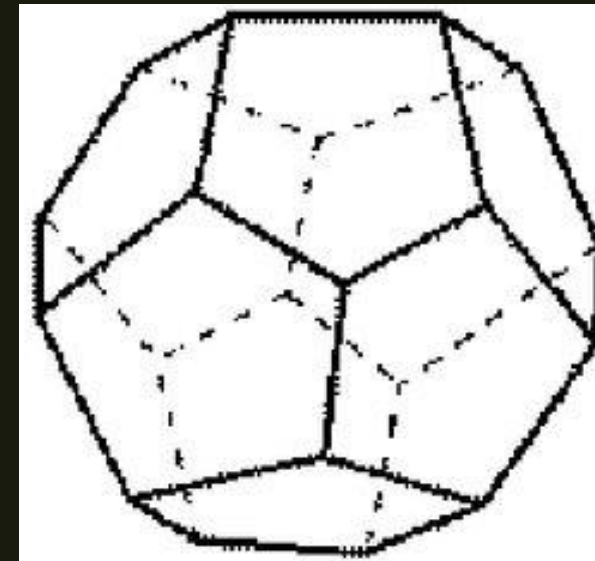
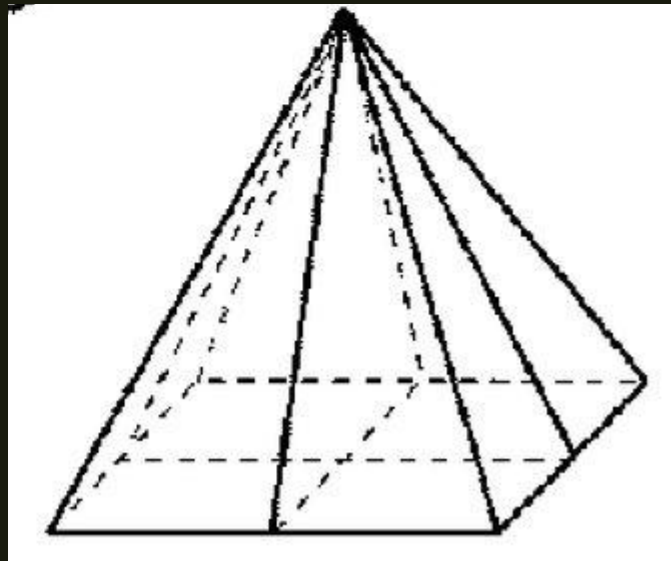
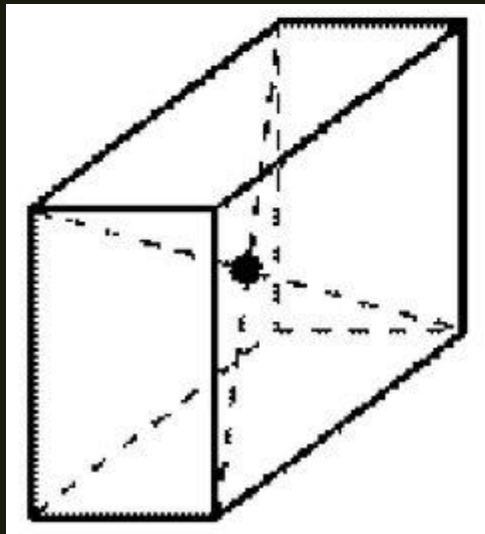


# **РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМОВ МНОГОГРАННИКОВ**

Подготовила  
учитель математики  
МБОУ «ШКОЛА №85 Г.ДОНЕЦКА»  
Юлина С.Л.



МНОГОГРАННИК – ЭТО ПОВЕРХНОСТЬ,  
СОСТАВЛЕННАЯ ИЗ МНОГОУГОЛЬНИКОВ,  
ОГРАНИЧИВАЮЩАЯ НЕКОТОРОЕ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЛО

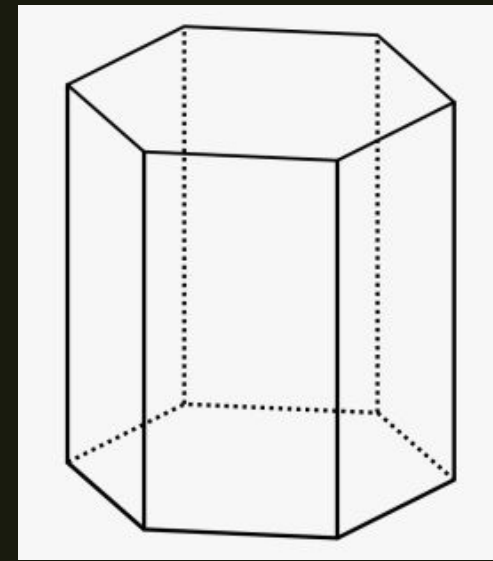
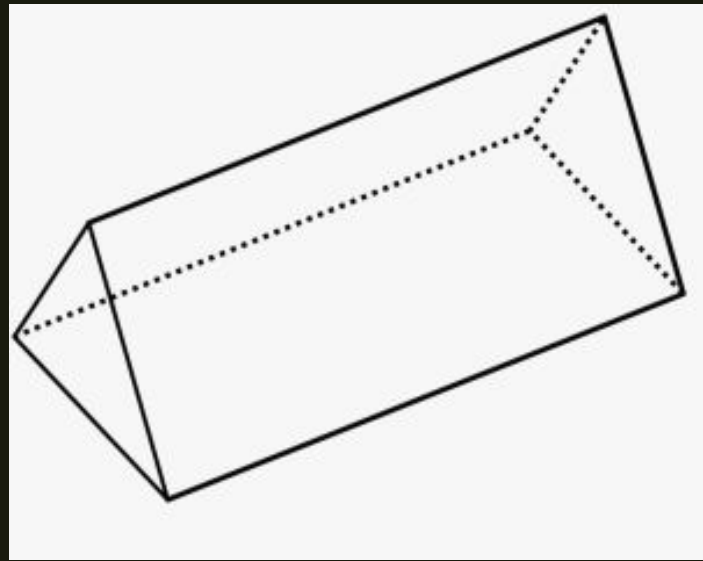
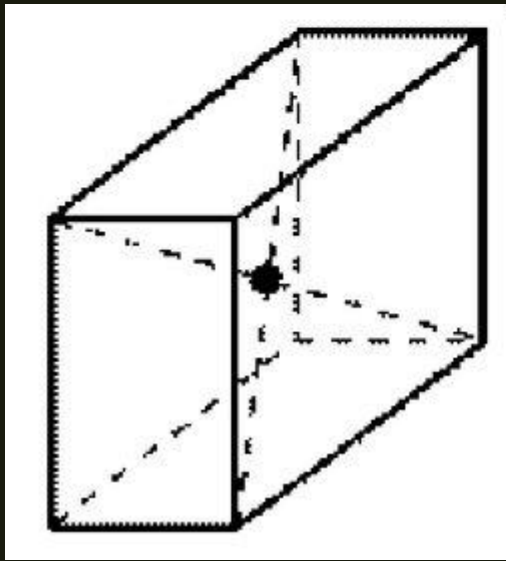
МНОГОГРАННИКИ

```
graph TD; A[МНОГОГРАННИКИ] --- B[ПРИЗМЫ]; A --- C[ПИРАМИДЫ]; A --- D[ДРУГИЕ МНОГОГРАННИКИ];
```

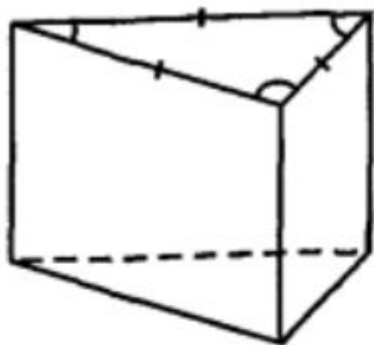
ПРИЗМЫ

ПИРАМИДЫ

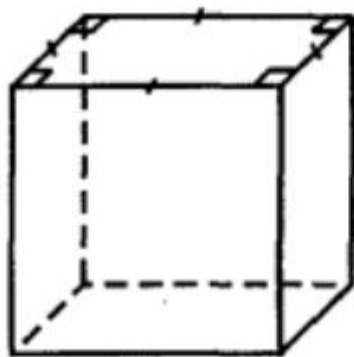
ДРУГИЕ  
МНОГОГРАННИК  
И



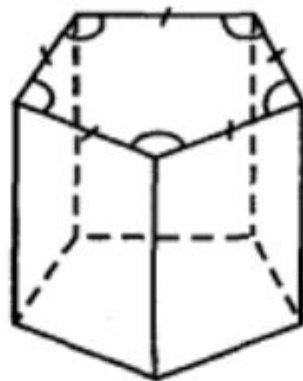
ПРИЗМА – ЭТО ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА В ПРОСТРАНСТВЕ; МНОГОГРАННИК С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И РАВНЫМИ ГРАНЯМИ (МНОГОУГОЛЬНИКАМИ), А ДРУГИЕ ГРАНИ ПРИ ЭТОМ ЯВЛЯЮТСЯ ПАРАЛЛЕЛОГРАММАМИ.



треугольная



четырёхугольная



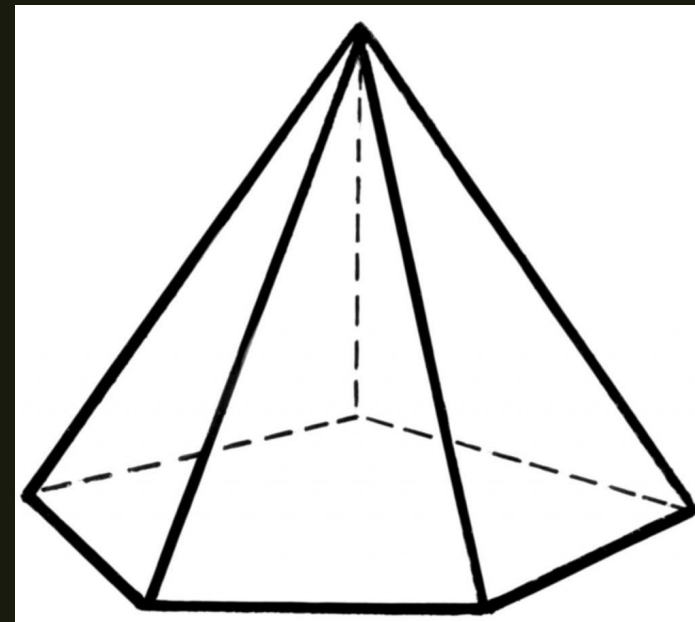
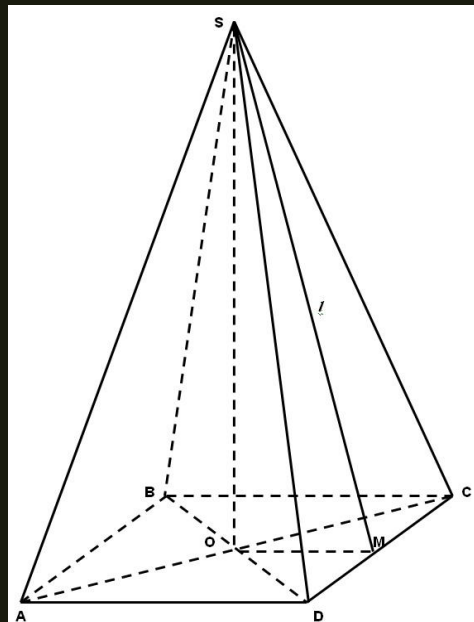
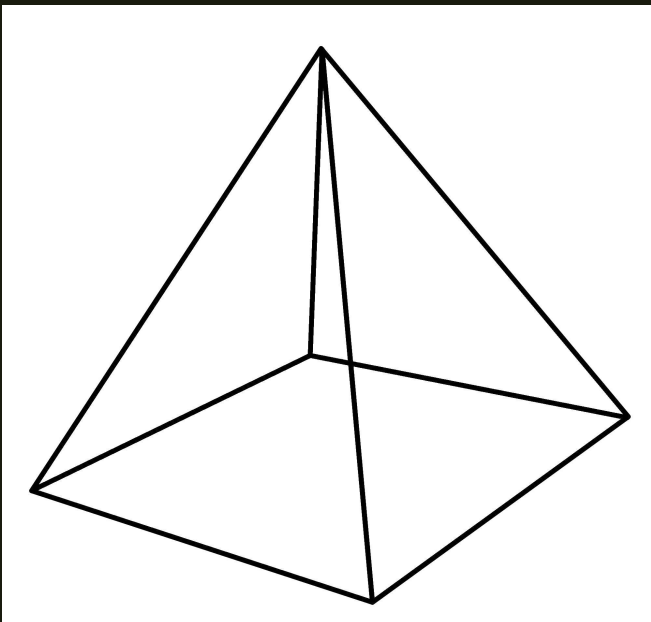
пятиугольная



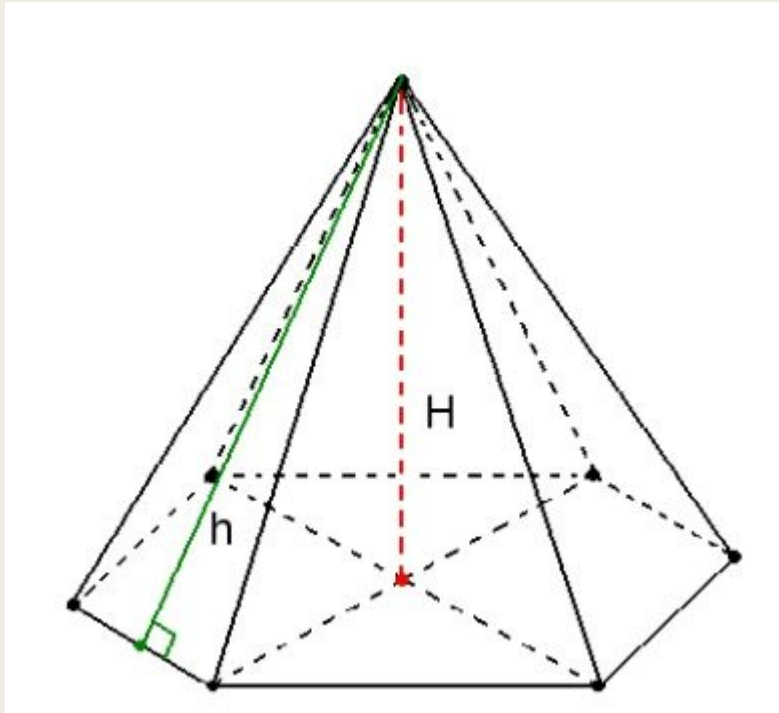
шестиугольная

**ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ ПРИЗМЫ**

	<b>Наклонная призма</b>	<b>Прямая призма</b>
Боковая поверхность	$S_{\text{бок.}} = P_{\text{пер.}} \cdot l$ , где $P_{\text{пер.}}$ – периметр перпендикулярного сечения, $l$ – длина бокового ребра.	$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot H$ , где $P_{\text{осн.}}$ – периметр основания, $H$ – высота.
Полная поверхность	$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2 \cdot S_{\text{осн.}}$	$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2 \cdot S_{\text{осн.}}$
Объем	$V = S_{\text{пер.}} \cdot l$ ; $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$ , где $S_{\text{пер.}}$ – площадь перпендикулярного сечения, $l$ – боковое ребро.	$V = S_{\text{осн.}} \cdot H$ , где $S_{\text{осн.}}$ – площадь основания призмы, $H$ – высота.



МНОГОГРАННИК, СОСТАВЛЕННЫЙ ИЗ  $n$ -УГОЛЬНИКА И ТРЕУГОЛЬНИКОВ НАЗЫВАЕТСЯ  $n$ -УГОЛЬНОЙ ПИРАМИДОЙ.



$$S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

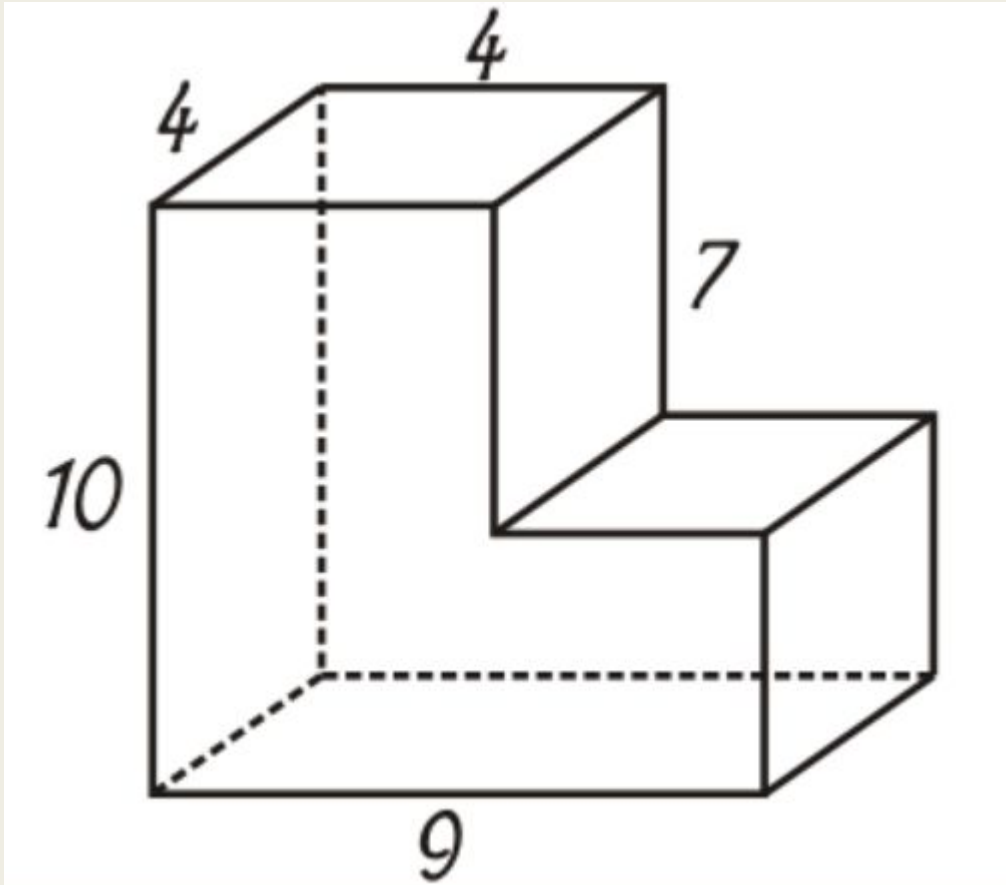
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн.}} \cdot h$$

- для правильной пирамиды

## Задача 1

Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



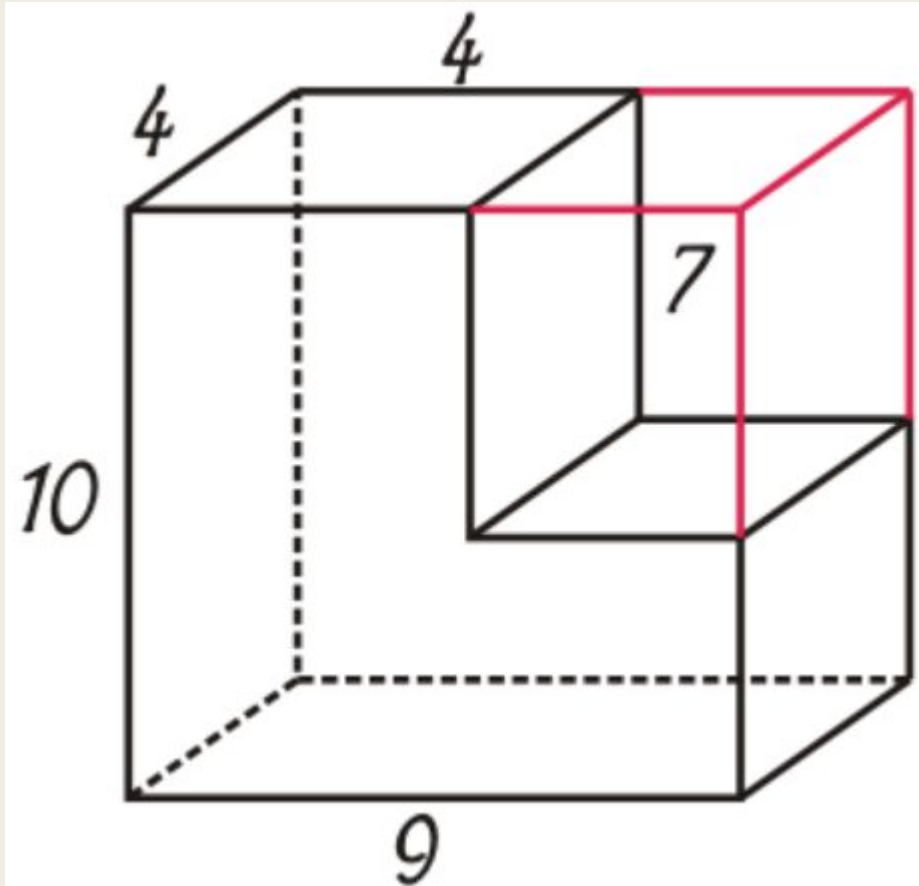
**Задачи на нахождение объема составного многогранника:**

1. Составной многогранник надо достроить до полного параллелепипеда или куба.
2. Найти объем параллелепипеда.
3. Найти объем лишней части фигуры.
4. Вычесть из объема параллелепипеда объем лишней части.



## Решение

1. Достроим составной многогранник до параллелепипеда.



Найдем его объем. Для этого перемножим все три измерения параллелепипеда:

$$V=10 \cdot 9 \cdot 4=360$$

2. Найдем объем лишнего маленького параллелепипеда:

Его длина равна  $9-4=5$

Ширина равна 4

Высота равна 7

$$V=7 \cdot 4 \cdot 5=140$$

3. Вычтем из объема параллелепипеда объем лишней части и получим объем заданной фигуры:

$$V=360-140=220$$

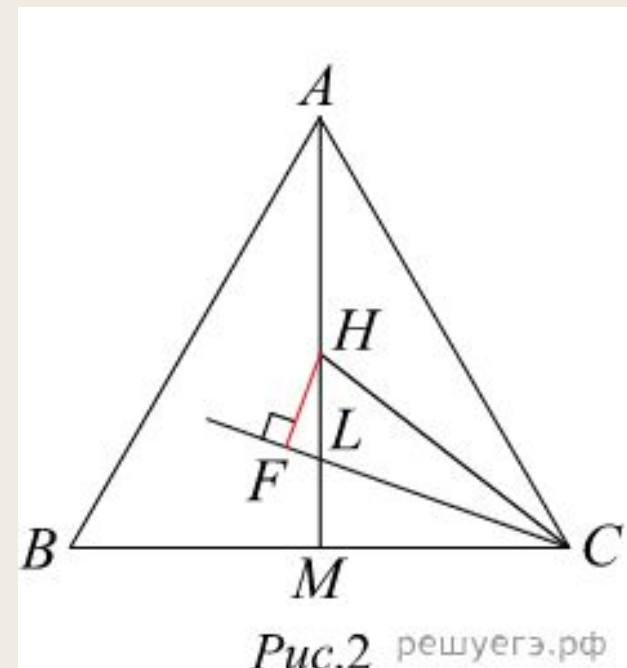
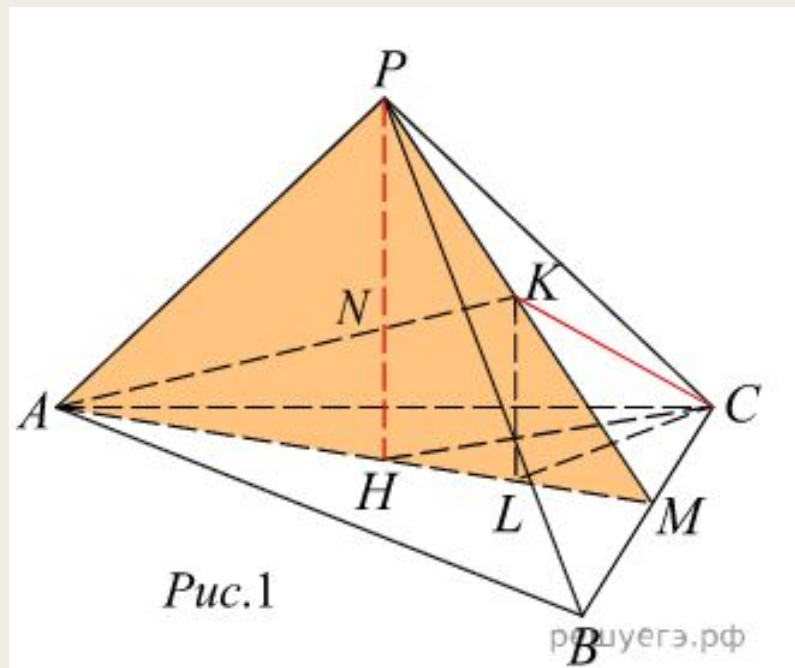
Ответ: 220

## Задача 2 (Из ОБЗ 2022, профильный уровень)

**11.** Основание пирамиды  $SABC$  — правильный треугольник  $ABC$ , сторона которого равна 16, боковое ребро  $SA = 8\sqrt{3}$ . Высота пирамиды  $SH$  делит высоту  $AM$  треугольника  $ABC$  пополам. Через вершину  $A$  проведена плоскость, перпендикулярная прямой  $SM$  и пересекающая прямую  $SM$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что плоскость делит высоту  $SH$  пирамиды  $SABC$  в отношении 2:1, считая от вершины  $S$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $SH$  и  $CK$ .



### Решение.

а) Пусть прямая  $AK$  пересекает прямую  $PH$  в точке  $N$  (см. рисунок 1). Так как  $\alpha \perp PM$  и  $AK \subset \alpha$ , то  $AK \perp PM$ . Далее имеем:  $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} = AP$ . Значит,  $AK$  — высота и медиана треугольника  $PAM$ . Следовательно,  $N$  — точка пересечения медиан этого треугольника, откуда и получаем  $PN : NH = 2 : 1$ , что и требовалось доказать.

б) Пусть точка  $L$  — проекция точки  $K$  на плоскость  $ABC$ , тогда  $KL \parallel PH$  и, значит,  $L \in AM$ . Так как  $KL \parallel PH$  и  $PK = KM$ , то  $L$  — середина  $MH$ . Отрезок  $CL$  — проекция отрезка  $CK$  на плоскость  $ABC$ .

Далее, поскольку  $(ABC) \perp PH$ , точка  $H$  — проекция прямой  $PH$  на плоскость  $ABC$ . Значит, расстояние между прямыми  $PH$  и  $CK$  равно расстоянию от точки  $H$  до прямой  $CL$ , т. е., высоте  $HF$  треугольника  $CHL$ . (см. рисунок 2).

Далее имеем:  $HM = \frac{AM}{2} = 4\sqrt{3}$ ,  $LH = LM = \frac{HM}{2} = 2\sqrt{3}$ ,

$CL = \sqrt{CM^2 + LM^2} = 2\sqrt{19}$ ,  $HF = \frac{2S_{\Delta CHL}}{CL}$ . Так как  $LH = LM$ , то  $S_{\Delta CHL} = S_{\Delta CLM}$ . Таким образом,

$$HF = \frac{2S_{\Delta CHL}}{CL} = \frac{CM \cdot ML}{CL} = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \frac{24}{\sqrt{57}}.$$

Ответ: б)  $\frac{24}{\sqrt{57}}$ .

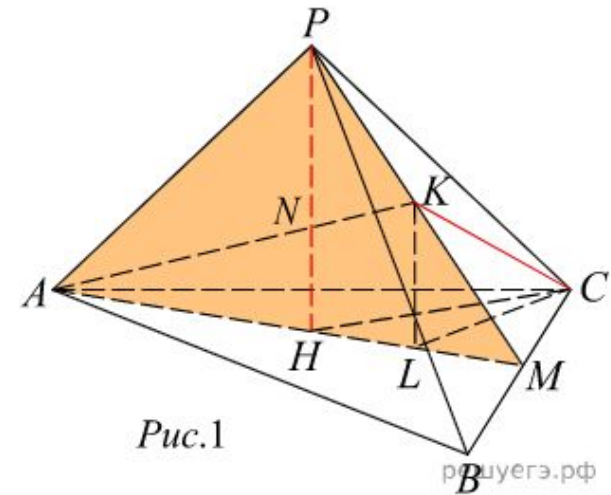


Рис.1

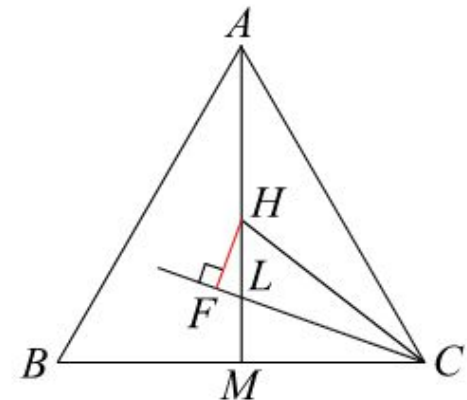
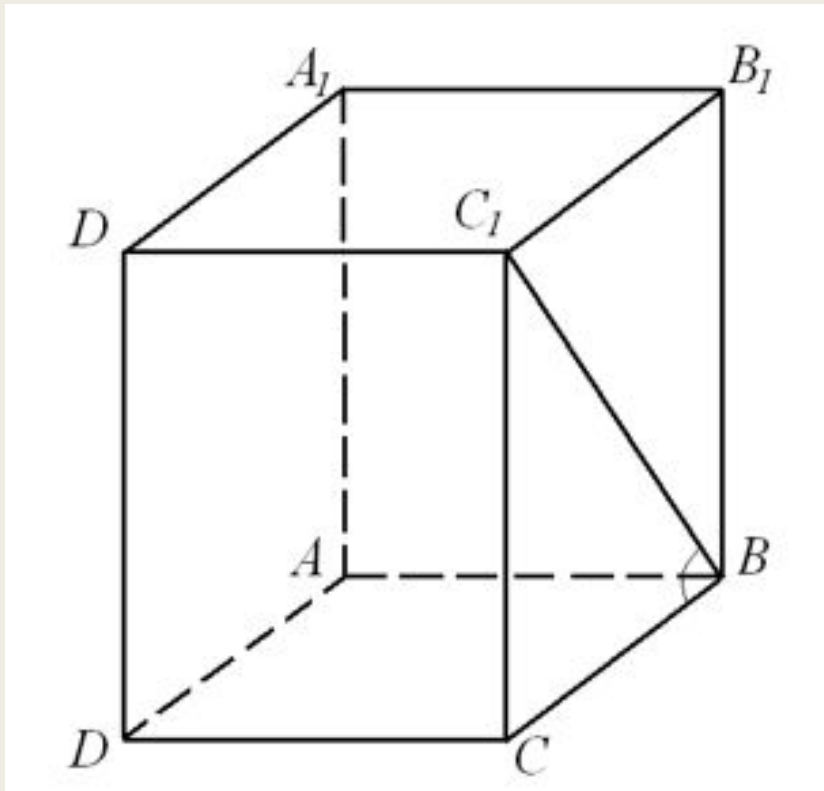


Рис.2 решуегэ.рф

## Задача 3 (Из ГИА 2019 № 20)

20. В правильной четырехугольной призме диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом  $\beta$ . Определите площадь полной поверхности, если площадь основания равна  $Q$ .



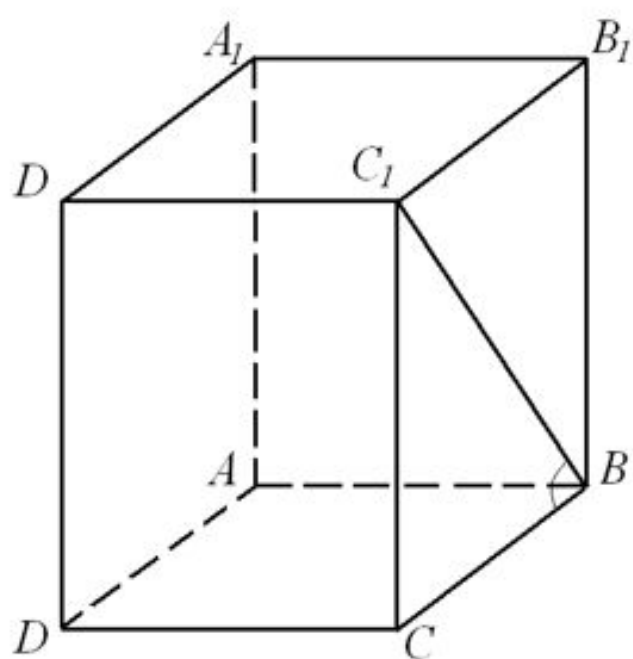
### Поэлементный

анализ изображения призмы;

- обоснование угла между диагональю боковой грани и плоскостью основания;
- знание формулы площади квадрата и выражение стороны квадрата через площадь;
- знание формулы периметра квадрата;
- знание соотношений между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике
- нахождение площади боковой поверхности призмы;
- нахождение площади полной поверхности призмы;
- ответ.



### Решение:



Пусть  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – правильная четырехугольная призма. Значит, ее основание  $ABCD$  – квадрат,  $S_{ABCD} = Q$ . Высотой ёпризмы будет боковое ребро. Так как  $CC_1 \perp ABC$ , то диагональ боковой грани  $BC_1$  – наклонная к плоскости  $ABC$ ,  $BC$  – проекция  $BC_1$  на плоскость основания и  $\angle C B C_1 = \beta$ , как угол наклона диагонали  $BC_1$  боковой грани к плоскости основания.

Найдем площадь полной поверхности призмы по формуле:

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + 2S_{ABCD}, \text{ где } S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} H = P_{ABCD} \cdot CC_1.$$

Так как площадь квадрата равна  $S_{ABCD} = BC^2$ , то  $BC^2 = Q$ . Тогда  $BC = \sqrt{Q}$  и  $P_{ABCD} = 4BC = 4\sqrt{Q}$ . Так как  $CC_1 \perp ABC$ , то  $CC_1 \perp BC$ .

$$\text{Из } \triangle BCC_1 \angle(BCC_1 = 90^\circ): CC_1 = BC \cdot \text{tg} \angle C B C_1 = \sqrt{Q} \cdot \text{tg} \beta$$

$$S_{\text{бок}} = P_{ABCD} \cdot CC_1 = 4\sqrt{Q} \cdot \sqrt{Q} \cdot \text{tg} \beta = 4Q \cdot \text{tg} \beta. \quad S_{\text{пол}} = 4Q \cdot \text{tg} \beta + 2Q = 2Q(2\text{tg} \beta + 1).$$

**Ответ:**  $2Q(2\text{tg} \beta + 1)$

# Полезные ссылки для подготовки к ГИА и ЕГЭ

- **Простая стереометрическая задача -**  
<https://mat-ege.ru/ege-profile/profile-8-prostaja-stereometrisheskaja-zadacha/#block1>
- **Задание 14. Стереометрическая задача: все задания -**  
[https://yandex.ru/tutor/subject/tag/problems/?ege\\_number\\_id=356&tag\\_id=19](https://yandex.ru/tutor/subject/tag/problems/?ege_number_id=356&tag_id=19)
- **Стереометрия. Задание 14 (часть 1)-**  
[https://yandex.ru/tutor/uroki/ege/profilnaya-matematika/15-05-matematika-podgotovka-k-egheh-profilnyj-uroven-20-stereometriya-zadanie-14-chast-1\\_484cb7ff44108a5083285e7ee84fb44a/](https://yandex.ru/tutor/uroki/ege/profilnaya-matematika/15-05-matematika-podgotovka-k-egheh-profilnyj-uroven-20-stereometriya-zadanie-14-chast-1_484cb7ff44108a5083285e7ee84fb44a/)
- **Стереометрия. Задание 8 -**  
[https://yandex.ru/tutor/uroki/ege/profilnaya-matematika/14-05-matematika-podgotovka-k-egheh-profilnyj-uroven-19-stereometriya-zadanie-8\\_4ee0584a50d1bae89d78c84654386bdf/](https://yandex.ru/tutor/uroki/ege/profilnaya-matematika/14-05-matematika-podgotovka-k-egheh-profilnyj-uroven-19-stereometriya-zadanie-8_4ee0584a50d1bae89d78c84654386bdf/)
- **СДАМ ГИА: РЕШУ ВПР, ОГЭ, ЕГЭ, ГВЭ и ЦТ -** <https://sdamgia.ru>