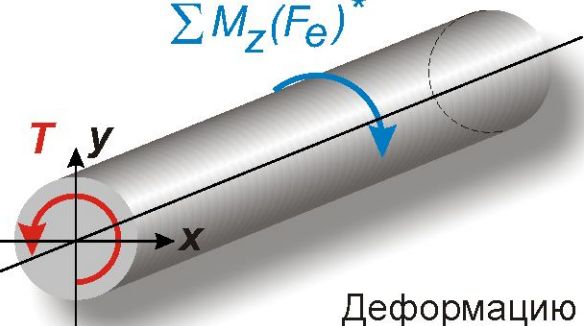


КРУЧЕНИЕ

При **кручении** в поперечных сечениях стержня (вала) возникает только **крутящий момент T** . По величине он равен

$$\sum M_z(F_e)^*$$



$$T = -\sum M_z(F_e)^*$$

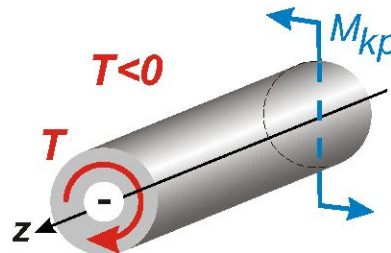
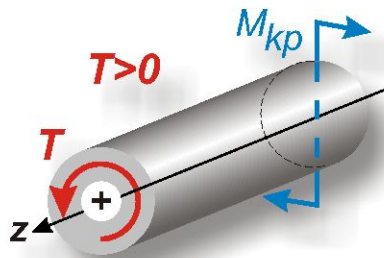
Внешние моменты, вызывающие кручение, называют **скручивающими моментами**.

Вал - это стержень, работающий, в-основном, на кручение.

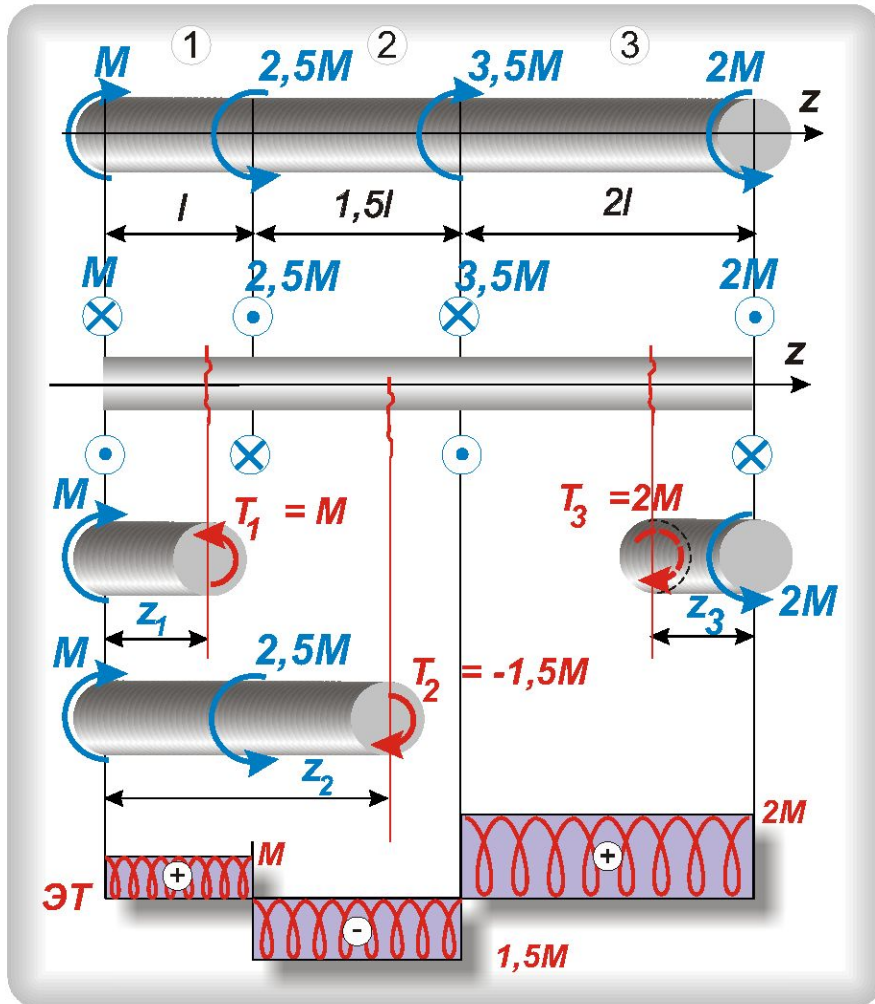
Деформацию кручения испытывают валы редукторов, коробок передач автомобиля, трансмиссионные валы, валы, приводящие в движение воздушные винты и лопасти вертолета, пружины и другие детали.

Знак крутящего момента T не имеет физического смысла.

При построении эпюр условимся о следующем правиле знаков:



ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА



График, показывающий изменение крутящего момента по длине стержня (вала) называется **эпюрой крутящих моментов ЭТ**.

Пример 1.

Вал под действием внешних (скручивающих) моментов находится в равновесии:

$$\sum M_z = M - 2,5M + 3,5M - 2M = 0;$$

С помощью метода сечений определим крутящие моменты в поперечных сечениях вала.

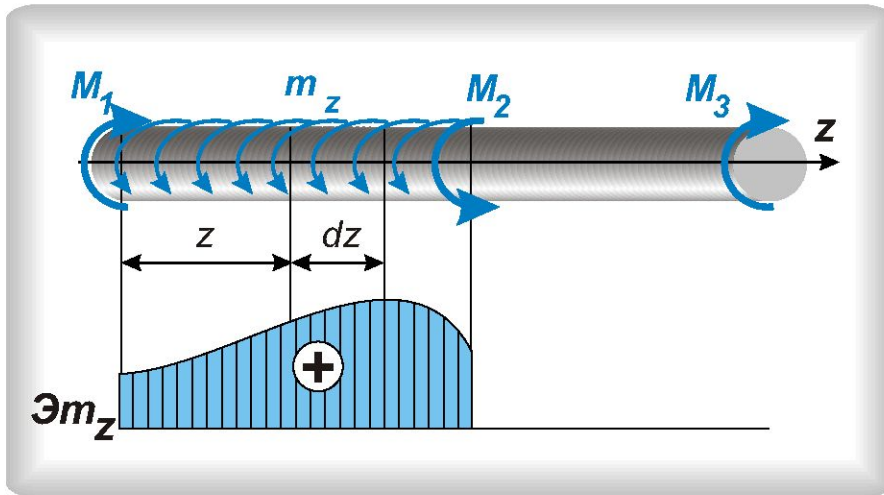
Разобьем вал на три участка.

- ① $0 \leq z_1 \leq l, \quad T_1 = M;$
- ② $l \leq z_2 \leq 2,5l, \quad T_2 = M - 2,5M = -1,5M;$
- ③ $0 \leq z_3 \leq 2l, \quad T_3 = 2M.$

Крутящие моменты **неизменны** на каждом участке.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КРУТЯЩИМ МОМЕНТОМ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ СКРУЧИВАЮЩЕГО МОМЕНТА

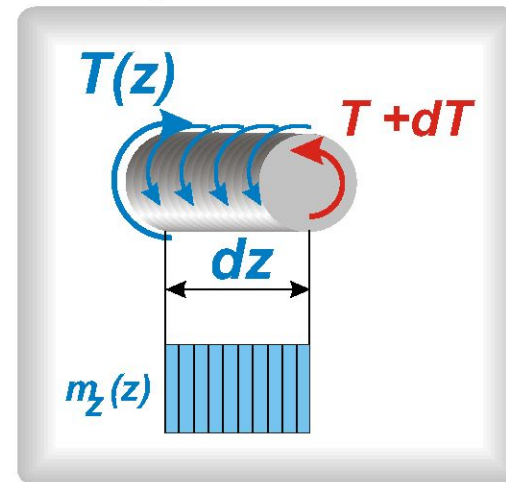
Вал (стержень) находится в равновесии под действием системы внешних (скручивающих) моментов.



$$\sum M_z = T(z) - m_z dz - (T+dT)=0;$$

После интегрирования: $T(z) = T(0) - \int_0^z m_z dz,$

Бесконечно малый отрезок dz находится в равновесии под действием распределенных скручивающих моментов m_z и крутящих моментов, отличающихся на бесконечно малую величину dT .



Отсюда: $\frac{dT}{dz} = -m_z.$

здесь $T(0)$ - постоянная интегрирования - крутящий момент в начале участка (при $z=0$).

ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮРЫ КРУТЯЩЕГО МОМЕНТА

Уравнение равновесия вала:

$$\sum M_z = 1,5ml - m \cdot 2l - 0,5ml + 2m \cdot 1,5l - 2ml = 0;$$

Пример 2.

Заданы скручивающие сосредоточенные моменты M_1 , M_2 и M_3 , а также распределенные моменты m и $2m$. Построить \mathcal{M}_z и $\mathcal{E}\mathcal{T}$.

Разобьем вал на три участка.

$$\textcircled{1} \quad 0 \leq z_1 \leq 2l, \quad T_1(z) = 1,5ml - m \cdot z;$$

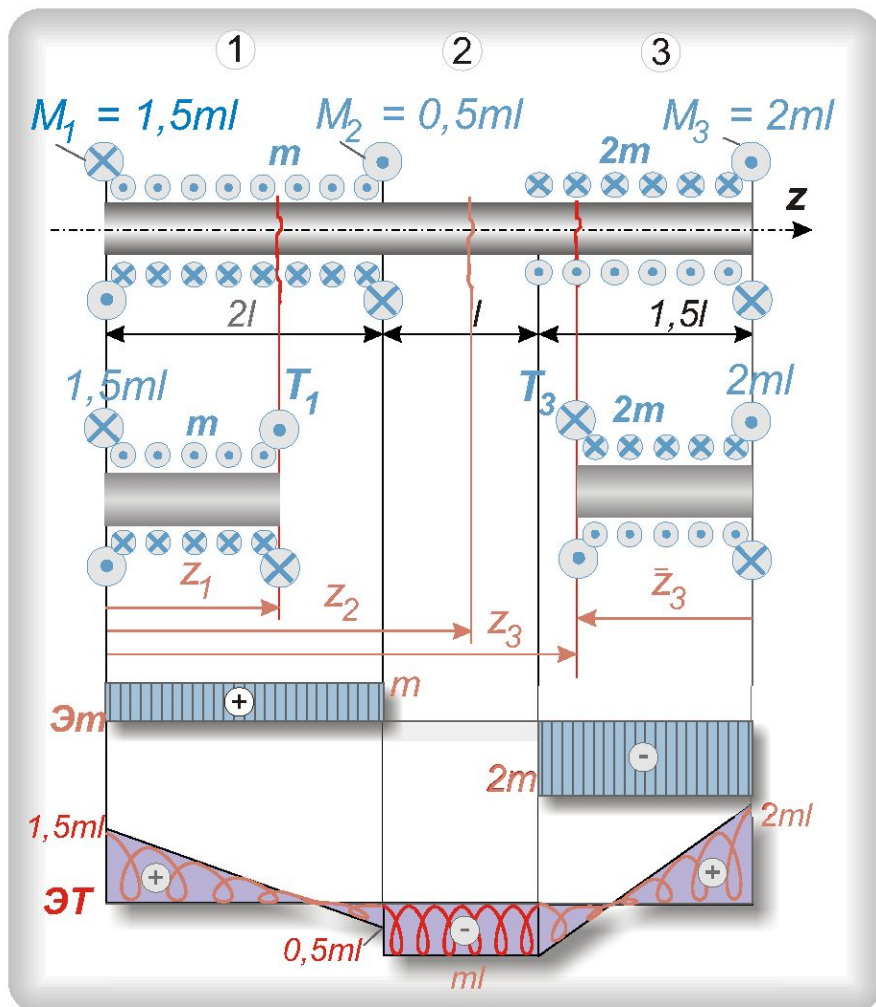
$$T_1(0) = 1,5ml; \quad T_1(2l) = -0,5ml.$$

$$\textcircled{2} \quad 2l \leq z_2 \leq 3l, \quad T_2 = 1,5ml - m \cdot 2l - 0,5ml = -ml;$$

$$\textcircled{3} \quad 0 \leq \bar{z}_3 \leq 1,5l, \quad T_3(\bar{z}) = 2ml - 2m \cdot \bar{z};$$

$$T_3(0) = 2ml, \quad T_3(1,5l) = -ml.$$

$$\bar{z}_3 = 4,5l - z_3.$$



3. Сдвиг и кручение

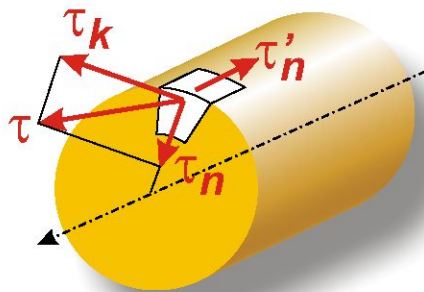
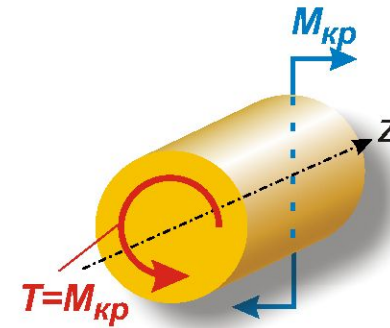
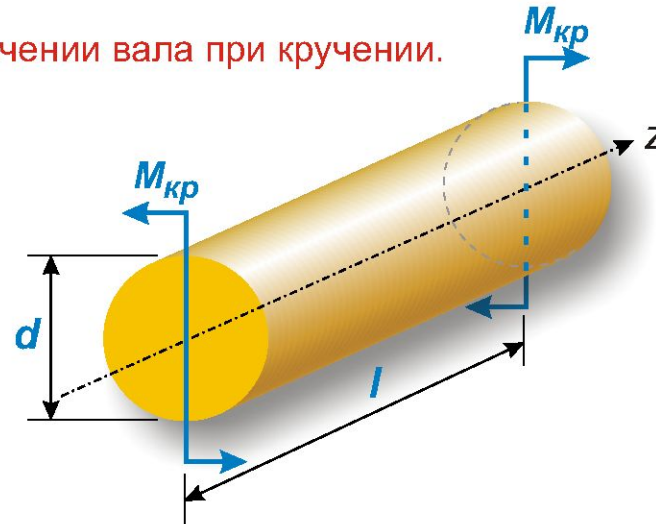
КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО СТЕРЖНЯ (ВАЛА) КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Напряжения в поперечном сечении вала при кручении.

Постановка задачи:

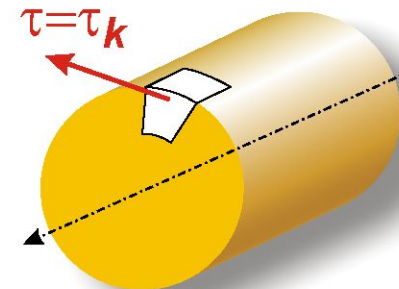
Дано: $d, l, G, M_{кр}$.

Определить: $\tau, \Theta, \varphi - ?$



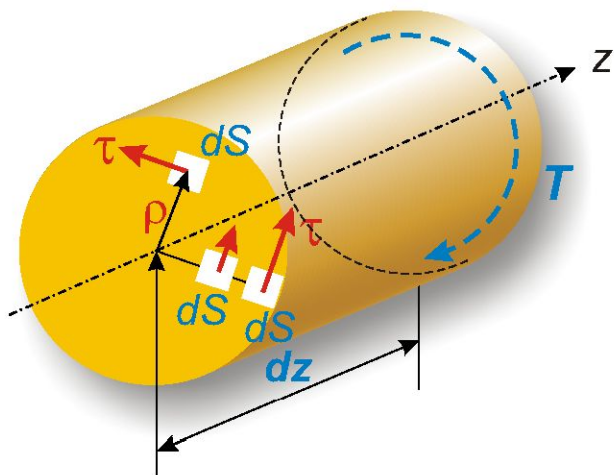
Касательные напряжения в поперечных сечениях для точек вблизи контура направлены по касательной к дуге контура

$$\tau_n = \tau'_n = 0; \quad \tau = \tau_k.$$



1. СТАТИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Рассмотрим равновесие части стержня длиной dz .

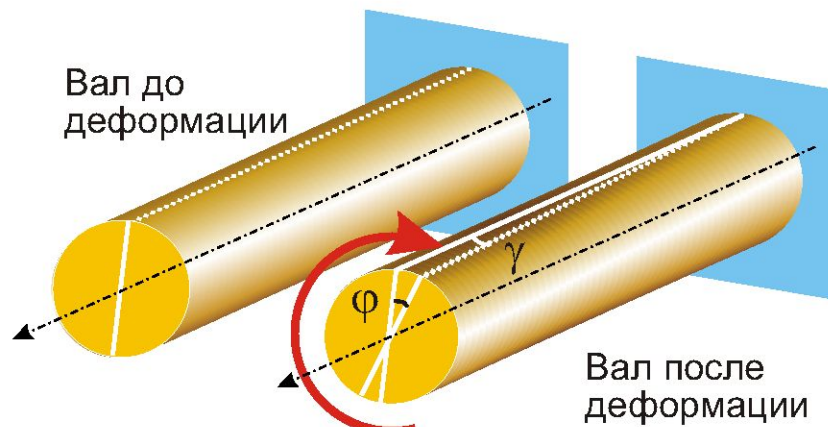


$$\sum M_z = 0;$$

$$T = \int_S \tau \rho dS, \quad (1)$$

Из уравнения (1) нельзя найти функцию $\tau(\rho)$.

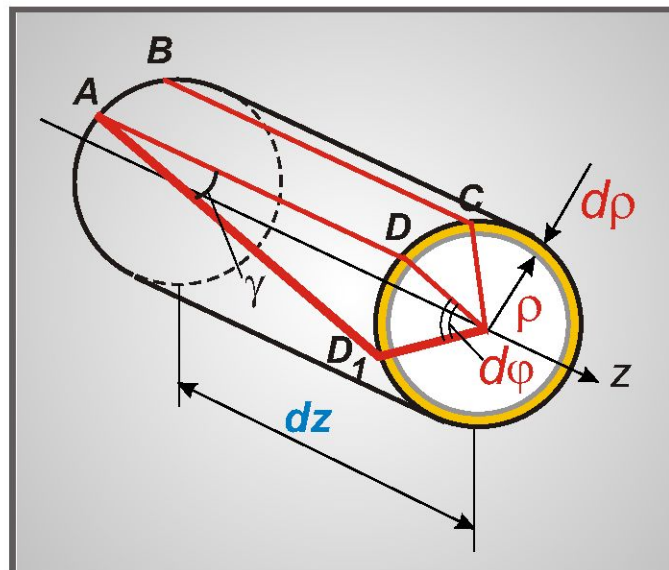
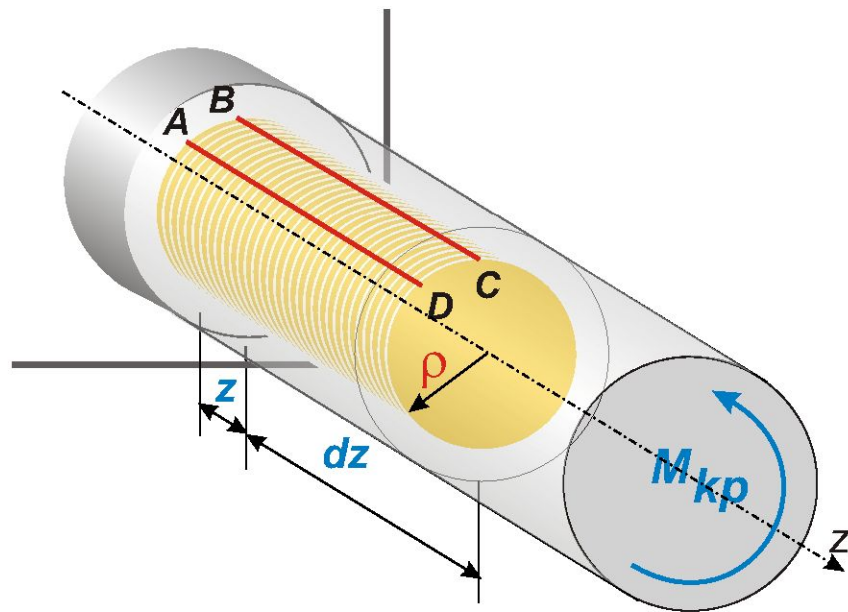
2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ



Принятые предпосылки:

- 1) Поперечные сечения, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации (гипотеза плоских сечений - гипотеза Бернулли).
- 2) Радиусы в поперечных сечениях остаются прямыми и лежат в тех же плоскостях. Они поворачиваются на некоторый угол.
- 3) Расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными и после деформации.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ (продолжение)



Из (2) имеем $\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}$, (2*)

Пусть $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ - относительный угол закручивания, тогда $\gamma = \rho\theta$. (2**)

$$DD_1 = \rho d\varphi = \gamma dz \quad (2)$$

- условие совместности деформаций;

$d\varphi$ - угол поворота правого торцевого сечения относительно левого сечения AB;

γ - угол сдвига цилиндрической поверхности.

3. ФИЗИЧЕСКАЯ СТОРОНА ЗАДАЧИ

Для решения статических уравнений используем зависимость между напряжениями и деформациями (в пределах упругости - закон Гука):

$$\tau = G\gamma \quad (3) \text{ - закон Гука при сдвиге.}$$

Решаем систему уравнений (1) - (3) трех сторон задачи:

$$\tau = \rho G\theta \quad (4) \quad \text{Для сечения } G\theta = \text{const.}$$

$$\tau = f(\rho) \text{ - линейная функция.}$$

Выражение (4) подставим в уравнение (1) $T = \int_S \tau \rho dS = \int_S \rho G\theta \rho dS = G\theta \int_S \rho^2 dS.$

Обозначим $J_p = \int_S \rho^2 dS$ - полярный момент инерции сечения.

$$T = GJ_p \theta \quad \text{или} \quad \theta = \frac{T}{GJ_p} \left[\frac{\text{рад}}{\text{м}} \right] \quad (5)$$

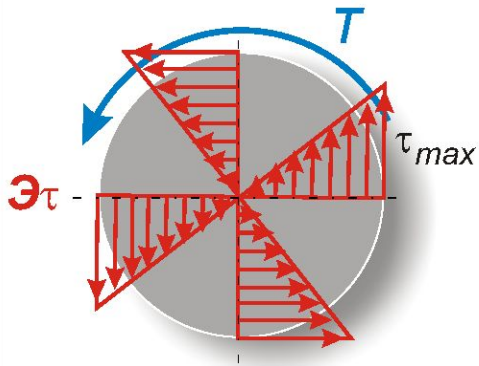
GJ_p - жесткость сечения вала при кручении.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО СЕЧЕНИЮ ПРИ КРУЧЕНИИ

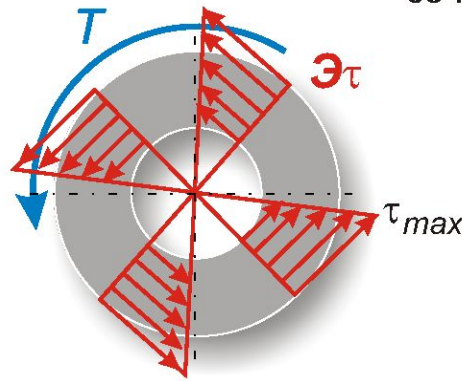
Подставим (5) в (4):

$$\tau = \rho G \theta = \rho G \frac{1}{GJ_p}; \quad \tau = \frac{T}{J_p} \rho \quad (III) \quad \tau_{\max} \rightarrow \rho = \rho_{\max} = \frac{D}{2}$$

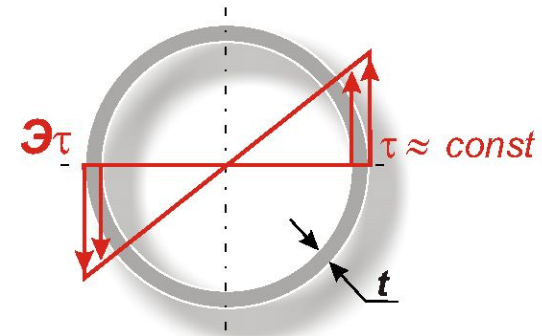
а) сплошное круглое сечение



б) кольцевое сечение



в) тонкостенное кольцевое сечение (тонкостенная трубка, $t \ll D$)

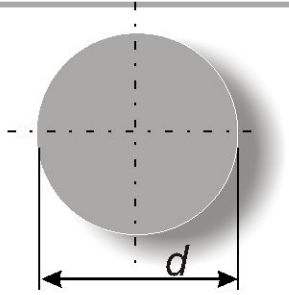


$$\tau_{\max} = \frac{T}{J_p} \rho_{\max}; \quad W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}} \quad - \text{полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛЯРНОГО МОМЕНТА СОПРОТИВЛЕНИЯ

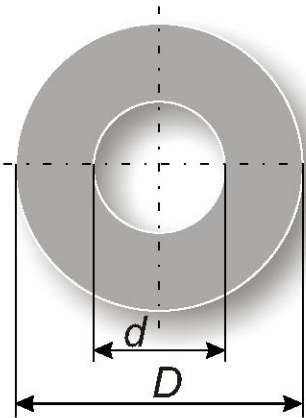
Полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения

а) сплошное круглое сечение



$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32}; \quad \rho_{\max} = \frac{d}{2};$$
$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

б) кольцевое сечение



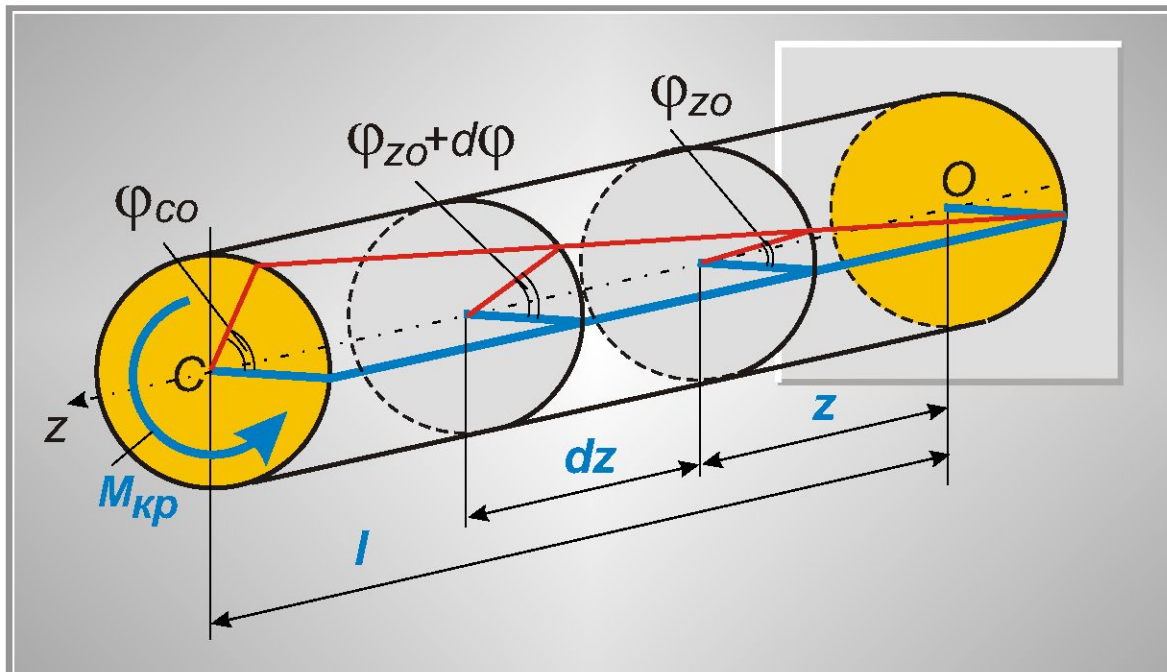
$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4); \quad c = \frac{D}{d}; \quad \rho_{\max} = \frac{D}{2};$$

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}};$$

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4);$$

~~$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} - \frac{\pi d^3}{16}$$~~

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ КРУЧЕНИИ



$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{T}{GJ_p};$$

$$d\varphi = \frac{Tdz}{GJ_p};$$

$$\varphi_{zo} = \int_0^z \frac{Tdz}{GJ_p};$$

$$\varphi_{co} = \int_0^l d\varphi = \int_0^l \frac{Tdz}{GJ_p};$$

Для постоянного сечения с постоянным крутящим моментом:

$$\varphi_{zo} = \frac{Tz}{GJ_p}; \quad \varphi_{co} = \frac{Tl}{GJ_p}.$$

УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЕСТКОСТИ ПРИ КРУЧЕНИИ

Вал круглого поперечного сечения

а) условие прочности:

$$\max \tau < [\tau] ; \quad [\tau] = \frac{\bar{\tau}}{[n]} ;$$

$$\bar{\tau} = \begin{cases} \tau_T - \text{пластичный материал;} \\ \tau_B - \text{хрупкий материал;} \end{cases}$$

$$\max \tau = \frac{T_{\max}}{W_p} \leq [\tau].$$

Порядок расчета:

1. Выбор опасного сечения - **ЭТ**
2. Выбор опасной точки в сечении - **Эτ**
3. Материал вала
4. Условие прочности

б) условие жесткости:

$$\max \theta = \frac{T_{\max}}{GJ_p} \leq [\theta] ;$$
$$\max \varphi \leq [\varphi].$$

Здесь $[\theta]$ и $[\varphi]$ - допустимые углы закручивания: относительный и абсолютный

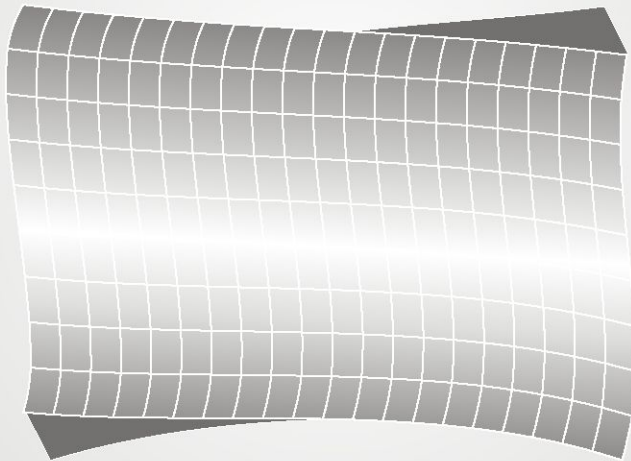
Порядок расчета:

1. Построение эпюры крутящих моментов - **ЭТ**
2. Выбор опасного относительного угла закручивания - **Эθ**
3. Выбор наибольшего угла закручивания - **Эφ**
4. Условие жесткости по $\max \theta$ и по $\max \varphi$.

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ (вала) С НЕКРУГЛЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

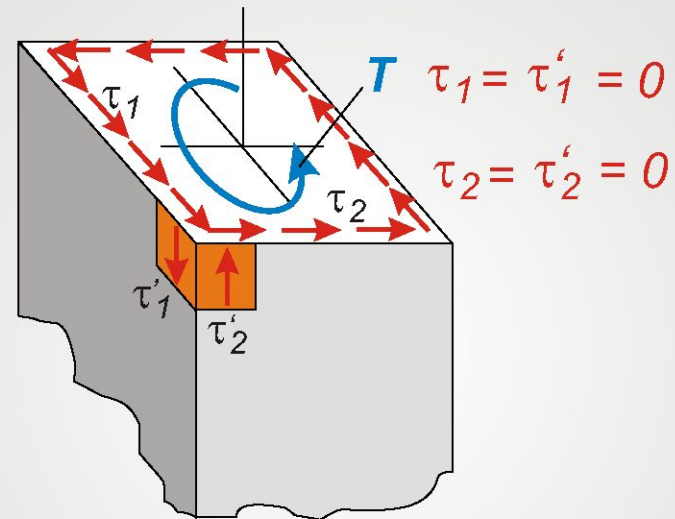
Задача определения напряжений в стержне не может быть решена методами сопротивления материалов.

Гипотеза плоских сечений не применима.



Сечения стержня заметно искривляются.

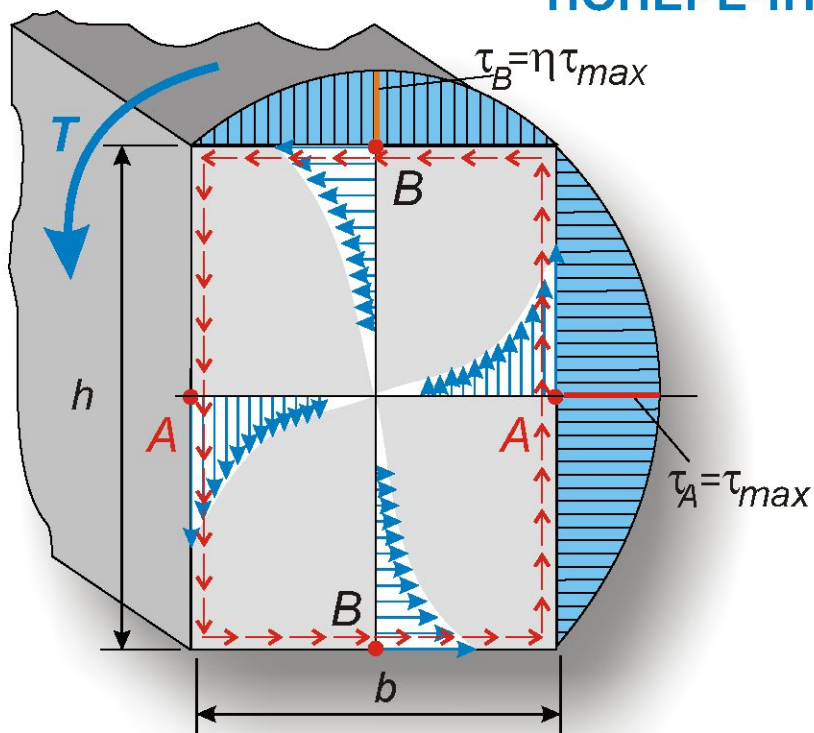
Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения



Касательные напряжения вблизи внешнего угла в поперечном сечении отсутствуют.

Касательные напряжения τ вблизи контура направлены по касательной к контуру.

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



h/b	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,313	0,333
η	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,742	0,742

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{T}{\alpha hb^2};$$

$$\tau_B = \eta \tau_{\max};$$

Здесь h - большая, а b - малая стороны прямоугольника;

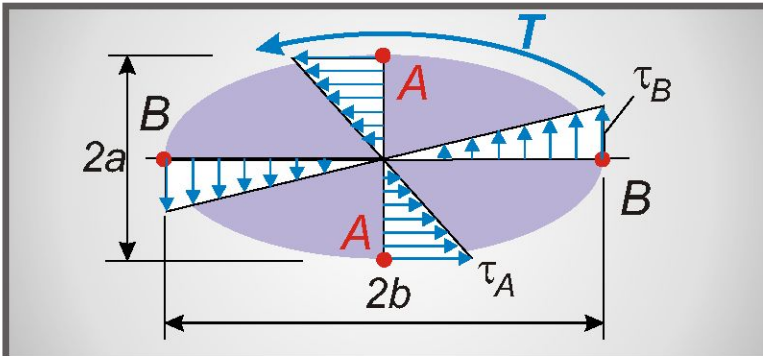
$$\theta = \frac{T}{G\beta hb^3}; \quad \varphi = \frac{Tl}{G\beta hb^3}.$$

Коэффициенты α, β, η зависят от отношения сторон h/b (см. табл.).

$W_k = \alpha hb^2$ – геометрический фактор прочности;
 $J_k = \beta hb^3$ – геометрический фактор жесткости.

03. Сдвиг и кручение

КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ



$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{2T}{\pi ab^2};$$

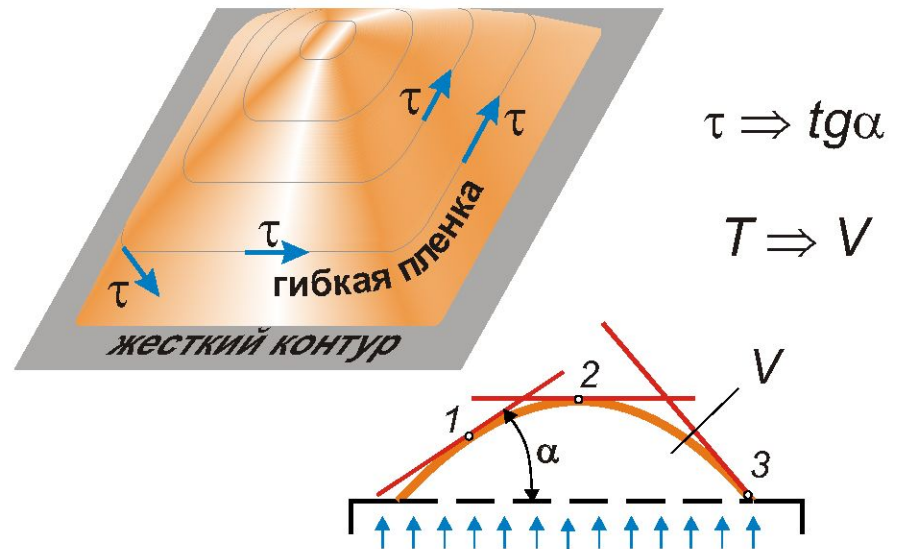
$$\tau_B = \frac{2T}{\pi ba^2};$$

$$\theta = \frac{T}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}; \quad \varphi = \frac{T l}{G \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}}.$$

ПОНЯТИЕ О МЕМБРАННОЙ (ПЛЕНОЧНОЙ) АНАЛОГИИ

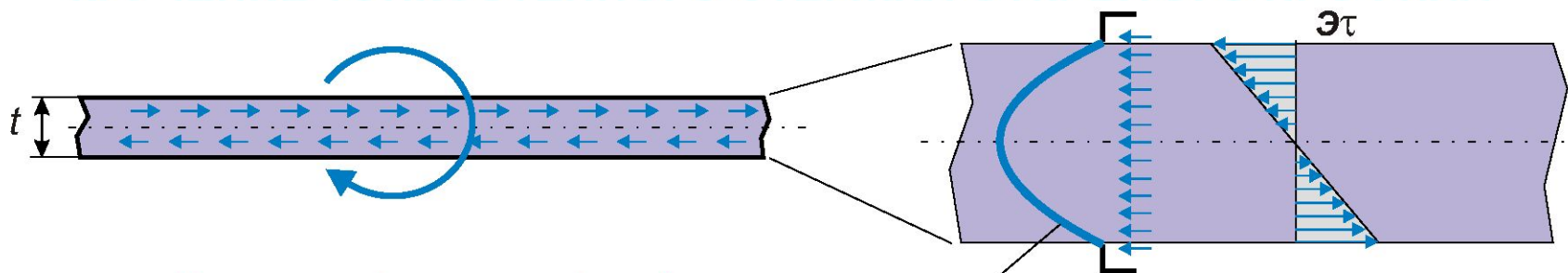
Задача о кручении стержня произвольного сечения сводится к тому же дифференциальному уравнению, что и задача о равновесии пленки, натянутой по контуру того же очертания и нагруженной равномерным давлением.

Направление напряжения τ совпадает с касательной к горизонтали изогнутой поверхности пленки. Аналогом крутящего момента T является объем V пространства под пленкой.

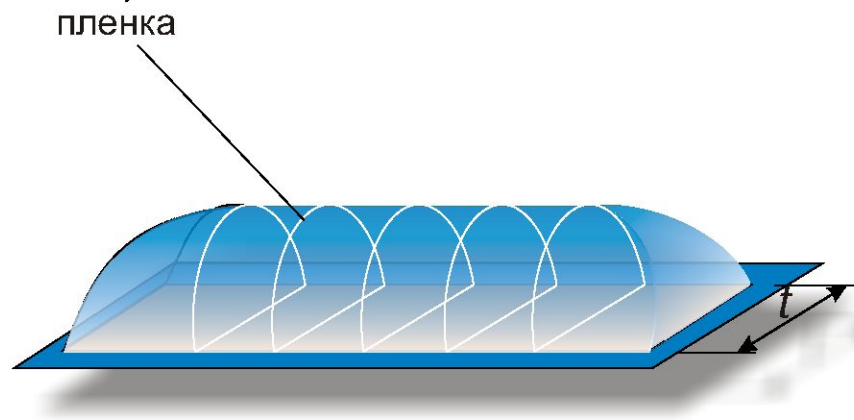
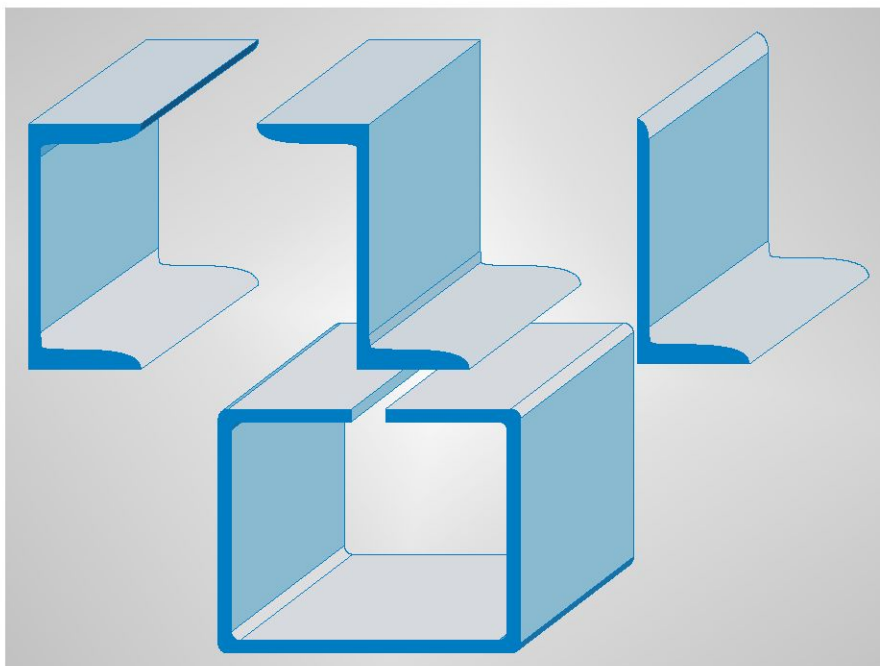


03. Сдвиг и кручение

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ



Типичные формы профилей



03. Сдвиг и кручение

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ (продолжение)

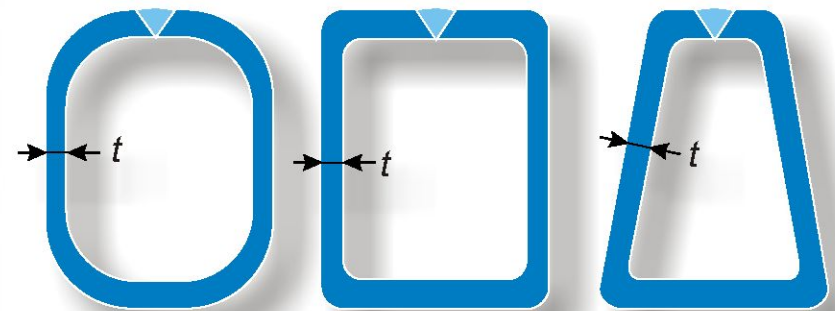


$\tau_{\max} = \frac{Tt_{\max}}{J_k}; \quad \theta = \frac{T}{GJ_k};$
 $\varphi = \frac{Tl}{GJ_k}; \quad J_k = \frac{1}{3}\eta \sum_{i=1}^n b_i t_i^3;$

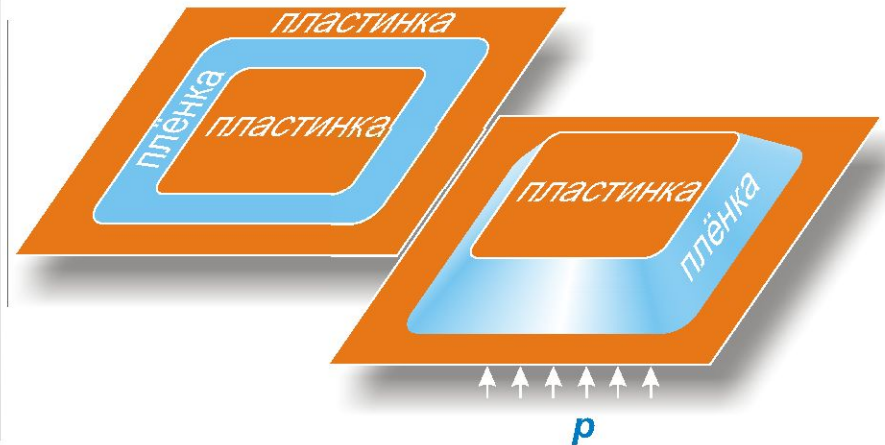
J_k - геометрический фактор жесткости;
 η - коэффициент, учитывающий места перехода сечений;
 $\eta = 1,05 \dots 1,20$; обычно $\eta \approx 1,0$.

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ

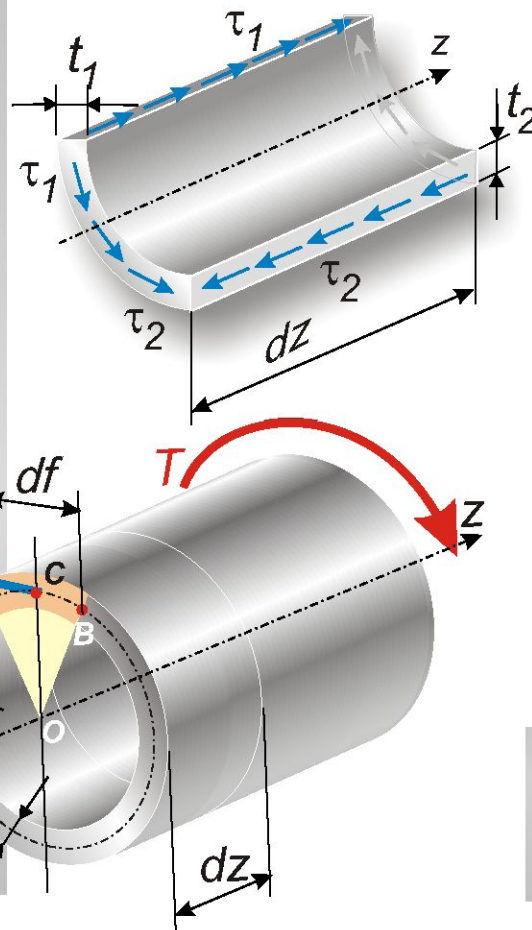
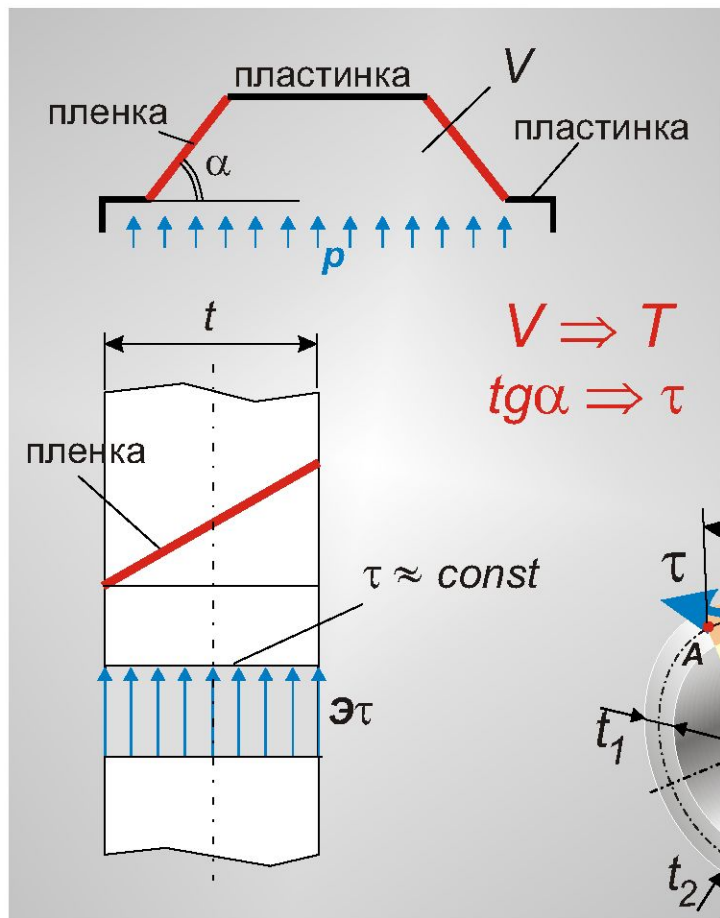
Типичные формы профиля



Пленочная аналогия



КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ



Условие равновесия:

$$\sum F_{z-z} = \tau_1 t_1 dz - \tau_2 t_2 dz = 0;$$

$$\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2 = \tau_i t_i = \tau t = \text{const};$$

$$\tau_{\max} \delta_{\min} = \tau_{\min} \delta_{\max} = \text{const};$$

$$dS = AB \cdot \delta = \delta \cdot dt;$$

$$AB \cdot OC = 2S_{\Delta OAB},$$

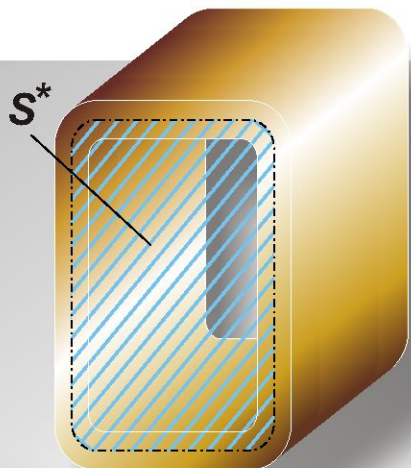
$$T = \int_S \tau dS \cdot OC = \int_f \tau \delta \cdot OC \cdot df =$$

$$= \tau \delta \int_f OC df = \tau \delta \cdot 2S^*;$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\delta_{\min} 2S^*}$$

03. Сдвиг и кручение

КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ЗАМКНУТОГО ПРОФИЛЯ



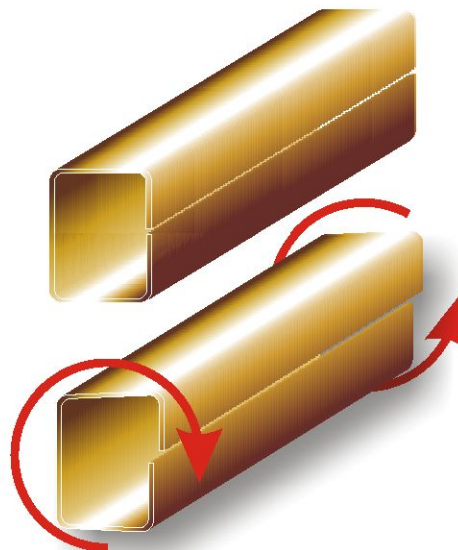
$$\theta = \frac{T f}{4G(S^*)^2 t},$$

Здесь

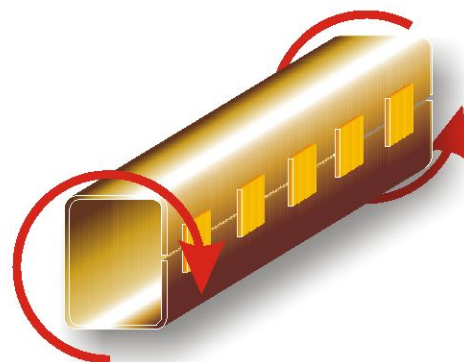
f - периметр поперечного сечения (длина средней линии);

S^* - площадь, ограниченная средней линией профиля.

СТЕСНЕННОЕ КРУЧЕНИЕ

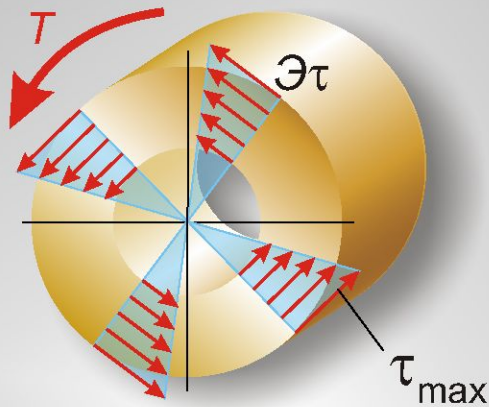


При кручении тонкостенного открытого профиля поперечное сечение выходит из своей плоскости - происходит **депланация сечения**.



Ограничение депланации приводит к повышению жесткости и прочности стержня. Кручение в таких условиях называют **стесненным кручением**.

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ (вала) ПРИ КРУЧЕНИИ

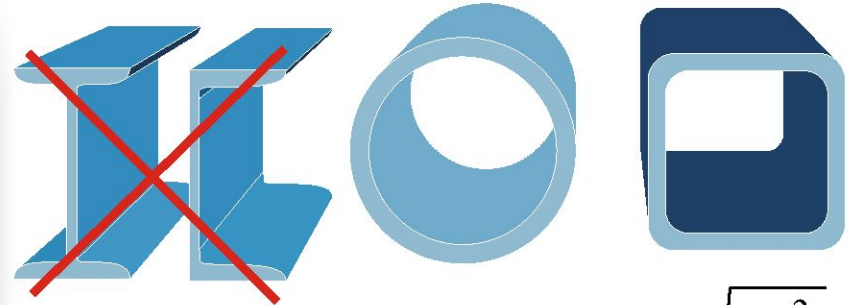


Условие прочности:

$$\max \tau < [\tau], \quad \tau_{\max} = \frac{T}{W_k}$$

Для круглого поперечного сечения:

$$W_k \Rightarrow W_p$$



$$\omega_k = \sqrt{\frac{W_k^2}{S^3}}$$

Тип сечения	ω_k
Швеллер, двутавр	0,01...0,07
Прямоугольник $h/b=10$	0,1
Квадрат	0,21
Круглое сечение	0,28
Кольцевое сечение:	
$c=d/D = 0,5$	0,37
$c = 0,9$	1,16