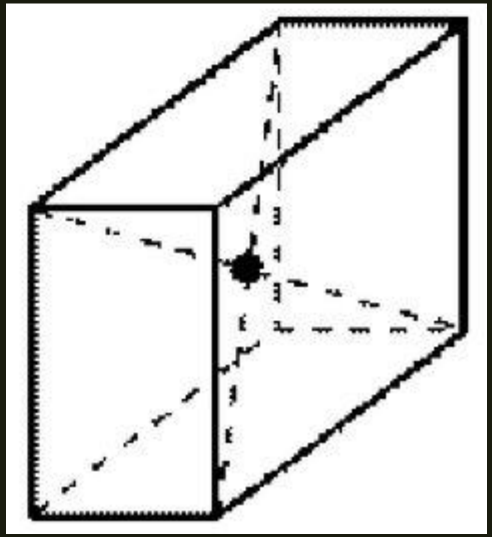
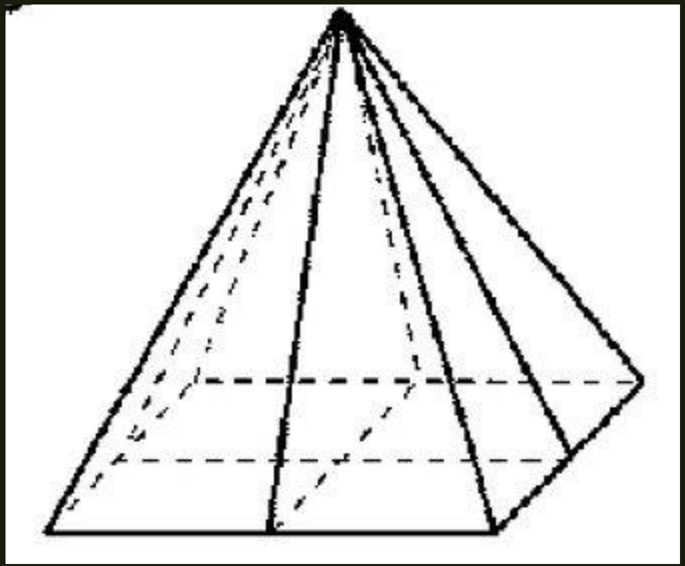
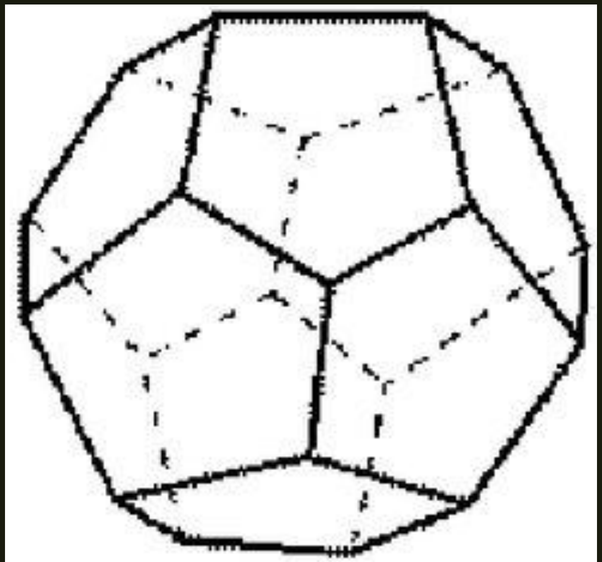
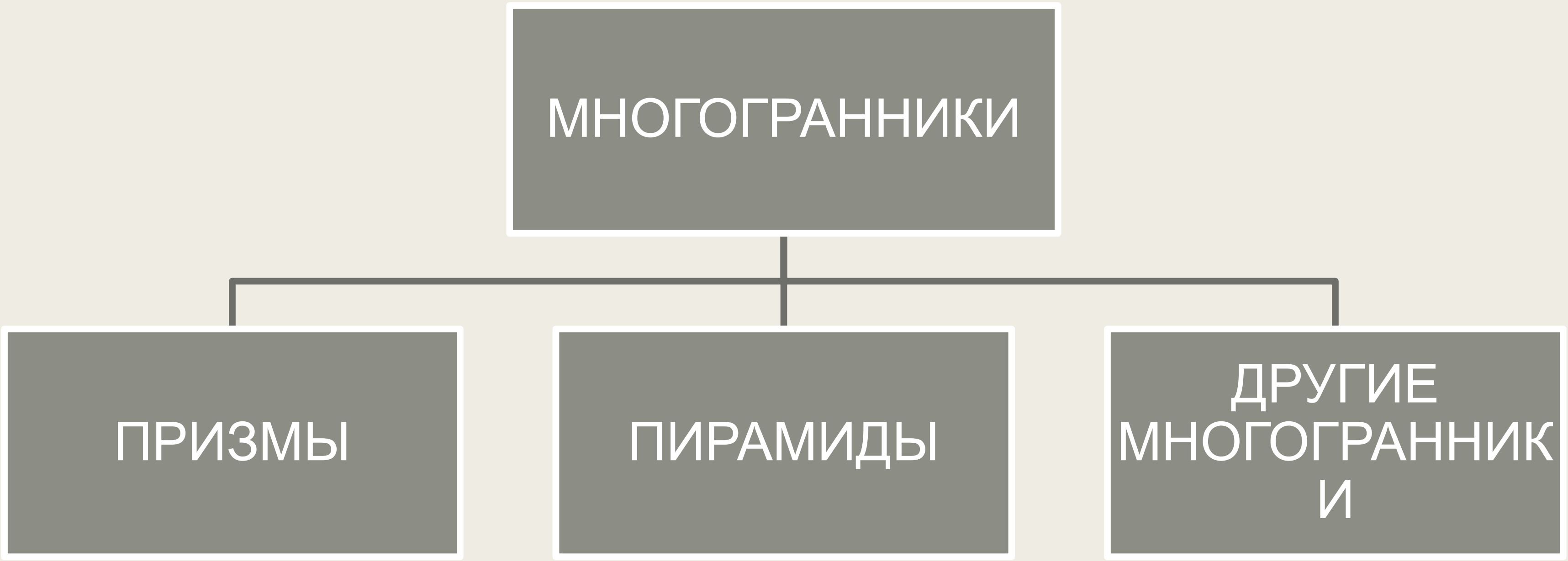
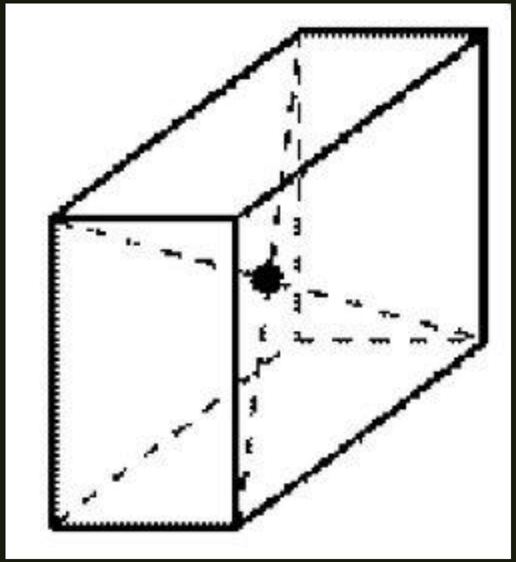
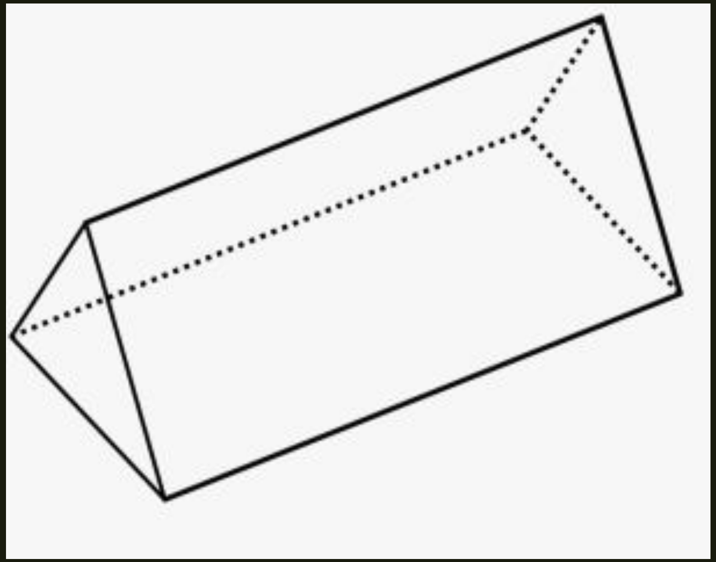
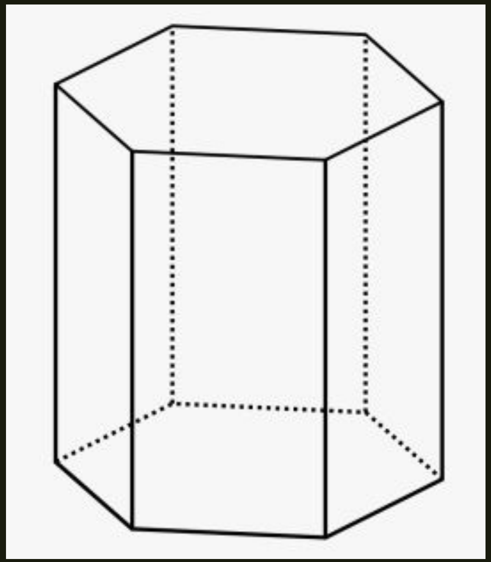
РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ И ОБЪЕМОВ МНОГОГРАННИКОВ

Подготовила
учитель математики
МБОУ «ШКОЛА №85 Г.ДОНЕЦКА»
Юлина С.Л.

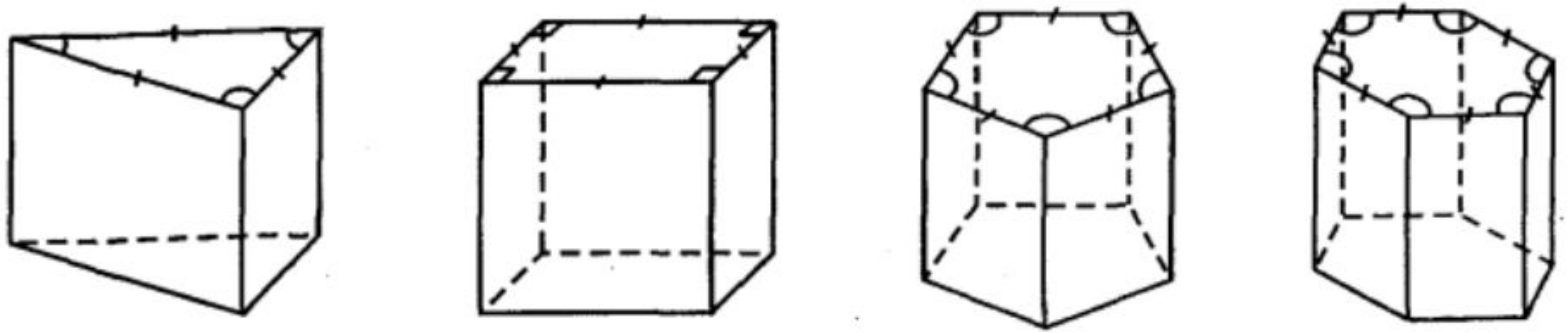
  

МНОГОГРАННИК – ЭТО ПОВЕРХНОСТЬ, СОСТАВЛЕННАЯ ИЗ МНОГОУГОЛЬНИКОВ, ОГРАНИЧИВАЮЩАЯ НЕКОТОРОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ТЕЛО


МНОГОГРАННИКИ
ПРИЗМЫ
ПИРАМИДЫ
ДРУГИЕ МНОГОГРАННИКИ

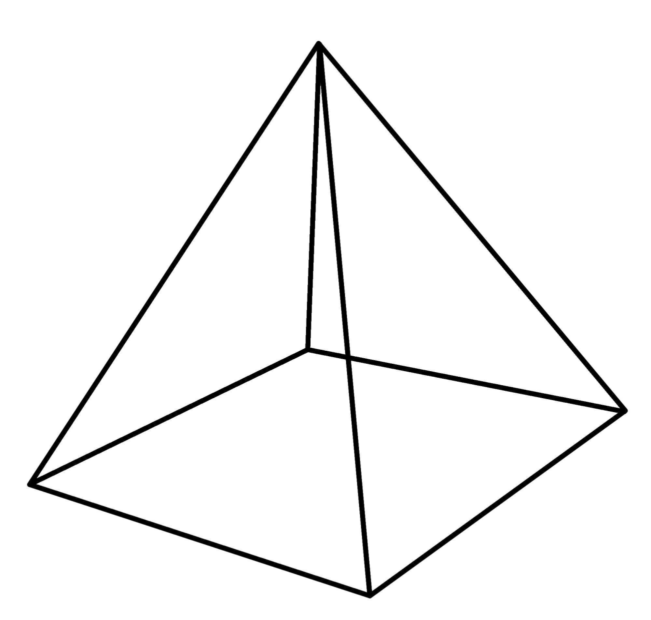
ПРИЗМА – ЭТО ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА В ПРОСТРАНСТВЕ; МНОГОГРАННИК С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ И РАВНЫМИ ГРАНЯМИ (МНОГОУГОЛЬНИКАМИ), А ДРУГИЕ ГРАНИ ПРИ ЭТОМ ЯВЛЯЮТСЯ ПАРАЛЛЕЛОГРАММАМИ.

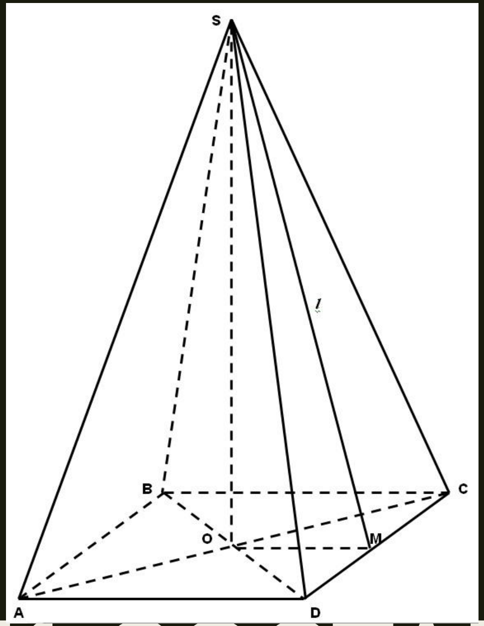


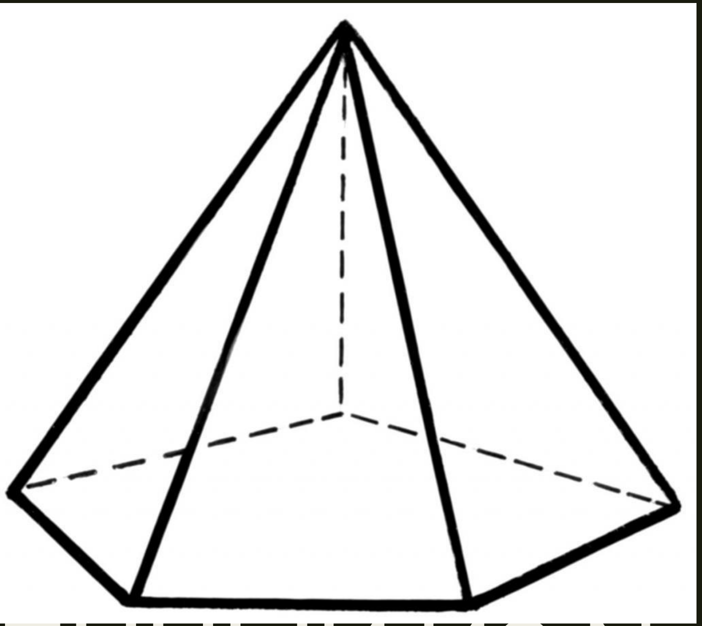
треугольная четырехугольная пятиугольная шестиугольная

ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

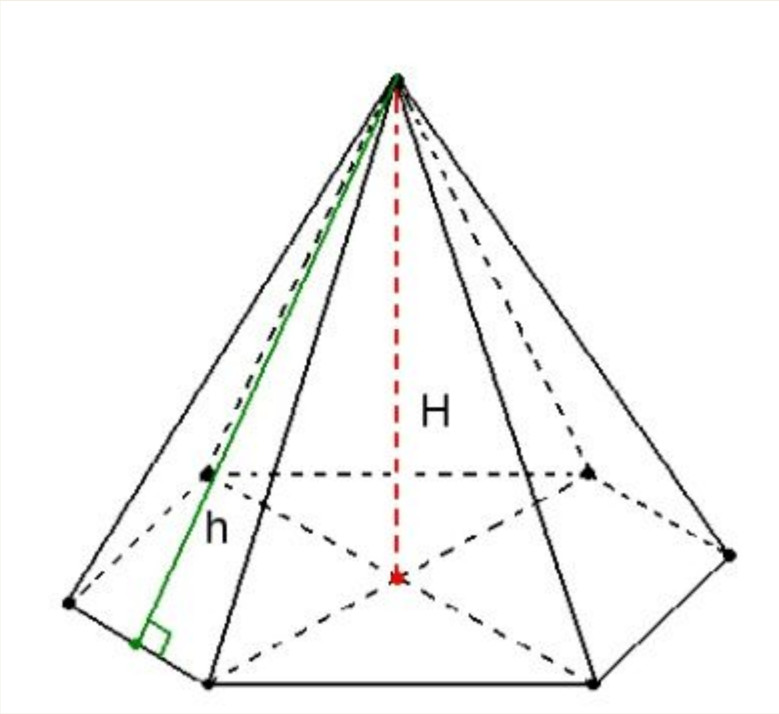
	Наклонная призма	Прямая призма
Боковая поверхность	$S_{бок.} = P_{пер.} \cdot l$, где $P_{пер.}$ – периметр перпендикулярного сечения, l – длина бокового ребра.	$S_{бок.} = P_{осн.} \cdot H$, где $P_{осн.}$ – периметр основания, H – высота.
Полная поверхность	$S_{полн.} = S_{бок.} + 2 \cdot S_{осн.}$	$S_{полн.} = S_{бок.} + 2 \cdot S_{осн.}$
Объем	$V = S_{пер} \cdot l$; $V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{пер.}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро.	$V = S_{осн.} \cdot H$, где $S_{осн.}$ – площадь основания призмы, H – высота.







МНОГОГРАННИК, СОСТАВЛЕННЫЙ ИЗ N-УГОЛЬНИКА N ТРЕУГОЛЬНИКОВ НАЗЫВАЕТСЯ N-УГОЛЬНОЙ ПИРАМИДОЙ.



$$S_{\text{пов}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

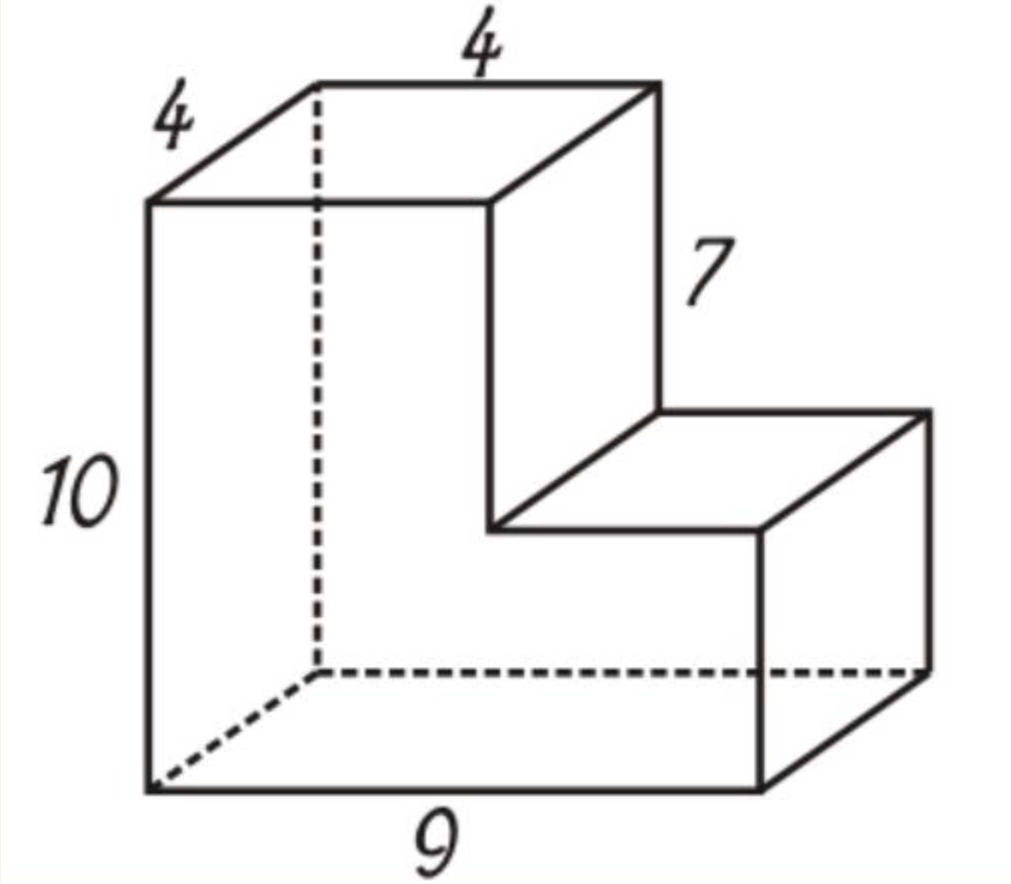
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H$$

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot P_{\text{осн.}} \cdot h$$

- для правильной пирамиды

Задача 1

Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).

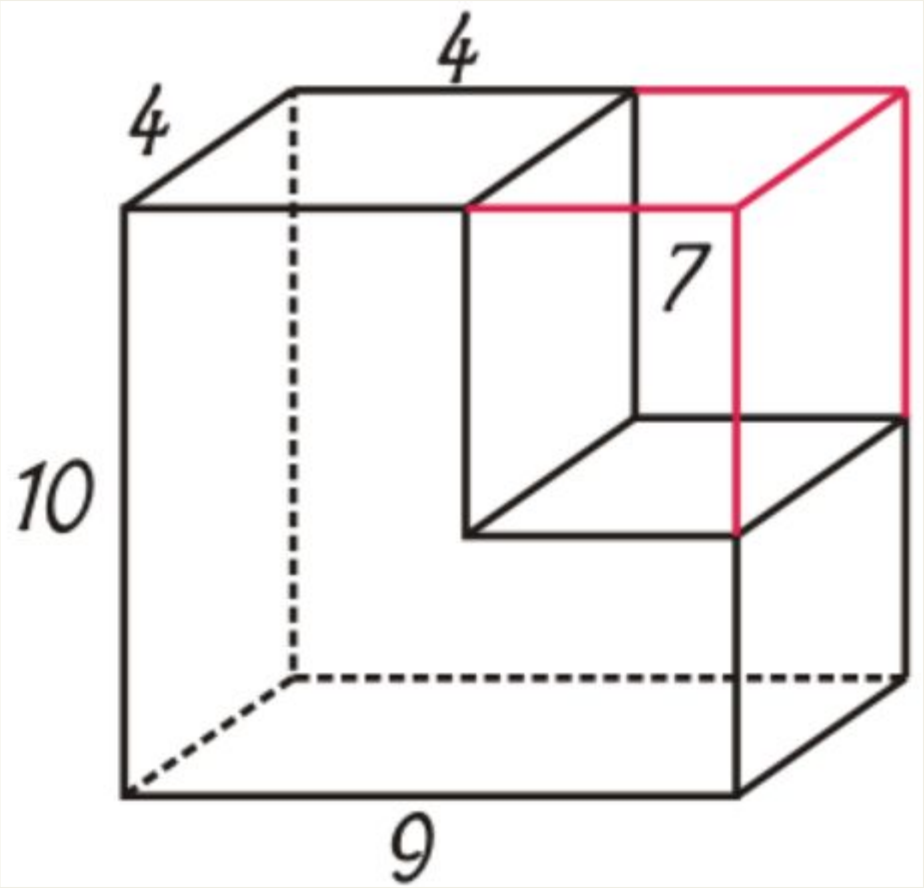


Задачи на нахождение объема составного многогранника:

1. Составной многогранник надо достроить до полного параллелепипеда или куба.
2. Найти объем параллелепипеда.
3. Найти объем лишней части фигуры.
4. Вычесть из объема параллелепипеда объем лишней части.

Решение

1. Достроим составной многогранник до параллелепипеда.



Найдем его объем. Для этого перемножим все три измерения параллелепипеда:

$V=10\cdot9\cdot4=360$

2. Найдем объем лишнего маленького параллелепипеда:

Его длина равна $9-4=5$

Ширина равна 4

Высота равна 7

$V=7\cdot4\cdot5=140$

3. Вычтем из объема параллелепипеда объем лишней части и получим объем заданной фигуры:

$V=360-140=220$

Ответ: 220

Задача 2 (Из ОБЗ 2022, профильный уровень)

11. Основание пирамиды $SABC$ — правильный треугольник ABC, сторона которого равна 16, боковое ребро $SA = 8\sqrt{3}$. Высота пирамиды SH делит высоту AM треугольника ABC пополам. Через вершину A проведена плоскость, перпендикулярная прямой SM и пересекающая прямую SM в точке K.

а) Докажите, что плоскость делит высоту SH пирамиды $SABC$ в отношении 2:1, считая от вершины S.

б) Найдите расстояние между прямыми SH и CK.

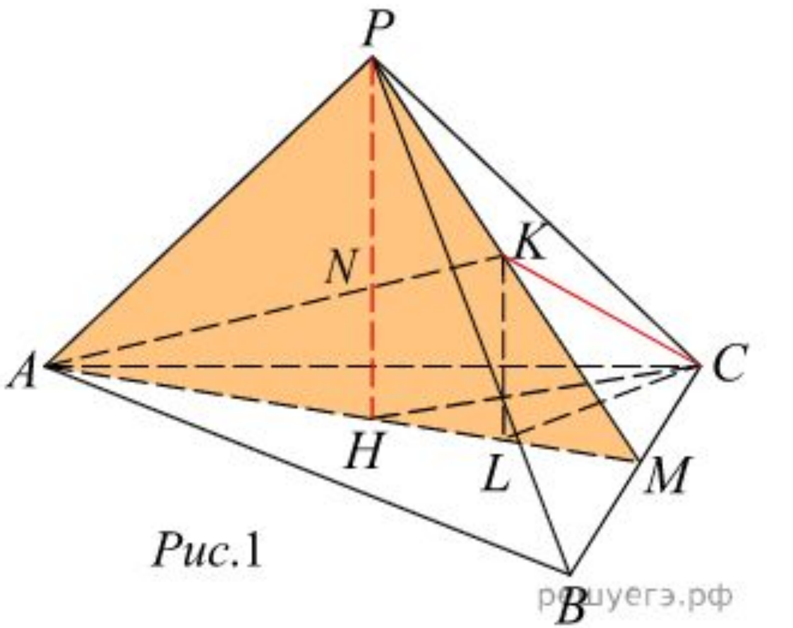


*Рис.*1

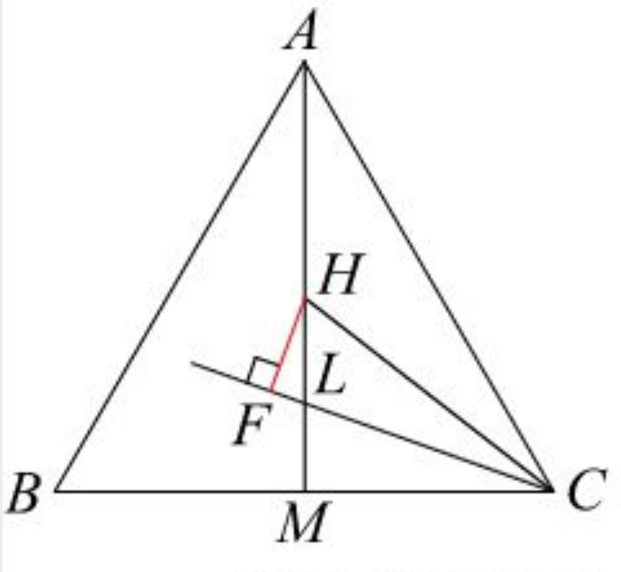


*Рис.*2

Решение.

а) Пусть прямая AK пересекает прямую PH в точке N (см. рисунок 1). Так как $\alpha \perp PM$ и $AK \subset \alpha$, то $AK \perp PM$. Далее имеем: $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} = AP$. Значит, AK — высота и медиана треугольника PAM. Следовательно, N — точка пересечения медиан этого треугольника, откуда и получаем $PN : NH = 2 : 1$, что и требовалось доказать.

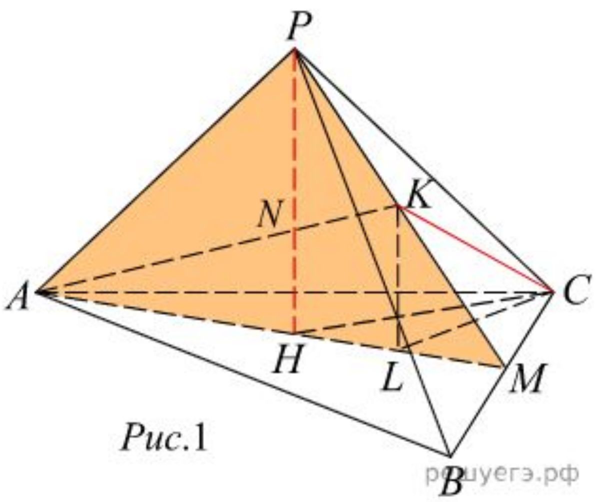


*Рис.*1

б) Пусть точка L — проекция точки K на плоскость ABC, тогда $KL \parallel PH$ и, значит, $L \in AM$. Так как $KL \parallel PH$ и $PK = KM$, то L — середина MH. Отрезок CL — проекция отрезка CK на плоскость ABC.

Далее, поскольку $(ABC) \perp PH$, точка H — проекция прямой PH на плоскость ABC. Значит, расстояние между прямыми PH и CK равно расстоянию от точки H до прямой CL, т. е., высоте HF треугольника CHL. (см. рисунок 2).

Далее имеем: $HM = \frac{AM}{2} = 4\sqrt{3}$, $LH = LM = \frac{HM}{2} = 2\sqrt{3}$,

$CL = \sqrt{CM^2 + LM^2} = 2\sqrt{19}$, $HF = \frac{2S_{\Delta CHL}}{CL}$. Так как $LH = LM$, то $S_{\Delta CHL} = S_{\Delta CLM}$. Таким образом,

$$HF = \frac{2S_{\Delta CHL}}{CL} = \frac{CM \cdot ML}{CL} = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \frac{24}{\sqrt{57}}.$$

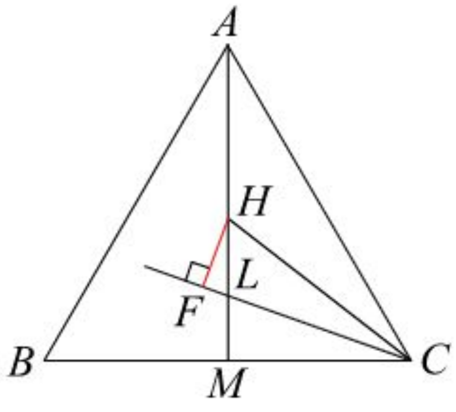
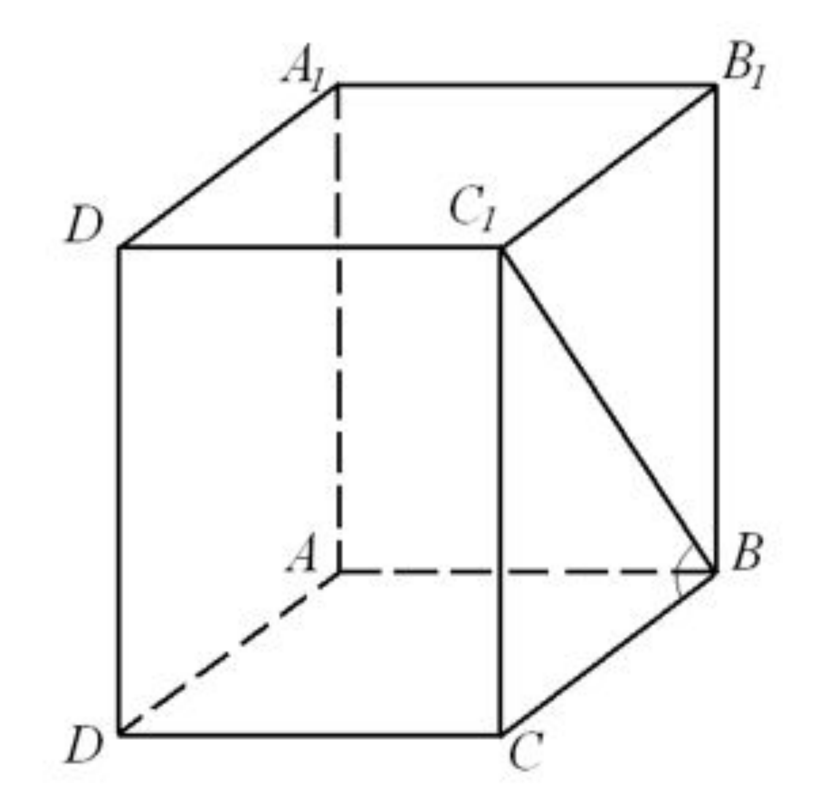


*Рис.*2

Ответ: б) $\frac{24}{\sqrt{57}}$.

Задача 3 (Из ГИА 2019 № 20)

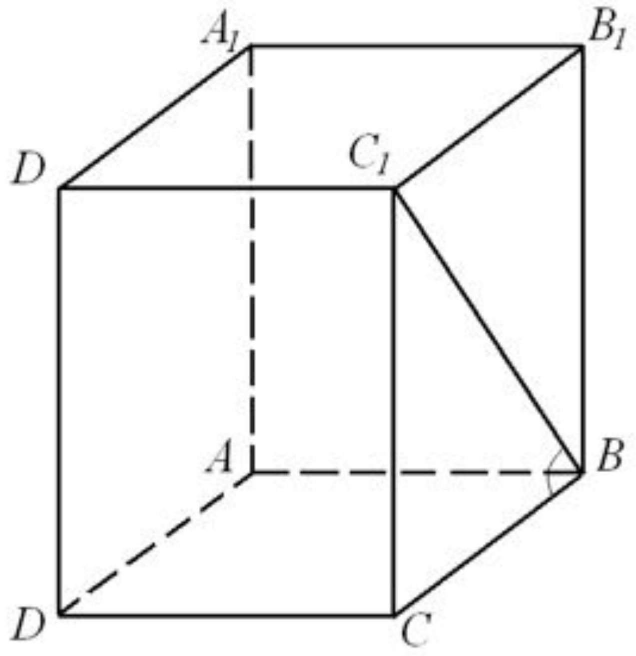
20. В правильной четырехугольной призме диагональ боковой грани наклонена к плоскости основания под углом β. Определите площадь полной поверхности, если площадь основания равна Q.



Поэлементный анализ

- изображение призмы;
- обоснование угла между диагональю боковой грани и плоскостью основания;
- знание формулы площади квадрата и выражение стороны квадрата через площадь;
- знание формулы периметра квадрата;
- знание соотношений между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике
- нахождение площади боковой поверхности призмы;
- нахождение площади полной поверхности призмы;
- ответ.

Решение:



Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырехугольная призма. Значит, ее основание $ABCD$ – квадрат, $S_{ABCD} = Q$. Высотой ёпризмы будет боковое ребро. Так как $CC_1 \perp ABC$, то диагональ боковой грани BC_1 – наклонная к плоскости ABC, BC – проекция BC_1 на плоскость основания и $\angle CBC_1 = \beta$, как угол наклона диагонали BC_1 боковой грани к плоскости основания.

Найдем площадь полной поверхности призмы по формуле: $S_{пол} = S_{бок} + 2S_{ABCD}$, где $S_{бок} = P_{осн}H = P_{ABCD} \cdot CC_1$.

Так как площадь квадрата равна $S_{ABCD} = BC^2$, то $BC^2 = Q$. Тогда $BC = \sqrt{Q}$ и $P_{ABCD} = 4BC = 4\sqrt{Q}$. Так как $CC_1 \perp ABC$, то $CC_1 \perp BC$.

Из $\Delta BCC_1\ \angle(BCC_1 = 90°)$: $CC_1 = BC \cdot tg\angle CBC_1 = \sqrt{Q} \cdot tg\beta$

$S_{бок} = P_{ABCD} \cdot CC_1 = 4\sqrt{Q} \cdot \sqrt{Q} \cdot tg\beta = 4Q \cdot tg\beta$. $S_{пол} = 4Q \cdot tg\beta + 2Q = 2Q(2tg\beta + 1)$.

Ответ: $2Q(2tg\beta + 1)$

Полезные ссылки для подготовки к ГИА и ЕГЭ

- **Простая стереометрическая задача -** https://mat-ege.ru/ege-profile/profile-8-prostaja-stereometricheskaja-zadacha/#block1
- **Задание 14. Стереометрическая задача: все задания -** https://yandex.ru/tutor/subject/tag/problems/?ege_number_id=356&tag_id=19
- **Стереометрия. Задание 14 (часть 1)-** https://yandex.ru/tutor/uroki/ege/profilnaya-matematika/15-05-matematika-podgotovka-k-egeh-profilnyj-uroven-20-stereometriya-zadanie-14-chast-1_484cb7ff44108a5083285e7ee84fb44a/
- **Стереометрия. Задание 8 -** https://yandex.ru/tutor/uroki/ege/profilnaya-matematika/14-05-matematika-podgotovka-k-egeh-profilnyj-uroven-19-stereometriya-zadanie-8_4ee0584a50d1bae89d78c84654386bdf/
- **СДАМ ГИА: РЕШУ ВПР, ОГЭ, ЕГЭ, ГВЭ и ЦТ -** https://sdamgia.ru