РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Метод Фибоначчи

Выполнили студенты 3 курса

Группа Иб-331

Рябова Дарья

Климович Виктор

Метод основан на последовательности **чисел Фибоначчи**, которая определяется следующим образом :

$$F_v = F_{v-1} + F_{v-2}, v = 1, 2, 3, \ldots, F_0 = F_1 = 1$$

Таким образом, последовательность Фибоначчи имеет вид: *1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89.*

- В отличие от метода **золотого сечения** в методе Фибоначчи требуется, чтобы общее число вычислений $\boldsymbol{n}$ (или коэффициент сокращения исходного интервала) было задано заранее.

Это объясняется тем, что точки, в которых производятся вычисления, зависят от $\boldsymbol{n}$. Длина интервала неопределенности на $\boldsymbol{k}$-той итерации сжимается с коэффициентом $\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$.

Следовательно, после $(n-1)$ итерации, где $\boldsymbol{n}$ — заданное общее число вычислений функции $f(x)$, длина интервала неопределенности сократится от (b_1-a_1) до $\frac{b_1-a_1}{F_n}$.

Алгоритм

Шаг 1. Выбрать допустимую конечную длину интервала ***l>0***.

Выбрать общее число вычислений функции ***n*** так, чтобы

$$F_n > \frac{b_1 - a_1}{l}$$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fn	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Шаг 2. Находим новые точки по формулам:

$$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} * (b_k - a_k)$$

$$\mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} * (b_k - a_k),$$

Алгоритм

Шаг 3. Найденные точки подставляем в исходную функцию, находим значение функции в этих точках и сравниваем:

Если $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$

Если $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$, то $b_{k+1} = \mu_k$, $a_{k+1} = a_k$

Шаг 4. $k=n-2$, то перейти к пятому шагу, в противном случае повторить **Шаг 2** И **Шаг 3** с новыми данными.

Шаг 5. Точка оптимального решения $\boldsymbol{x}^*$ вычисляется, как $\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{\mathbf{2}}$

Пример

Исходная функция: $f(x) = x^2 + 2 * x$

Интервал: [-3;5]

E=0,02

Шаг 1

Пусть длина конечного интервала $l = 0{,}1$

Тогда если $\boldsymbol{F_n > \frac{b_1 - a_1}{l} = \frac{5-(-3)}{0{,}1}}$, $\boldsymbol{F_n > 80}$ значит **n=10**

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Fn	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Пример

- **Шаг 2 (k=1, отрезок [-3;5])**

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_{10-1-1}}{F_{10-1+1}} * (b_1 - a_1) = (-3) + \frac{34}{89} * \left(5 - (-3)\right) = 0{,}056$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{10-1}}{F_{10-1+1}} * (b_1 - a_1) = (-3) + \frac{55}{89} * \left(5 - (-3)\right) = 1{,}94$$

$$f(\lambda_1) = {\lambda_1}^2 + 2 * \lambda_1 = 0{,}056^{\,2} + 2 * 0{,}056 = 0{,}1155$$

$$f(\mu_1) = {\mu_1}^2 + 2 * \mu_1 = 0{,}94^{\,2} + 2 * 1{,}94 = 7{,}666$$

Шаг 3 (k=1, отрезок [-3;5])

$$f(\lambda_1) < f(\mu_1),\ 0{,}1155 < 7{,}666$$

Значит $b_2 = \mu_1$=**1,94** , $a_2 = a_1$= **-3**

Пример

- **Шаг 2 (k=2, отрезок [-3;1,94])**

$$\lambda_2 = a_2 + \frac{F_{10-2-1}}{F_{10-2+1}} * (b_2 - a_2) = (-3) + \frac{21}{55} * \left(1{,}94 - (-3)\right) = -1{,}11$$

$$\mu_2 = a_2 + \frac{F_{10-2}}{F_{10-2+1}} * (b_1 - a_1) = (-3) + \frac{34}{55} * \left(1{,}94 - (-3)\right) = 0{,}056$$

$$\mathrm{f}(\lambda_2) = {\lambda_2}^2 + 2 * \lambda_2 = 0{,}056^{\,2} + 2 * (-1{,}11) = -0{,}987$$

$$f(\mu_2) = {\mu_2}^2 + 2 * \mu_2 = 0{,}94^{\,2} + 2 * (0{,}056) = 0{,}1155$$

Шаг 3 (k=2, отрезок [-3;1,94])

$$\mathrm{f}(\lambda_2) < f(\mu_2)\,, -0{,}987 < 0{,}1155$$

Значит $b_3 = \mu_2$=**0,056** , $a_3 = a_2$=**-3**

Пример

- **Шаг 2 (k=3, отрезок [-3 ; 0,056])**

$$\lambda_3 = a_3 + \frac{F_{10-3-1}}{F_{10-3+1}} * (b_3 - a_3) = (-3) + \frac{13}{34} * \left(0{,}056 - (-3)\right) = -1{,}83$$

$$\mu_3 = a_3 + \frac{F_{10-3}}{F_{10-3+1}} * (b_3 - a_3) = (-3) + \frac{21}{34} * \left(0{,}056 - (-3)\right) = -1{,}11$$

$$\mathrm{f}(\lambda_3) = {\lambda_3}^2 + 2 * \lambda_3 = (-1{,}83)^2 + 2 * (-1{,}83) = -0{,}3$$

$$f(\mu_3) = {\mu_3}^2 + 2 * \mu_3 = (-1{,}11)^2 + 2 * (-1{,}11) - 0{,}987$$

Шаг 3 (k=2, отрезок [-3 ; 0,056])

$$\mathrm{f}(\lambda_3) > f(\mu_3)\,, -0{,}3 < 0{,}987$$

Значит $a_4 = \lambda_3 = \mathbf{-1{,}83}$, $b_4 = b_3$**=0,056,**

Пример

Шаг 2 (k=4, отрезок [-1,83 ; 0,056])

...

Шаг 5

	a	b	λ	μ	f(λ)	f(μ)
1	-3	5	0,05618	1,94382	0,115516	7,666078
2	-3	1,94382	-1,11236	0,05618	-0,98738	0,115516
3	-3	0,05618	-1,83146	-1,11236	-0,30867	-0,98738
4	-1,83146	0,05618	-1,11236	-0,66292	-0,98738	-0,88638
5	-1,83146	-0,66292	-1,38202	-1,11236	-0,85406	-0,98738
6	-1,38202	-0,66292	-1,11236	-0,93258	-0,98738	-0,99546
7	-1,11236	-0,66292	-0,93258	-0,8427	-0,99546	-0,97526
8	-1,11236	-0,8427	-1,02247	-0,93258	-0,9995	-0,99546

$$x(min)\frac{a_8+b_8}{2}=\frac{-1{,}11+(-0{,}84)}{2}=-0{,}977$$

Пример

$$f(x) = x^2 + 2 * x$$

$$f(x) = (-0{,}977)^2 + 2 * (-0{,}977) = -0{,}99989$$

Ответ: $x^* = -0{,}977$, $f(x) = -0{,}99989$