АЛГЕБРА
(3-й семестр)

Доцент
Мартынова Т.А.

2010-11 учебный год

Цели и задачи дисциплины «Алгебра» на 3-ем семестре

- **Основной целью** преподавания дисциплины «Алгебра» на 3-ем семестре является изложение темы «Многочлены».
- **Задачи дисциплины:**
- построить кольцо многочленов от одной переменной и рассмотреть в нем вопросы делимости, приводимости и неприводимости многочленов, отделение кратных множителей, разложение рациональной дроби в сумму простейших дробей;
- особо рассмотреть многочлены над основными числовыми полями комплексных, действительных и рациональных чисел, наиболее часто встречающиеся в школьной математике;
- построить кольцо многочленов от нескольких переменных, рассмотреть симметрические многочлены и понятия результанта и дискриминанта 2-х многочленов и указать на их применение для решения систем алгебраических уравнений.

Виды учебной работы и объем дисциплины в часах

Лекции	**22**
Практические занятия	**20**
СРС	**58**
Общая трудоемкость	**100**
Формы контроля	**2 к.р. + Экз.**

Рекомендуемая литература

- Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. - М.; Высшая школа, 1979.
- Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре / Санкт-Петербург: Лань, 2002.
- Мартынов Л.М. Элементы алгебры и теории чисел – Омск: СибАДИ, 2006. 195с.
- **Сборники задач:**
- Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. М.: Наука, 1977.

МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Доцент
Мартынова Т.А.

ЛЕКЦИЯ 1

ГЛАВА I. МНОГОЧЛЕНЫ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Основными задачами главы являются рассмотрение вопросов:

1. Построение кольца многочленов от одной переменной.
2. Деление с остатком многочленов, схема Горнера.
3. НОД и НОК многочленов; нахождение НОД с помощью алгоритма Евклида и его линейного представления.
4. Свойства взаимно простых многочленов.
5. Корни многочлена, теоремы о них; теорема тождественности для многочленов.
6. Приводимые и неприводимые многочлены.
7. Производная многочлена и формула Тейлора.
8. Отделение кратных множителей.
9. Рациональные дроби.

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- В школьной алгебре одночленом от переменной x называется алгебраическое выражение вида ax^m , где a – некоторое число, x – переменная, m – целое неотрицательное число.
- Одночлен ax^o отождествляется с числом a, так что числа рассматриваются как одночлены.
- Далее, одночлены называются подобными, если показатели при переменной x одинаковы.
- Подобные одночлены складываются по правилу ,

$$ax^m + bx^m = (a+b)x^m$$

- называемому приведением подобных членов.

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- Многочленом от переменной x называется алгебраическая сумма одночленов.
- В многочлене порядок слагаемых безразличен и подобные одночлены можно соединять, согласно приведению подобных членов. Поэтому любой многочлен можно записать в каноническом виде

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- с расположением членов в порядке убывания показателей.
- Иногда оказывается удобным записывать члены многочлена в порядке возрастания показателей

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

- .
-

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- .
- Переменной *x* можно придавать любые числовые значения и для каждого из них можно вычислить значение многочлена и поэтому многочлен задает функцию от *x*, называемую целой рациональной функцией.
- Два многочлена называются формально равными, если они в канонической записи составлены из одинаковых одночленов.
- Ясно, что формально равные многочлены равны и как функции, т.е. принимают одинаковые значения при каждом значении буквы *x*.
- Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Случаи, когда оно верно, будут описаны ниже.

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- Наша задача сейчас состоит в том, чтобы несколько расширить понятие многочлена.
- Пусть K – некоторое коммутативное кольцо с единицей, и пусть x – переменная буква, посторонняя для кольца K.
- **Определение 1.** *Многочленом от переменной x над K* будем называть формальное выражение вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad , \qquad (1)$$

- где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – элементы кольца K , которые называют *коэффициентами многочлена f(x)* .
- Обратим внимание на то, что в записи (1) знак + и выражения вида $a_i x^i$ при $i = 0,1,2,\ldots, n$ (их называют *членами многочлена f(x)*) следует пока воспринимать как символы, не имеющие содержательного смысла (считаем, что x^o есть пустой символ).

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad , \qquad (1)$$

- **Определение 2.** Коэффициент a_0 называется *свободным членом* многочлена *f(x)*. Если $a_n \neq 0$, то одночлен $a_n x^n$ называется *старшим (высшим) членом* и показатель *n* называется *степенью* *f(x)* и обозначается deg*f(x)*.

  Старший член *нулевого многочлена* *o(x)*=0 считается равным нулю. *Степень нулевого многочлена* будем считать равной –1.
- Нулевой многочлен отождествляется с нулем кольца *K*, а ненулевой многочлен нулевой степени вида $f(x)= a_0$ отождествляется с элементом a_0 кольца *K*.
- **Определение 3.** Многочлен, старший коэффициент которого равен единице, называется *нормированным*.

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Определение 4.** Два многочлена считаются *равными*, если равны их степени и соответствующие коэффициенты, т.е. если

$$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \quad ,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$$

- – многочлены над K, то

$$f(x) = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad n = m \quad \wedge \quad a_i = b_i \quad (i = 0,1,\ldots,n) \quad .$$

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- Обозначим через $K[x]$ множество всех многочленов от переменной x над кольцом K и определим на этом множестве две бинарные операции – *сложение и умножение многочленов.*
- **Определение 5**. Суммой многочленов
- $$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$ и $$g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$
- называется многочлен

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_s + b_s)x^s \quad , \qquad (2)$$

- где $s=max(n,m)$ и считаем $a_i=0$, если $i>n$, и $b_j=0$, если $j>m$.
- Таким образом, если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют разное число одночленов, то для нахождения их суммы согласно определению надо дописать необходимое число одночленов с нулевыми коэффициентами к одному из них, в котором число одночленов меньше, и затем сложить соответствующие коэффициенты.

.

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Определение 5.** ***Суммой*** многочленов
- $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ и $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$
- называется многочлен

$$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_s + b_s)x^s \quad , \qquad (2)$$

- Например, если $f(x)=3+4x-5x^2+2x^3$, $g(x)=5+2x$, то преобразуем $g(x)$ к виду $g(x)=5+2x+0x^2+0x^3$, добавив два нулевых одночлена, и тогда суммой $f(x)$ и $g(x)$ будет многочлен

$$f(x)+g(x)=(3+5)+(4+2)x+(-5+0)x^2+(2+0)x^3 =$$

$$= 8+6x-5x^2+2x^3.$$

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Определение 6.** *Произведением* многочленов

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ и $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$

- и называется многочлен

$$f(x) \cdot g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \ldots + c_k x^k + \ldots + c_{n+m} x^{n+m} \qquad (3)$$

- где $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0$, $c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0, \ldots$
- $c_k = \sum\limits_{i+j=k} a_i b_j$, …, $c_{n+m} = a_n b_m$
- (при вычислении коэффициента c_k, как и при сложении многочленов, считаем, что $a_i = 0$ при $i > n$ и $b_j = 0$ при $j > m$).
- Другими словами, для практического нахождения произведения двух многочленов достаточно найти по известным правилам умножения одночленов произведения всех членов первого сомножителя на все члены второго и затем привести подобные члены.

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Определение 6.** *Произведением* многочленов

$f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, $g(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$

- и называется многочлен

$$f(x)\cdot g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2\ldots+c_kx^k+\ldots+c_{n+m}x^{n+m} \qquad (3)$$

- где $c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0$, $c_1=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0$,…
- $c_k=\sum\limits_{i+j=k}a_ib_j$, …, $c_{n+m}=a_nb_m$
- Например, если $f(x)=3+x+2x^2$, $g(x)=5+2x$, то

$$f(x)g(x)=15+11x+12x^2+4x^3.$$

- **Т е о р е м а 1.** *Для любых многочленов* $f(x)$ *и* $h(x)$ из $K[x]$ *имеют место следующие соотношения*:

  $\deg(f(x)+h(x)) = max\{\deg(f(x), \deg h(x)\}$ (4)

  $\deg(f(x)\cdot h(x)) \leq \deg f(x)+\deg h(x)$. (5)

- *Если* K *– область целостности, то*

  $\deg(f(x)\cdot h(x))=\deg f(x)+\deg h(x)$. (6)

- ◘ В самом деле, соотношения (4) и (5) вытекают непосредственно из определений (2) и (3).
- Если в K нет делителей нуля, то из $a_n \neq 0$ и $b_m \neq 0$ следует $c_{n+m}=a_n b_m \neq 0$, что доказывает равенство (6). ◘

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Т е о р е м а 2.** 1) ***Множество K[x] всех многочленов от переменной x с коэффициентами из кольца K относительно определенных выше операций сложения и умножения многочленов является коммутативным кольцом с единицей, содержащим в качестве подкольца кольцо K .***
- 2) ***Если K – область целостности, то K[x] – область целостности.***
- ◘ 1) Из определения (2) легко вытекает, что операция сложения многочленов обладает такими же свойствами, что и операция сложения элементов кольца *K*, т.е. ассоциативна, коммутативна;
- нулевой многочлен является нейтральным элементом сложения;
- для каждого многочлена $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$ существует ему противоположный $-f(x)=(-a_0)+(-a_1x)+\ldots+(-a_n)x^n$.
- Таким образом, множество *K*[*x*] всех многочленов с операцией сложения образует абелеву группу.

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Т е о р е м а 2.** 1) *Множество* $K[x]$ *всех многочленов от переменной* x *с коэффициентами из кольца* K *относительно определенных выше операций сложения и умножения многочленов является коммутативным кольцом с единицей, содержащим в качестве подкольца кольцо* K *.*
- 2) *Если* K *– область целостности, то* $K[x]$ *– область целостности*.
- Опираясь на коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность умножения относительно сложения в кольце K, можно доказать, что соответствующими свойствами обладает операция умножения в $K[x]$.
- Из сказанного выше вытекает, что алгебра $(K[x]; +, \cdot)$ является коммутативным кольцом.
- Нулевой многочлен и многочлены нулевой степени – это в точности элементы кольца K и результаты операций над ними согласно определениям (2) и (3) совпадают с результатами операции над ними как элементами кольца K. Это означает, что K – подкольцо кольца $K[x]$.
- Нетрудно видеть, что многочлен $f(x)=1$ (где 1 – единица кольца K) играет роль единицы при умножении многочленов.

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Т е о р е м а 2.** 1) *Множество* $K[x]$ *всех многочленов от переменной x с коэффициентами из кольца K относительно определенных выше операций сложения и умножения многочленов является коммутативным кольцом с единицей, содержащим в качестве подкольца кольцо K .*
- 2) *Если K – область целостности, то* $K[x]$ *– область целостности*.
- 2) Из равенства (6) теоремы 1 вытекает отсутствие делителей нуля в коммутативном кольце $K[x]$, если таковых нет в кольце *K*. ◙
- Кольцо $K[x]$ называется *кольцом многочленов от переменной x над кольцом K*.

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- **Замечание.** Непосредственно из определения сложения многочленов вытекает, что любой многочлен *f(x)* является суммой одночленов и поэтому знак + в записи многочлена можно трактовать как операцию сложения многочленов частного вида, а именно одночленов. Ввиду коммутативности операции + имеем

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$$

- и, следовательно, многочлен *f(x)* можно записать, расположив его одночлены по убывающим степеням

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 .$$

x^m

§1. Построение кольца многочленов от одной переменной

- Иногда, для краткости, будем записывать многочлен *f(x)* в виде $f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.
- Одночлены с нулевым коэффициентом в дальнейшем, как правило, будем опускать. Понятно, что одночлен x^m при любом неотрицательном целом *m* согласно правилу умножения многочленов есть *m*–я степень одночлена *x*, а одночлен $a_m x^m$ является произведением a_m на x^m как многочленов.

Спасибо за внимание!