



Что мы знаем о иррациональности

Презентация к уроку

Преподаватель математики ГБОУ НПО ПЛ №80

Савицкая Галина Ивановна

Определение иррациональности

С философской точки иррациональность – недоступность рассудку, то, что не может быть постигнуто разумом, что явно не подчиняется законам логики и не может быть выражено в логических понятиях, что оценивается как «сверхразумное».

Определение иррациональности

С математической точки зрения иррациональность – несоизмеримость с единицей; не является ни целой, ни дробной величиной.

Греческий математик Евклид в 3 веке до н.э. создал первую математическую школу.

Первое научное определение числа дал Эвклид в своих Началах:

«Число есть множество, которое измеряется с помощью единиц».



Л.Ф. Магницкий (1703 году) – создал первый учебник арифметики в России.



«Единица есть то, в соответствии с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть множество, сложенное из единиц».

Так определял понятие числа и русский математик Магницкий в своей «Арифметике».



В своей «Общей арифметике» (1707 г) великий английский физик, механик, астроном и математик Исаак Ньютон пишет:

«Под числом мы подразумеваем не столько множество единиц, сколько абстрактное отношение какой-нибудь величины к другой величине такого же рода, взятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное:

Целое число есть то, что измеряется единицей;
дробное – кратной частью единицы;
иррациональное – число, не соизмеримое с единицей».

« Без знания дробей никто не может признаваться сведущим в арифметике».

В начале XVIII столетия существовало три понятия иррационального числа:

иррациональное число рассматривали как корень n -ой степени из целого или дробного числа, когда результат извлечения корня нельзя выразить «точно» целым или дробным числом;

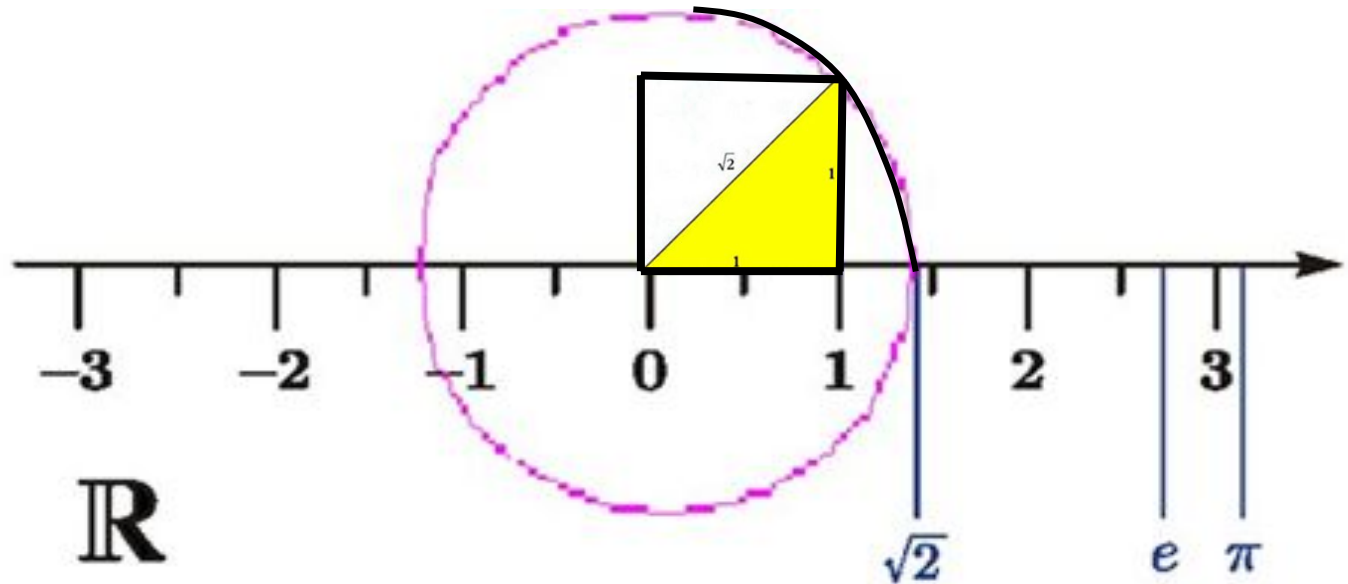
Иррациональное число трактовали как границу, к которой его рациональные приближения могут подойти как угодно близко;

Число рассматривали как отношение одной величины к другой величине того же самого рода, взятой за единицу; когда величина несоизмерима с единицей, число называли иррациональным.

Позднее Эйлер, Ламберт показали, что иррациональные числа можно представить бесконечными непериодическими десятичными дробями (например, $\pi = 3,141592\dots$).

Иррациональные числа

$$\sqrt{2} = 1.41421 \dots$$



$$\sqrt{2}, \quad \pi = 3,14159\dots, \quad e = 2,71828\dots, \quad \lg 7, \quad \dots$$

$$\sqrt{3} = 1,732050807568877\dots$$

Как доказать, что число $\sqrt{2}$ иррационально?

● Предположим, существует рациональное число $\frac{m}{n}$, $n, m \in \mathbb{Z}$, такое, что $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.

Дробь $\frac{m}{n}$ будем считать несократимой (ведь сократимую дробь всегда можно привести к несократимому виду).

Возведя обе части равенства в квадрат, получим $m^2 = 2n^2$. Отсюда заключаем, что m – число чётное, т.е. $m = 2k$,

Следовательно, $m^2 = 4k^2$, или $2k^2 = n^2$.

Получается, что и n также число чётное, а этого быть не может, поскольку дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Возникает противоречие.

Остаётся сделать вывод, что наше предположение неверно и рационального числа $\frac{m}{n}$, равного $\sqrt{2}$ не существует.

Человеку часто приходится сталкиваться с иррациональными числами.



- $C = 2\pi r$ и $S = \pi r^2$

- $P(A) = \frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} = 0,785 \dots$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Справочные сведения:

- Т-1 Если показатель корня – натуральное четное число, т.е. $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, то по определению

$${}^{2k}\sqrt{a} = v \leftrightarrow \begin{cases} v \geq 0 \\ a = v^{2k} \end{cases}$$

Для любого неотрицательного действительного числа a и произвольного натурального числа k существует единственное действительное число v такое, что $v^{2k} = a$.

- Т-2 Если показатель корня - натуральное нечетное число, т.е. $n = 2k + 1$, то определению

$${}^{2k+1}\sqrt{a} = v \leftrightarrow a = v^{2k+1}$$

Для любого действительного числа a и произвольного натурального k существует единственное действительное число v такое, что $v^{2k+1} = a$.

- Неотрицательное значение корня из неотрицательного числа называют арифметическим значением корня. Или просто арифметическим корнем.

Справочные сведения

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a},$$

$$\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a} / \sqrt[n]{b},$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[n \cdot m]{a^{k \cdot n}} = \sqrt[m]{a^k}.$$

Справочные сведения

- Простейшими иррациональными уравнениями от одной переменной будем называть уравнения вида:

1. ${}^{2k}\sqrt{f(x)} = g(x)$ и ${}^{2k+1}\sqrt{f(x)} = g(x)$

2. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

3. $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} = 0$

- Все корни четной степени, входящие в иррациональное уравнение, являются арифметическими.
- Все корни нечетной степени определены при любом действительном значении подкоренного выражения, при этом корень имеет тот же знак, что и подкоренное выражение.
- Алгоритм решения каждого из типов простейших уравнений:

1. ${}^{2n}\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases}$

2. Функция

$y = {}^{2n+1}\sqrt{t}$, $n \in \mathbb{N}$ определена и монотонна при всех значениях аргумента.

- Поэтому ${}^{2n+1}\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$



Paolo Ruffini

Паоло Руффини — итальянский математик (1765—1822), доктор медицины; первый доказал невозможность решения в радикалах всех уравнений высших степеней, начиная с 5-й.

Абель Нильс Хенрик норвежский математик указал частные типы уравнений, разрешимых в радикалах; связанные с ними группы называются абелевыми группами.



Основной заслугой Галуа является формулировка о разрешимости в радикалах алгебраических уравнений, начатых Ж. Лагранжем, Н. Абелем и др.

Справочные сведения

● Решение иррациональных неравенств.

● Справочные сведения. Решение простейших иррациональных неравенств.

- Решение неравенств, содержащихся под знаком радикала, основано на теоремах:

- Т - 1:

- $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- Т - 2:

- $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$

- Т - 3

- $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ f(x) \geq g^2(x) \end{cases}$

Решить неравенство $\sqrt{14 - x} > 2 - x$

● План решения:

$$\bullet \sqrt{14 - x} > 2 - x \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} 14 - x \geq 0 \\ 2 - x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 14 - x > (2 - x)^2 \end{cases} \end{array} \right.$$

● Решая совокупность двух систем получаем $(x - 5)(x + 2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 5$

● $\sqrt{14 - x} > 2 - x \Leftrightarrow -2 < x \leq 14$

● Неравенству удовлетворяет одно отрицательное целое значение $x = -1$.

Заключение

- «Числа управляют миром», – говорили пифагорейцы. Мы не можем согласиться с данным утверждением, мы знаем, что не число есть основа вещей, хотя, несомненно, число играет исключительную роль в науке и технике, в деле подчинения ее сил человеку.
- Если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе.

*Охватить всё, что связано с радикалами
у нас нет возможности.
Сегодня мы только чуть-чуть
приоткрыли дверь в этот таинственный
мир - « мир иррациональности ».*