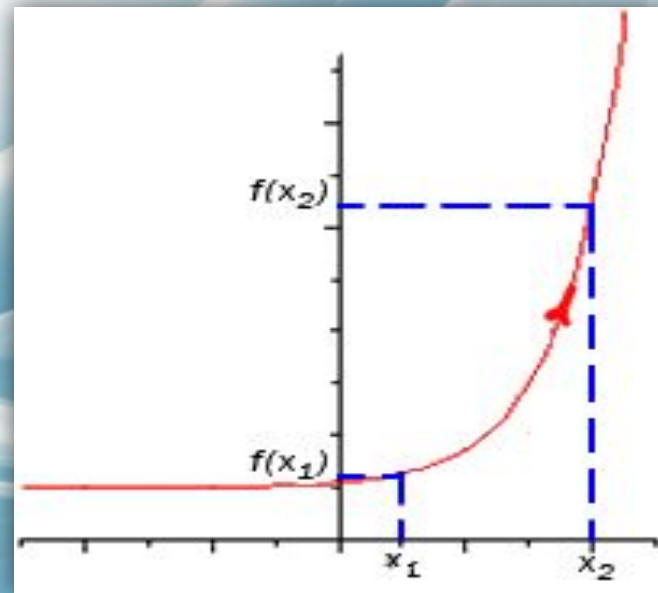
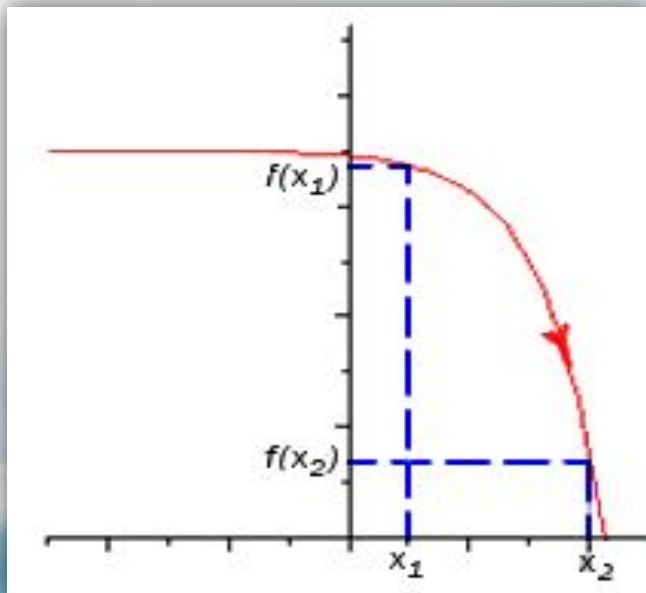
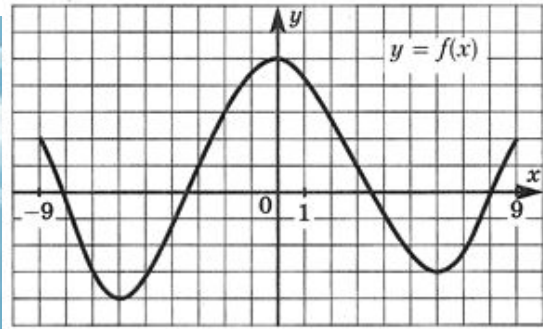
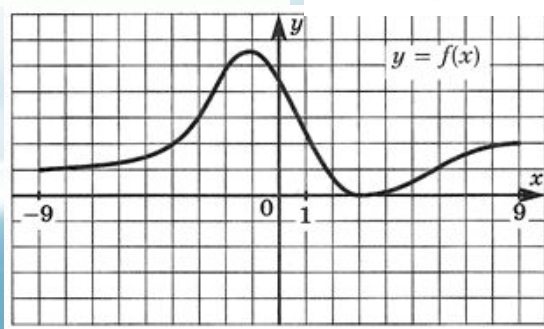
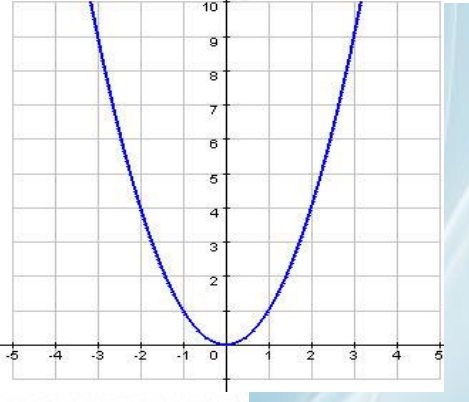
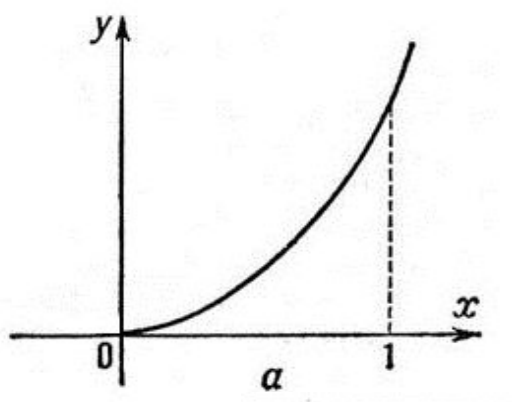
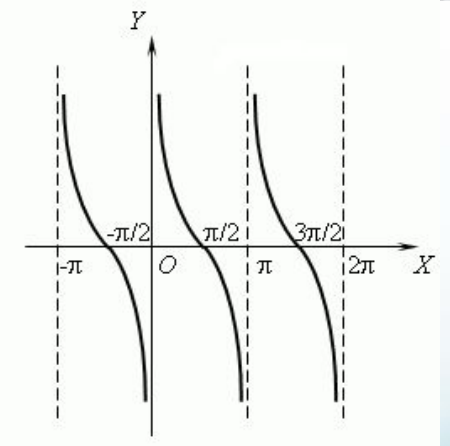
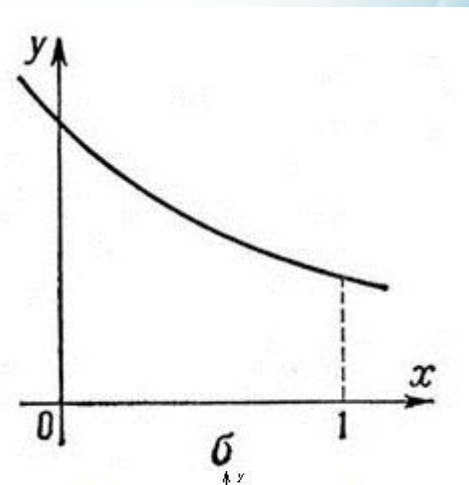
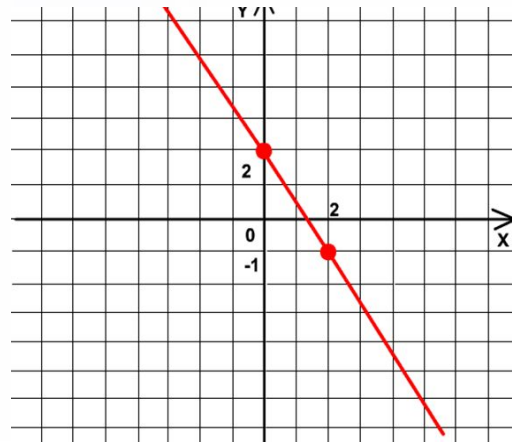
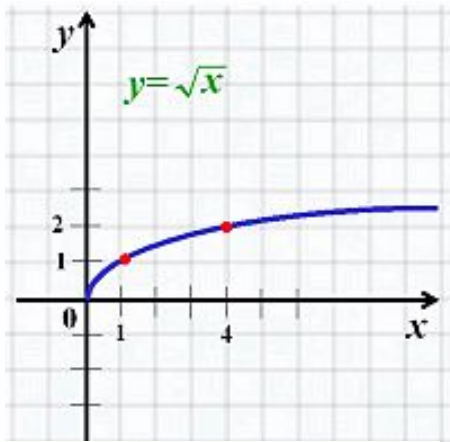


Признаки возрастания и  
убывания функции.  
Экстремум функции.

- Одной из основных задач, возникающих при исследовании функции, является нахождение **промежутков монотонности функции** (**промежутков возрастания и убывания**). Такой анализ легко сделать с помощью производной.

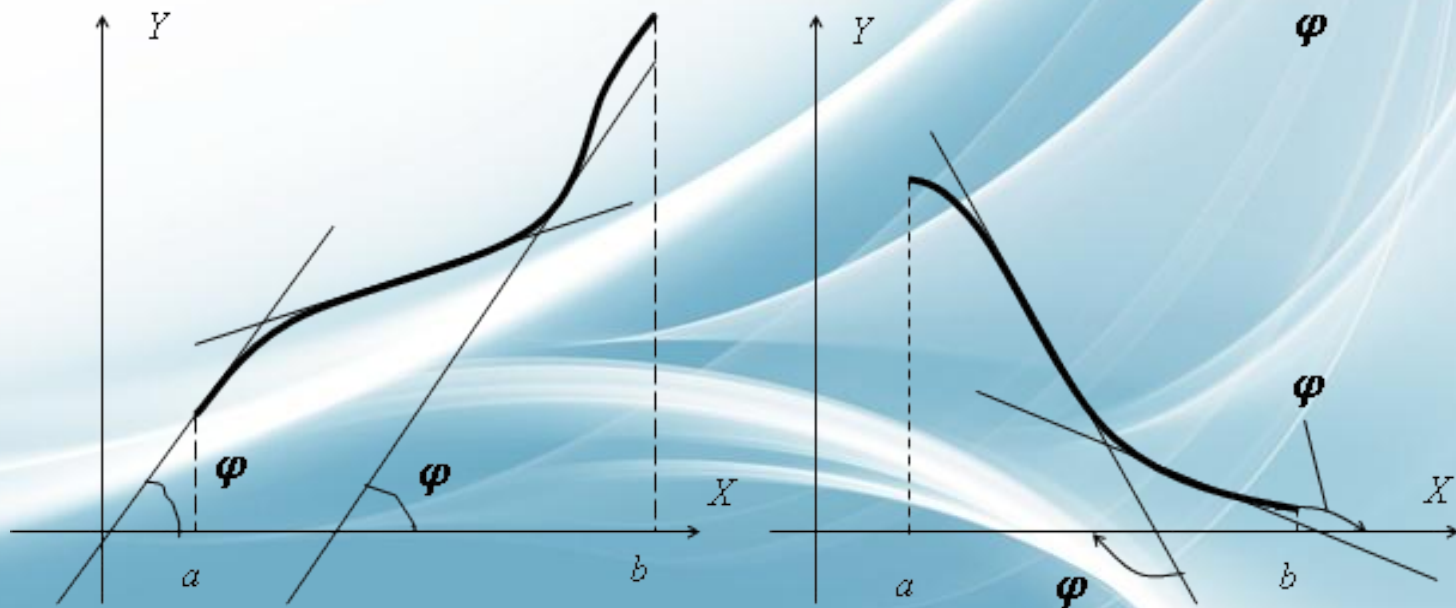
- Функция  $y=f(x)$  называется **возрастающей** в некотором интервале, если в точках этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и **убывающей**, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.





# Теорема 1.

- Если дифференцируемая функция  $y=f(x)$  **возрастает (убывает)** в данном интервале, то производная этой функции **не отрицательна (не положительна)** в этом интервале.





## Теорема 2.

- Если производная функции  $y=f(x)$  **положительна (отрицательна)** на некотором интервале, то функция в этом интервале **монотонно возрастает (монотонно убывает)**.

# Правило нахождения интервалов монотонности

1. Находим область определения функции  $f(x)$ .
2. Вычисляем производную  $f'(x)$  данной функции.
3. Находим точки, в которых  $f'(x)=0$  или не существует. Эти точки называются **критическими** для функции  $f(x)$ .
4. Делим область определения функции этими точками на интервалы. Они являются **интервалами монотонности**.
5. Исследуем знак  $f'(x)$  на каждом интервале. Если  **$f'(x) > 0$** , то на этом интервале  **$f(x)$  возрастает**; если  **$f'(x) < 0$** , то на таком интервале функция  **$f(x)$  убывает**.

# Пример №1. Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$

1. Область определения:  $\mathbb{R}$ . Функция непрерывна.
2. Вычисляем производную:  $y'=6x^2-6x-36$ .
3. Находим критические точки:  $y'=0$ .

$$x^2-x-6=0$$

$$D=1-4*(-6)*1=1+24=25$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

4. Делим область определения на интервалы:



5. Функция **возрастает** при  $x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$ , функция **убывает** при  $x \in [-2; 3]$ .



# Пример №2. Найти промежутки монотонности функции $y=x^3-3x^2$

1. Область определения:  $\mathbb{R}$ . Функция непрерывна.

2. Вычисляем производную :  $y'=3x^2-6x$ .

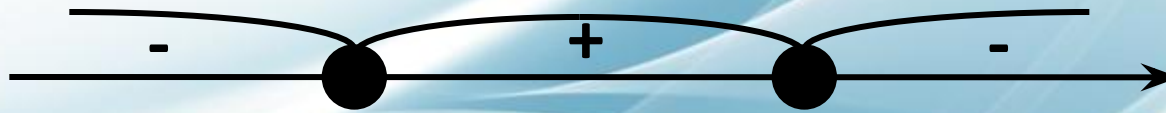
3. Находим критические точки:  $y'=0$ .

$$x^2-2x=0$$

$$x(x-2)=0$$

$$x_1=0 \text{ и } x_2=2$$

4. Делим область определения на интервалы:

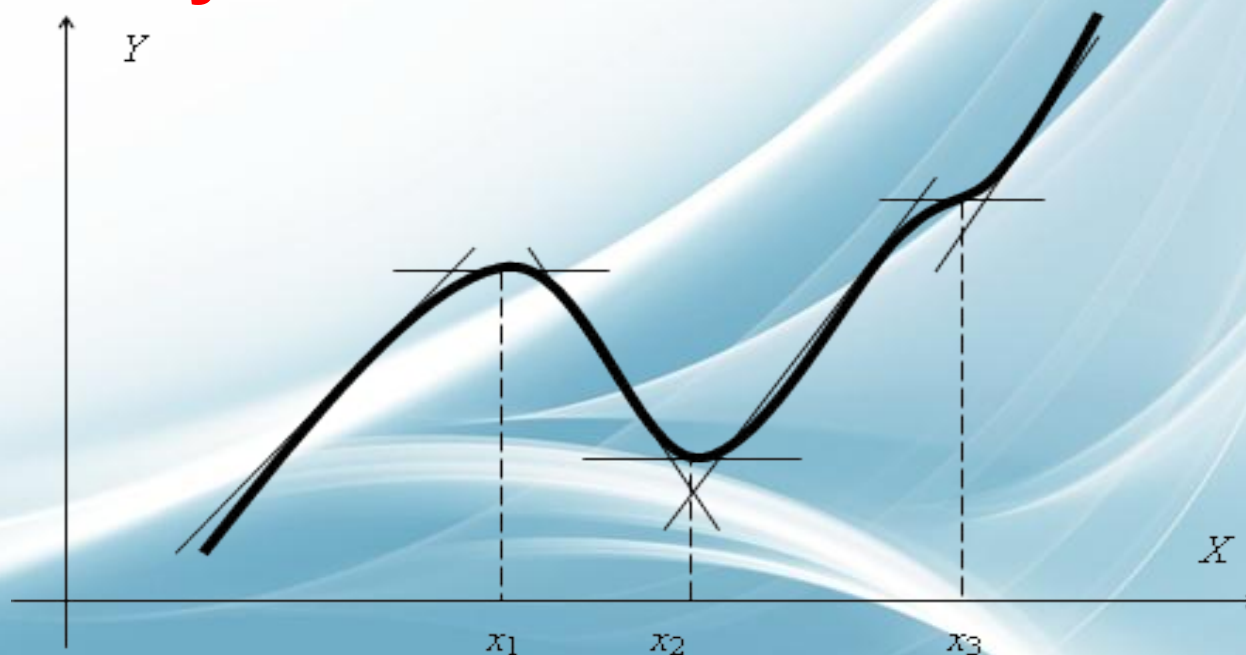


5. Функция **возрастает** при  $x \in \{ -\infty; 0 \} \cup [2; +\infty)$ , функция **убывает** при  $x \in [0; 2]$ .

- Точку  $x=x_0$  называют **точкой минимума** функции  $y=f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство  $f(x) \geq f(x_0)$ .
- Точку  $x=x_0$  называют **точкой максимума** функции  $y=f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$ .

## Теорема 3.

- Если функция  $y=f(x)$  имеет экстремум в точке  $x=x_0$ , то в этой точке **производная** функции или **равна нулю**, или **не существует**.



## Теорема 4.

- Если производная  $f'(x)$  при переходе через точку  $x_0$  **меняет знак**, то точка  $x_0$  **является точкой экстремума** функции  $f(x)$ .

Если производная меняет знак с + на -, то точка будет являться точкой максимума, если с - на +, то точка будет точкой минимума

# Пример №3. Найти экстремумы функции

$$y = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4$$

1. Область определения:  $\mathbb{R}$ . Функция непрерывна.

2. Вычисляем производную:  $y' = -6x^2 - 6x + 12$ .

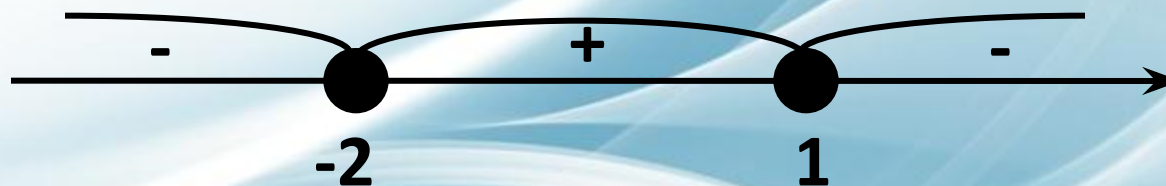
3. Находим критические точки:  $y' = 0$ .

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = 1; x_2 = -2$$

4. Делим область определения на интервалы:



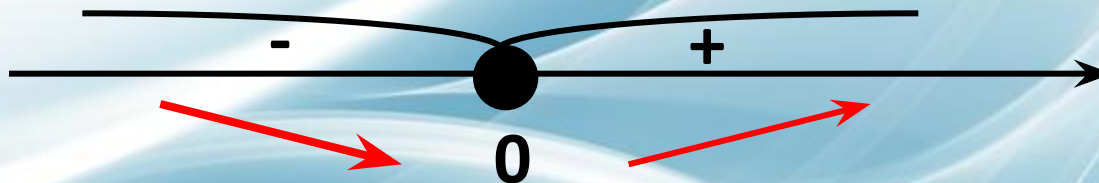
5.  $x = -2$  – точка минимума. Найдём минимум функции  $y_{\min} = -24$ .  $x = 1$  – точка максимума. Найдём максимум функции:  $y_{\max} = 3$ .



- Исследовать на экстремум функцию  $y=x^2+2$ .

**Решение:**

1. Находим область определения функции:  $D(y)=\mathbb{R}$ .
2. Находим производную:  $y'=(x^2+2)'=2x$ .
3. Приравниваем её к нулю:  $2x=0$ , откуда  $x=0$  – критическая точка.
4. Делим область определения на интервалы и определяем знаки производной на каждом интервале:



5.  $x=0$  – точка минимума. Найдём минимум функции  $y_{\min}=2$ .

- **Исследовать на экстремум функцию**  
 $y=x^3+3x^2+9x-6$ .

**Решение:**

1. Находим область определения функции:  $D(y)=\mathbb{R}$ .
2. Находим производную:  $y'=(x^3+3x^2+9x-6)'=3x^2+6x+9$ .
3. Приравниваем её к нулю:  $3x^2+6x+9=0$ , откуда  $D<0$ . То есть критических точек не существует.
4. Однако, функция возрастает на всей  $D(y)$ , так как  $y'=3x^2+6x+9 > 0$ :

# Выполните самостоятельно:

- Исследовать на экстремум функцию  $y=x^2-x-6$ .