- Επομένως, οι συνολικοί τρόποι που μπορούν προκύψουν μη-διατεταγμένες διατάξεις από 5 ζεύγη ανδρών και πέντε ζεύγη γυναικών είναι (τα συνολικά αποτελέσματα της κλήρωσης που ικανοποιούν το ενδεχόμενο E):

$$|E| = \frac{10!}{5!\,(2!)^5}\ \frac{10!}{5!\,(2!)^5}$$

- Άρα, η πιθανότητα να μην προκύψει κανένα μεικτό ζεύγος είναι:

$$P(E) = \frac{\frac{10!}{5!\ (2!)^5}\ \frac{10!}{5!\ (2!)^5}}{\frac{20!}{10!\ (2!)^{10}}} = 0.001364$$

Παράδειγμα 20

Λύση (συνέχεια)

- Υπολογισμός Πιθανότητας

$$\mathrm{P(E)} = \frac{\dfrac{10!}{5!\ (2!)^5}\ \dfrac{10!}{5!\ (2!)^5}}{\dfrac{20!}{10!\ (2!)^{10}}} = \cdots$$