



РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ



Метод Фибоначчи

Выполнили студенты 3 курса

Группа ИБ-331

Рябова Дарья

Климович Виктор

Метод основан на последовательности **чисел Фибоначчи**, которая определяется следующим образом :

$$F_v = F_{v-1} + F_{v-2}, v = 1, 2, 3, \dots, F_0 = F_1 = 1$$

Таким образом, последовательность Фибоначчи имеет вид: ***1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89.***

- В отличие от метода **золотого сечения** в методе Фибоначчи требуется, чтобы общее число вычислений n (или коэффициент сокращения исходного интервала) было задано заранее.

Это объясняется тем, что точки, в которых производятся вычисления, зависят от n . Длина интервала неопределенности на k -той итерации сжимается с коэффициентом $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$.

Следовательно, после $(n-1)$ итерации, где n — заданное общее число вычислений функции $f(x)$, длина интервала неопределенности сократится от $(b_1 - a_1)$ до $\frac{b_1 - a_1}{F_n}$.

Алгоритм

Шаг 1. Выбрать допустимую конечную длину интервала $l > 0$.

Выбрать общее число вычислений функции n так, чтобы

$$F_n > \frac{b_1 - a_1}{l}$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F _n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Шаг 2. Находим новые точки по формулам:

$$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} * (b_k - a_k)$$

$$\mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} * (b_k - a_k).$$

Алгоритм

Шаг 3. Найденные точки подставляем в исходную функцию, находим значение функции в этих точках и сравниваем:

Если $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$

Если $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$, то $b_{k+1} = \mu_k$, $a_{k+1} = a_k$

Шаг 4. $k=n-2$, то перейти к пятому шагу, в противном случае повторить **Шаг 2** И **Шаг 3** с новыми данными.

Шаг 5. Точка оптимального решения x^* вычисляется, как $\frac{(a+b)}{2}$

Пример

Исходная функция: $f(x) = x^2 + 2 * x$

Интервал: $[-3;5]$

E=0,02

Шаг 1

Пусть длина конечного интервала $l = 0,1$

Тогда если $F_n > \frac{b_1 - a_1}{l} = \frac{5 - (-3)}{0,1}$, $F_n > 80$ значит **n=10**

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Пример

- Шаг 2 ($k=1$, отрезок $[-3;5]$)

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_{10-1-1}}{F_{10-1+1}} * (b_1 - a_1) = (-3) + \frac{34}{89} * (5 - (-3)) = 0,056$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{10-1}}{F_{10-1+1}} * (b_1 - a_1) = (-3) + \frac{55}{89} * (5 - (-3)) = 1,94$$

$$f(\lambda_1) = \lambda_1^2 + 2 * \lambda_1 = 0,056^2 + 2 * 0,056 = 0,1155$$

$$f(\mu_1) = \mu_1^2 + 2 * \mu_1 = 0,94^2 + 2 * 1,94 = 7,666$$

Шаг 3 ($k=1$, отрезок $[-3;5]$)

$$f(\lambda_1) < f(\mu_1), 0,1155 < 7,666$$

Значит $b_2 = \mu_1 = \mathbf{1,94}$, $a_2 = a_1 = \mathbf{-3}$

Пример

- Шаг 2 (k=2, отрезок [-3;1,94])
$$\lambda_2 = a_2 + \frac{F_{10-2-1}}{F_{10-2+1}} * (b_2 - a_2) = (-3) + \frac{21}{55} * (1,94 - (-3)) = -1,11$$
$$\mu_2 = a_2 + \frac{F_{10-2}}{F_{10-2+1}} * (b_1 - a_1) = (-3) + \frac{34}{55} * (1,94 - (-3)) = 0,056$$

$$f(\lambda_2) = \lambda_2^2 + 2 * \lambda_2 = 0,056^2 + 2 * (-1,11) = -0,987$$
$$f(\mu_2) = \mu_2^2 + 2 * \mu_2 = 0,94^2 + 2 * (0,056) = 0,1155$$

Шаг 3 (k=2, отрезок [-3;1,94])
 $f(\lambda_2) < f(\mu_2)$, $-0,987 < 0,1155$
Значит $b_3 = \mu_2 = \mathbf{0,056}$, $a_3 = a_2 = -3$

Пример

Шаг 2 ($k=3$, отрезок $[-3 ; 0,056]$)

$$\lambda_3 = a_3 + \frac{F_{10-3-1}}{F_{10-3+1}} * (b_3 - a_3) = (-3) + \frac{13}{34} * (0,056 - (-3)) = -1,83$$

$$\mu_3 = a_3 + \frac{F_{10-3}}{F_{10-3+1}} * (b_3 - a_3) = (-3) + \frac{21}{34} * (0,056 - (-3)) = -1,11$$

$$f(\lambda_3) = \lambda_3^2 + 2 * \lambda_3 = (-1,83)^2 + 2 * (-1,83) = -0,3$$

$$f(\mu_3) = \mu_3^2 + 2 * \mu_3 = (-1,11)^2 + 2 * (-1,11) = 0,987$$

Шаг 3 ($k=2$, отрезок $[-3 ; 0,056]$)

$$f(\lambda_3) > f(\mu_3) , -0,3 < 0,987$$

Значит $a_4 = \lambda_3 = -1,83$, $b_4 = b_3 = 0,056$,

Пример

Шаг 2 ($k=4$, отрезок $[-1,83; 0,056]$)

...

Шаг 5

	a	b	λ	μ	$f(\lambda)$	$f(\mu)$
1	-3	5	0,05618	1,94382	0,115516	7,666078
2	-3	1,94382	-1,11236	0,05618	-0,98738	0,115516
3	-3	0,05618	-1,83146	-1,11236	-0,30867	-0,98738
4	-1,83146	0,05618	-1,11236	-0,66292	-0,98738	-0,88638
5	-1,83146	-0,66292	-1,38202	-1,11236	-0,85406	-0,98738
6	-1,38202	-0,66292	-1,11236	-0,93258	-0,98738	-0,99546
7	-1,11236	-0,66292	-0,93258	-0,8427	-0,99546	-0,97526
8	-1,11236	-0,8427	-1,02247	-0,93258	-0,9995	-0,99546

$$x(\min) \frac{a_8 + b_8}{2} = \frac{-1,11 + (-0,84)}{2} = -0,977$$

Пример

$$f(x) = x^2 + 2 * x$$

$$f(x) = (-0,977)^2 + 2 * (-0,977) = -0,99989$$

Ответ: $x^* = -0,977$, $f(x) = -0,99989$