

---

# АЛГЕБРА

(3-й семестр)

Доцент  
Мартынова Т.А.

2010-11  
учебный год

---

# Цели и задачи дисциплины «Алгебра» на 3-ем семестре

- **Основной целью** преподавания дисциплины «Алгебра» на 3-ем семестре является изложение темы «Многочлены».
- **Задачи дисциплины:**
- построить кольцо многочленов от одной переменной и рассмотреть в нем вопросы делимости, приводимости и неприводимости многочленов, отделение кратных множителей, разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей;
- особо рассмотреть многочлены над основными числовыми полями комплексных, действительных и рациональных чисел, наиболее часто встречающиеся в школьной математике;
- построить кольцо многочленов от нескольких переменных, рассмотреть симметрические многочлены и понятия результата и дискриминанта 2-х многочленов и указать на их применение для решения систем алгебраических уравнений.

# Виды учебной работы и объем ДИСЦИПЛИНЫ в часах

■ Лекции	<b>22</b>
■ Практические занятия	<b>20</b>
■ СРС	<b>58</b>
■ Общая трудоемкость	<b>100</b>
■ Формы контроля	<b>2 к.р. + Экз.</b>

# Рекомендуемая литература

- Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. - М.; Высшая школа, 1979.
- Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре / Санкт-Петербург: Лань, 2002.
- Мартынов Л.М. Элементы алгебры и теории чисел – Омск: СибАДИ, 2006. 195с.
- **Сборники задач:**
- Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.

---

# МНОГОЧЛЕННЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Доцент  
Мартынова Т.А.

## ЛЕКЦИЯ 1

---

# ГЛАВА I. МНОГОЧЛЕННЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

*Основными задачами* главы являются рассмотрение вопросов:

1. Построение кольца многочленов от одной переменной.
  2. Деление с остатком многочленов, схема Горнера.
  3. НОД и НОК многочленов; нахождение НОД с помощью алгоритма Евклида и его линейного представления.
  4. Свойства взаимно простых многочленов.
  5. Корни многочлена, теоремы о них; теорема тождественности для многочленов.
  6. Приводимые и неприводимые многочлены.
  7. Производная многочлена и формула Тейлора.
  8. Отделение кратных множителей.
  9. Рациональные дроби.
-

# §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- В школьной алгебре одночленом от переменной  $x$  называется алгебраическое выражение вида  $ax^m$ , где  $a$  – некоторое число,  $x$  – переменная,  $m$  – целое неотрицательное число.
- Одночлен  $ax^0$  отождествляется с числом  $a$ , так что числа рассматриваются как одночлены.
- Далее, одночлены называются **подобными**, если показатели при переменной  $x$  одинаковы.
- Подобные одночлены складываются по правилу ,

$$ax^m + bx^m = (a + b)x^m$$

- называемому **приведением подобных членов**.

# §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- Многочленом от переменной  $x$  называется алгебраическая сумма одночленов.
- В многочлене порядок слагаемых безразличен и подобные одночлены можно соединять, согласно приведению подобных членов. Поэтому любой многочлен можно записать в каноническом виде

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

- с расположением членов в порядке убывания показателей.
- Иногда оказывается удобным записывать члены многочлена в порядке возрастания показателей

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

# §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

- Переменной  $x$  можно придавать любые числовые значения и для каждого из них можно вычислить значение многочлена и поэтому многочлен задает функцию от  $x$ , называемую целой рациональной функцией.
- Два многочлена называются формально равными, если они в канонической записи составлены из одинаковых одночленов.
- Ясно, что формально равные многочлены равны и как функции, т.е. принимают одинаковые значения при каждом значении буквы  $x$ .
- Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Случаи, когда оно верно, будут описаны ниже.
-

# §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- Наша задача сейчас состоит в том, чтобы несколько расширить понятие многочлена.
- Пусть  $K$  – некоторое коммутативное кольцо с единицей, и пусть  $x$  – переменная буква, посторонняя для кольца  $K$ .
- **Определение 1.** *Многочленом от переменной  $x$  над  $K$*  будем называть формальное выражение вида

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad (1)$$

- где  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$  – элементы кольца  $K$ , которые называют *коэффициентами многочлена  $f(x)$* .
- Обратим внимание на то, что в записи (1) знак  $+$  и выражения вида  $a_i x^i$  при  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  (их называют *членами многочлена  $f(x)$* ) следует пока воспринимать как символы, не имеющие содержательного смысла (считаем, что  $x^0$  есть пустой символ).

# §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \quad (1)$$

- **Определение 2.** Коэффициент  $a_0$  называется *свободным членом* многочлена  $f(x)$ . Если  $a_n \neq 0$ , то одночлен  $a_nx^n$  называется *старшим (высшим) членом* и показатель  $n$  называется *степенью*  $f(x)$  и обозначается  $\deg f(x)$ . Старший член *нулевого многочлена*  $0(x)=0$  считается равным нулю. *Степень нулевого многочлена* будем считать равной  $-1$ .
- Нулевой многочлен отождествляется с нулем кольца  $K$ , а ненулевой многочлен нулевой степени вида  $f(x) = a_0$  отождествляется с элементом  $a_0$  кольца  $K$ .
- **Определение 3.** Многочлен, старший коэффициент которого равен единице, называется *нормированным*.

# §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Определение 4.** Два многочлена считаются *равными*, если равны их степени и соответствующие коэффициенты, т.е. если

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n ,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

- – многочлены над  $K$ , то

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad n = m \quad \wedge \quad a_i = b_i \quad (i = 0, 1, \dots, n) .$$

# §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- Обозначим через  $K[x]$  множество всех многочленов от переменной  $x$  над кольцом  $K$  и определим на этом множестве две бинарные операции – сложение и умножение многочленов.

- **Определение 5.** Суммой многочленов

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad \text{и} \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

- называется многочлен

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_s + b_s)x^s, \quad (2)$$

- где  $s = \max(n, m)$  и считаем  $a_i = 0$ , если  $i > n$ , и  $b_j = 0$ , если  $j > m$ .
- Таким образом, если многочлены  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют разное число одночленов, то для нахождения их суммы согласно определению надо дописать необходимое число одночленов с нулевыми коэффициентами к одному из них, в котором число одночленов меньше, и затем сложить соответствующие коэффициенты.

# §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Определение 5.** Суммой многочленов  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  и  $g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$

- называется многочлен

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_s + b_s)x^s, \quad (2)$$

- Например, если  $f(x) = 3 + 4x - 5x^2 + 2x^3$ ,  $g(x) = 5 + 2x$ , то преобразуем  $g(x)$  к виду  $g(x) = 5 + 2x + 0x^2 + 0x^3$ , добавив два нулевых одночлена, и тогда суммой  $f(x)$  и  $g(x)$  будет многочлен

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= (3+5) + (4+2)x + (-5+0)x^2 + (2+0)x^3 = \\ &= 8 + 6x - 5x^2 + 2x^3. \end{aligned}$$

## §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

### ■ **Определение 6.** Произведением многочленов

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad \text{и} \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

и называется многочлен

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k + \dots + c_{n+m}x^{n+m} \quad (3)$$

где  $c_0 = a_0b_0$ ,  $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$ ,  $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$ , ...

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j, \quad \dots, \quad c_{n+m} = a_n b_m$$

(при вычислении коэффициента  $c_k$ , как и при сложении многочленов, считаем, что  $a_i = 0$  при  $i > n$  и  $b_j = 0$  при  $j > m$ ).

Другими словами, для практического нахождения произведения двух многочленов достаточно найти по известным правилам умножения одночленов произведения всех членов первого сомножителя на все члены второго и затем привести подобные члены.

## §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Определение 6.** Произведением многочленов

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$$

- и называется многочлен

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k + \dots + c_{n+m}x^{n+m} \quad (3)$$

- где  $c_0 = a_0b_0$ ,  $c_1 = a_0b_1 + a_1b_0$ ,  $c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0$ , ...

- $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ , ...,  $c_{n+m} = a_n b_m$

- Например, если  $f(x) = 3 + x + 2x^2$ ,  $g(x) = 5 + 2x$ ,  
то

$$f(x)g(x) = 15 + 11x + 12x^2 + 4x^3.$$

## §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Т е о р е м а 1.** Для любых многочленов  $f(x)$  и  $h(x)$  из  $K[x]$  имеют место следующие соотношения:

$$\deg(f(x)+h(x)) = \max\{\deg(f(x), \deg h(x)\} \quad (4)$$

$$\deg(f(x) \cdot h(x)) \leq \deg f(x) + \deg h(x). \quad (5)$$

- Если  $K$  – область целостности, то

$$\deg(f(x) \cdot h(x)) = \deg f(x) + \deg h(x). \quad (6)$$

- В самом деле, соотношения (4) и (5) вытекают непосредственно из определений (2) и (3).

- Если в  $K$  нет делителей нуля, то из  $a_n \neq 0$  и  $b_m \neq 0$  следует  $c_{n+m} = a_n b_m \neq 0$ , что доказывает равенство (6). ■

## §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Теорема 2.** 1) Множество  $K[x]$  всех многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из кольца  $K$  относительно определенных выше операций сложения и умножения многочленов является коммутативным кольцом с единицей, содержащим в качестве подкольца кольцо  $K$ .
- 2) Если  $K$  – область целостности, то  $K[x]$  – область целостности.
  - 1) Из определения (2) легко вытекает, что операция сложения многочленов обладает такими же свойствами, что и операция сложения элементов кольца  $K$ , т.е. ассоциативна, коммутативна;
- нулевой многочлен является нейтральным элементом сложения;
- для каждого многочлена  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  существует ему противоположный  $-f(x) = (-a_0) + (-a_1x) + \dots + (-a_n)x^n$ .
- Таким образом, множество  $K[x]$  всех многочленов с операцией сложения образует абелеву группу.

## §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Теорема 2.** 1) Множество  $K[x]$  всех многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из кольца  $K$  относительно определенных выше операций сложения и умножения многочленов является коммутативным кольцом с единицей, содержащим в качестве подкольца кольцо  $K$ .
- 2) Если  $K$  – область целостности, то  $K[x]$  – область целостности.
- Опираясь на коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность умножения относительно сложения в кольце  $K$ , можно доказать, что соответствующими свойствами обладает операция умножения в  $K[x]$ .
- Из сказанного выше вытекает, что алгебра  $(K[x]; +, \cdot)$  является коммутативным кольцом.
- Нулевой многочлен и многочлены нулевой степени – это в точности элементы кольца  $K$  и результаты операций над ними согласно определениям (2) и (3) совпадают с результатами операции над ними как элементами кольца  $K$ . Это означает, что  $K$  – подкольцо кольца  $K[x]$ .
- Нетрудно видеть, что многочлен  $f(x)=1$  (где  $1$  – единица кольца  $K$ ) играет роль единицы при умножении многочленов.

## §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Т е о р е м а 2.** 1) Множество  $K[x]$  всех многочленов от переменной  $x$  с коэффициентами из кольца  $K$  относительно определенных выше операций сложения и умножения многочленов является коммутативным кольцом с единицей, содержащим в качестве подкольца кольцо  $K$ .
- 2) Если  $K$  – область целостности, то  $K[x]$  – область целостности.
- 2) Из равенства (6) теоремы 1 вытекает отсутствие делителей нуля в коммутативном кольце  $K[x]$ , если таковых нет в кольце  $K$ . ◻
- Кольцо  $K[x]$  называется *кольцом многочленов от переменной  $x$  над кольцом  $K$* .

## §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

■ **Замечание.** Непосредственно из определения сложения многочленов вытекает, что любой многочлен  $f(x)$  является суммой одночленов и поэтому знак  $+$  в записи многочлена можно трактовать как операцию сложения многочленов частного вида, а именно одночленов. Ввиду коммутативности операции  $+$  имеем

$$a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

■ и, следовательно, многочлен  $f(x)$  можно записать, расположив его одночлены по убывающим степеням

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

## §1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- Иногда, для краткости, будем записывать многочлен  $f(x)$  в виде  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  .
- Одночлены с нулевым коэффициентом в дальнейшем, как правило, будем опускать. Понятно, что одночлен  $x^m$  при любом неотрицательном целом  $m$  согласно правилу умножения многочленов есть  $m$ -я степень одночлена  $x$ , а одночлен  $a_m x^m$  является произведением  $a_m$  на  $x^m$  как многочленов.

---

**Спасибо за  
внимание!**

---