Урок №4

Математический анализ
Производная и Первообразная

Законспектируйте материал презентации в тетрадь

Производная

Вспомним

Формулы производных

1. $C' = 0$;
2. $x' = 1$;
3. $(x^2)' = 2x$;
4. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;

План нахождения промежутков монотонности и точек экстремума функции.

1. Найти производную функции ($f'(x)$);
2. Найти стационарные и критические точки (точки, в которых производная функции равна нулю или не существует); для функций, заданных многочленами - только стационарные
3. Разбить найденными точками область определения на промежутки;
4. Определить знак производной на каждом промежутке. Для этого подставить любое число из промежутка в формулу производной.
5. Сделать вывод о характере монотонности и видах точек экстремума (пользуясь теоремами).

План нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке

1. Найти производную функции;
2. Найти стационарные и критические точки (для функций, заданных многочленами - только стационарные)
3. Выбрать из найденных точек те, которые принадлежат отрезку;
4. Найти значения функции в выбранных точках и на концах отрезка;
5. Выбрать из полученных значений наибольшее и наименьшее и записать их в ответ.

Задание на составление уравнения касательной будет разобрано на следующем

онлайн уроке

Задание № 6
Вычисление производной функции в точке

Вспомним теорию

Чтобы найти значение производной функции в точке нужно

1.Найти формулу производной функции

2.Подставить в формулу производной вместо ***x*** заданное число

Образец решения номера экз.задания №6

№6.8

$f(x)=3x^4 - 5x + 5. \qquad x_0= -1$

Найти: $f'(x_0)$

Решение: $f'(x) = (3x^4 - 5x + 5)' = (3x^4)' - (5x)' + (5)' = 3\cdot 4x^{4-1} - 5\cdot 1 + 0 = 12x^3 - 5$

$f'(x_0)=f'(-1) = 12\cdot(-1)^3 - 5 = -12-5 = -17$

Задание № 14
Применение производной

№1. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции

а) $f(x) = 12x - x^3$

1) $f'(x) = (12x - x^3)' = 12 - 3x^2 = 3(4 - x^2)$

2) Стационарные точки: $f'(x) = 0$

$3(4 - x^2) = 0$

$4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

3) Область определения: $(-\infty; +\infty)$

f': $-$ т.min $+$ т.max $-$

f: $\searrow$ -2 $\nearrow$ 2 $\searrow$ x

4) $f'(x) = 3(4 - x^2)$

$-5 \in (-\infty; -2)$ $f'(-5) = 3(4 - (-5)^2) < 0$

$0 \in (-2; 2)$ $f'(0) = 3(4 - 0^2) > 0$

$10 \in (2; +\infty)$ $f'(10) = 3(4 - 10^2) < 0$

5) Ответ: функция возрастает на промежутке $[-2; 2]$

убывает на промежутках $(-\infty; -2]$; $[2; +\infty)$

-2 - точка минимума

2 - точка максимума

Пояснение (не пишем)

Найти производную по формулам и правилам и разложить на множители, если возможно

Приравнять формулу производной к 0 и решить полученное уравнение

Знаки и остальные символы на схеме расставить после выполнения п. 4, пользуясь теоремами

Выбрать из каждого промежутка любое число, подставить в формулу производной и определить знак выражения.

Количество промежутков монотонности и точек экстремума и их виды определяем по схеме.

Задание № 14
Применение производной

№2 Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=x^4-8x^2+5$ на отрезке $[-3;\ 1]$

1) $f'(x)=(x^4-8x^2+5)'=4x^3-8\cdot 2x+0=4x^3-16x$

2) Стационарные точки: $f'(x)=0$

$4x^3-16x=0$

$4x(x^2-4)=0$

$4x=0$ или $x^2-4=0$

$x=0$ $\quad x^2=4$

$x=\pm 2$

Уравнение может быть любым, его нужно решить известными способами

3) $0\in[-3;1]$

$2\notin[-3;\ 1]$

$-2\in[-3;\ 1]$

4) $f(x)=x^4-8x^2+5$

$f(0)=0^4-8\cdot 0^2+5=5$

$f(-2)=(-2)^4-8\cdot(-2)^2+5=-11$

$f(-3)=(-3)^4-8\cdot(-3)^2+5=14$

$f(1)=1^4-8\cdot 1+5=-2$

считать можно подробно расписывая счёт

Ответ: $y_{наиб}=14$

$y_{наим}=-11$

№14.1

$f(x)=x^2+2x$

$f'(x)=(x^2+2x)'=2x+2$

Стационарные точки: $f'(x)=0$

$2x+2=0$

$2x=-2$

$x=-1$

Область определения: $(-\infty;+\infty)$

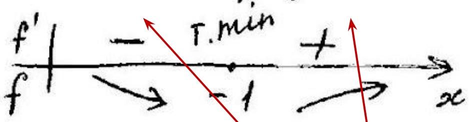


Схема оформляется перед ответом

$f'(x)=2x+2$

$-3\in(-\infty;-1)$

$f'(-3)=2\cdot(-3)+2<0$

$0\in(-1;+\infty)$

$f'(0)=2\cdot0+2>0$

Ответ: функция возрастает на пром $[-1;+\infty)$

убывает на пром $(-\infty;-1]$

№ 14.14

$f(x) = x^3 - 3x^2$

$f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x$

Стационарные точки: $f'(x) = 0$

$3x^2 - 6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$3x = 0$ или $x - 2 = 0$

$x = 0 \qquad x = 2$

Область определения: $(-\infty; +\infty)$

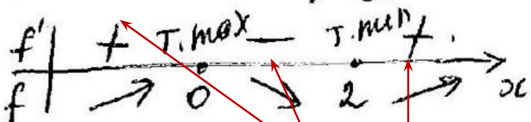


Схема оформляется перед ответом

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$-2 \in (-\infty; 0)$

$f'(-2) = 3 \cdot (-2)(-2-2) > 0$

$1 \in (0; 2)$

$f'(1) = 3 \cdot 1(1-2) < 0$

$4 \in (2; +\infty)$

$f'(4) = 3 \cdot 4(4-2) > 0$

Ответ: 0 - точка максимума

2 - точка минимума

№ 14.26

$f(x)=x^3-6x^2+9 \quad [-2;2]$

$f'(x)=(x^3-6x^2+9)'=3x^2-12x$

Стационарные точки $f'(x)=0$

$3x^2+12x=0$

$3x(x-4)=0$

$3x=0 \qquad x-4=0$

$x=0 \qquad x=4$

$0\in[-2;2]$

$4\notin[-2;2]$

$f(x)=x^3-6x^2+9$

$f(0)=0^3-6\cdot 0^2+9=9$

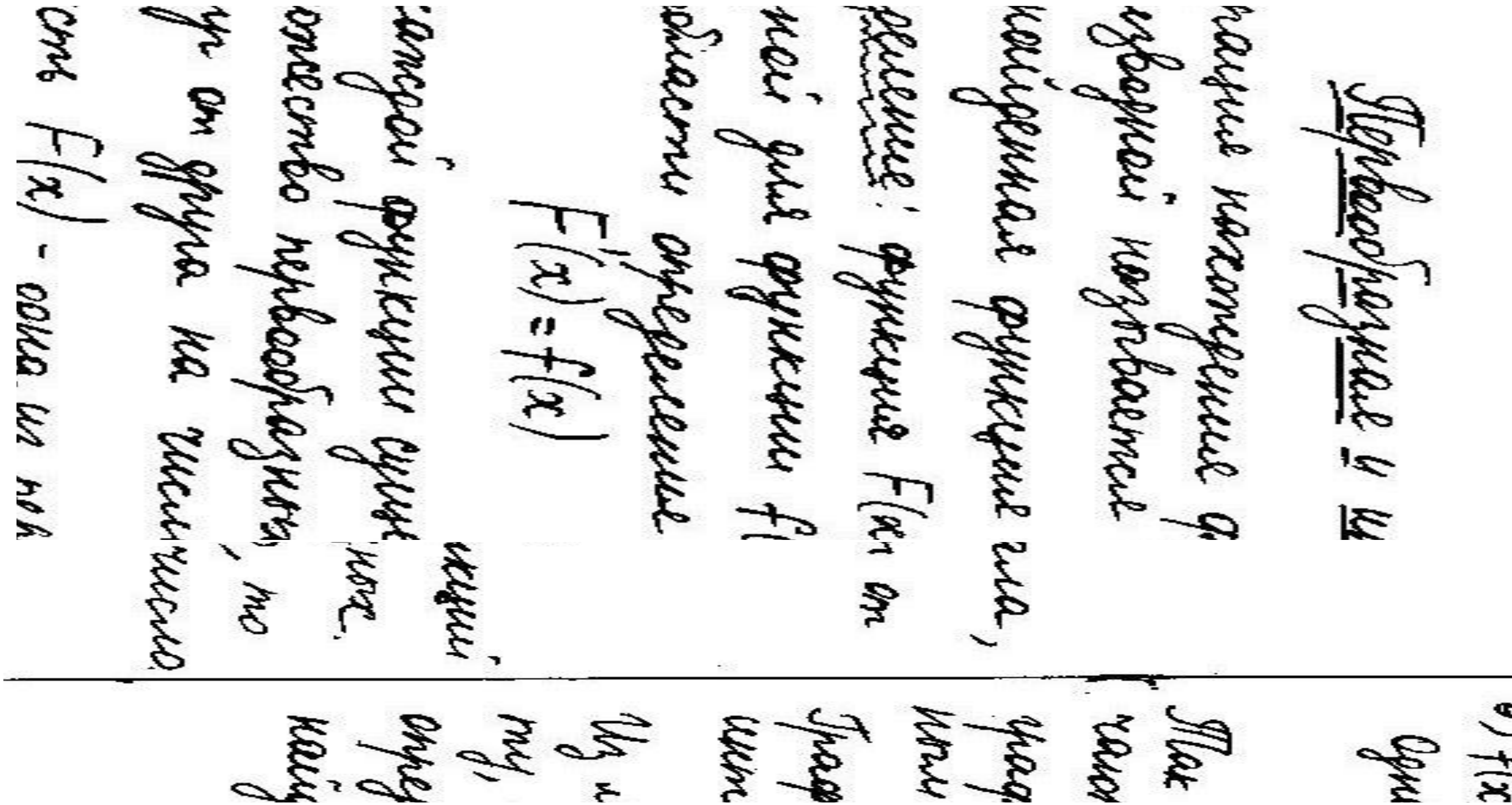
$f(-2)=(-2)^3-6\cdot(-2)^2+9=-23$

$f(2)=2^3-6\cdot 2^2+9=-7$

Ответ: $y_{наиб}=9$; $y_{наим}=-23$

Задание № 15
Первообразная

Вспомним



Разница в написании букв для функции (маленькая) и ее первообразной (большая)

ВАЖНА!!!

Пример решения задания № 15

Пользуемся формулами из таблицы первообразных

№15.9 $f(x) = -x^2 + 2x$; $A(3; -1)$

Решение:

Все первообразные: $F(x) = -\frac{x^{2+1}}{2+1} + 2\frac{x^{1+1}}{1+1} + C = -\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + C = -\frac{x^3}{3} + x^2 + C$

Т.к. график первообразной проходит через точку $A(3; -1)$, то $x = 3$, $F(x) = -1$, тогда

$-1 = -\frac{3^3}{3} + 3^2 + C$

Подставили числа вместо букв F(x) и ***x*** в формулу

$-1 = -9 + 9 + C$

$C = -1 + 9 - 9$

$C = -1$

Искомая первообразная: $F(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 1$

Подставили число вместо буквы С в формулу

Ответ: $F(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 1$

Следующий онлайн урок

состоится

по индивидуальному расписанию групп

Тема: Комбинаторика, уравнение касательной