Что мы знаем о иррациональности

Презентация к уроку

Преподаватель математики ГБОУ НПО ПЛ№80

Савицкая Галина Ивановна

Определение иррациональности

С философской точки иррациональность – недоступность рассудку, то, что не может быть постигнуто разумом, что явно не подчиняется законам законом логики и не может быть выражено в логических понятиях, что оценивается как «сверхразумное».

Определение иррациональности

С математической точки иррациональность – несоизмеримость с единицей; не является ни целой, ни дробной величиной.

Греческий математик Евклид в 3 веке до н.э. создал первую математическую школу.

Первое научное определение числа дал Эвклид в своих Началах:
«Число есть множество, которое измеряется с помощью единиц».

Л.Ф. Магницкий (1703 году) – создал первый учебник арифметики в России.

Выпускъ 1-й.

АРИѲМЕТИКА МАГНИЦКАГО.

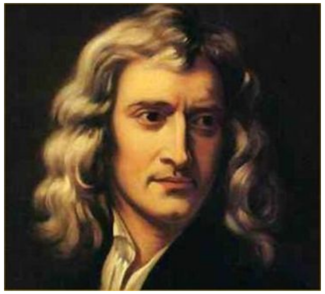
ТОЧНОЕ ВОСПРОИЗВЕДЕНІЕ ПОДЛИННИКА.

Съ приложеніемъ статьи П. Баранова (біографическія свѣдѣнія о Магницкомъ и историческое значеніе его Арифметики.)

ИЗДАНІЕ П. БАРАНОВА.
Москва — 1914.

Цѣна 80 коп.

«Единица есть то, в соответствии с чем каждая из существующих вещей называется одной. Число есть множество, сложенное из единиц».
Так определял понятие числа и русский математик Магницкий в своей «Арифметике».



В своей «Общей арифметике» (1707 г) великий английский физик, механик, астроном и математик Исаак Ньютон пишет:

«Под числом мы подразумеваем не столько множество единиц, сколько абстрактное отношение какой-нибудь величины к другой величине такого же рода, взятой за единицу. Число бывает трех видов: целое, дробное и иррациональное:

Целое число есть то, что измеряется единицей;
дробное – кратной частью единицы;
иррациональное – число, не соизмеримое с единицей».

« Без знания дробей никто не может признаваться сведущим в арифметике».

В начале XVIII столетия существовало три понятия иррационального числа:

иррациональное число рассматривали как корень n-ой степени из целого или дробного числа, когда результат извлечения корня нельзя выразить «точно» целым или дробным числом;

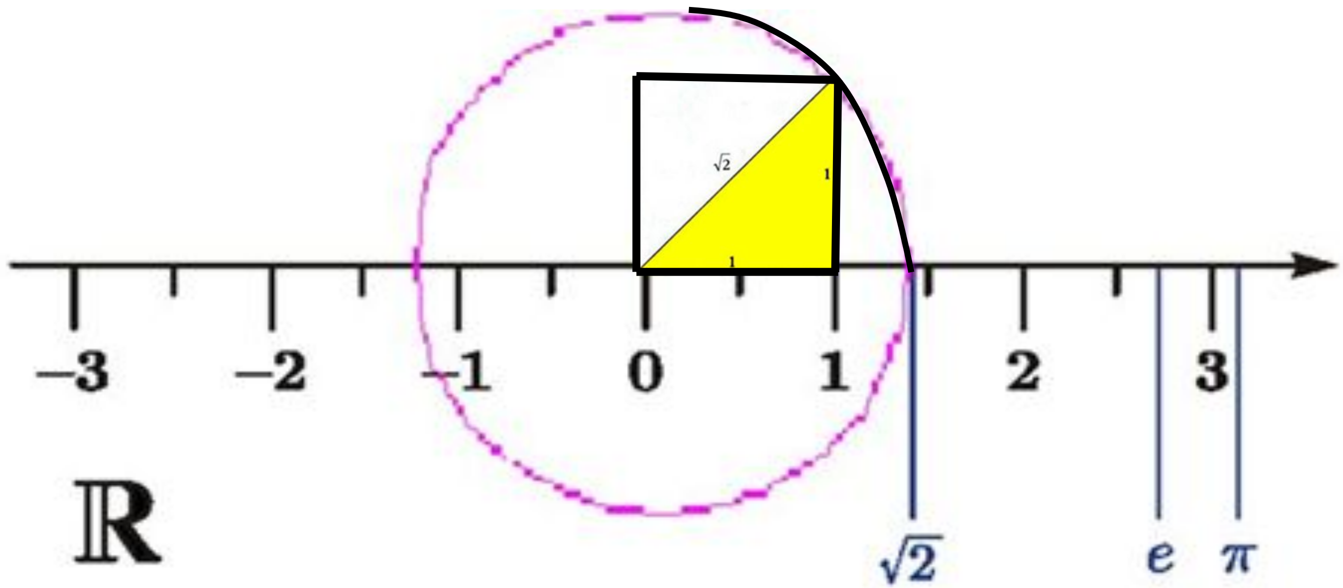
Иррациональное число трактовали как границу, к которой его рациональные приближения могут подойти как угодно близко;

Число рассматривали как отношение одной величины к другой величине того же самого рода, взятой за единицу; когда величина несоизмерима с единицей, число называли иррациональным.

Позднее Эйлер, Ламберт показали, что иррациональные числа можно представить бесконечными непериодическими десятичными дробями (например, $\pi = 3,141592\ldots$).

Иррациональные числа

$$\sqrt{2} = 1.41421\ldots$$



$$\sqrt{2}, \qquad \pi = 3,14159\ldots, \qquad e = 2,71828\ldots, \qquad \lg 7, \qquad \ldots$$

$$\sqrt{3} = 1,73205080756887 7\ldots$$

Как доказать, что число иррационально?

- Предположим, существует рациональное число $\frac{m}{n}, n, m \epsilon Z$, такое, что $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$.
Дробь $\frac{m}{n}$ будем считать несократимой (ведь сократимую дробь всегда можно привести к несократимому виду).
Возведя обе части равенства в квадрат, получим $m^2 = 2n^{2}$.
Отсюда заключаем, что m – число чётное, т.е. m = 2k.,
Следовательно, $m^2 = 4k^2$, или $2k^2 = n^2$.
Получается, что и n также число чётное, а этого быть не может, поскольку дробь $\frac{m}{n}$ несократима. Возникает противоречие.
Остаётся сделать вывод, что наше предположение неверно и рационального числа $\frac{m}{n}$, равного $\sqrt{2}$ не существует.

Человеку часто приходиться сталкиваться с иррациональными числами.

-

- $C = 2\pi r$ и $S = \pi r^2$
- $P(A) = \frac{\pi r^2}{a^2} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785 \ldots$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Справочные сведения:

- Т-1 Если показатель корня – натуральное четное число, т.е. $\boldsymbol{n = 2k, k \in N}$, то по определению

$$\sqrt[2л]{а} = в \leftrightarrow \begin{cases} в \geq \mathbf{0} \\ а = в^{\mathbf{2}к} \end{cases}$$

Для любого неотрицательного действительного числа а и произвольного натурального числа к существует единственное действительное число в такое, что $в^{\mathbf{2}к} = а$.

- Т-2 Если показатель корня - натуральное нечетное число, т.е. $п = \mathbf{2}к + \mathbf{1}$, то определению

$$\sqrt[\mathbf{2}к+\mathbf{1}]{а} = в \leftrightarrow а = в^{\mathbf{2}к+\mathbf{1}}$$

Для любого действительного числа а и произвольного натурального к существует единственное действительное число в такое, что $в^{\mathbf{2}к+\mathbf{1}} = а$.

- Неотрицательное значение корня из неотрицательного числа называют арифметическим значением корня. Или просто арифметическим корнем.

Справочные сведения

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b},$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a},$$

$$\sqrt[n]{a\,/\,b}=\sqrt[n]{a}\,/\sqrt[n]{b},$$

$$(\sqrt[n]{a})^k=\sqrt[n]{a^k},$$

$$\sqrt[n\cdot m]{a^{k\cdot n}}=\sqrt[m]{a^k}.$$

Справочные сведения

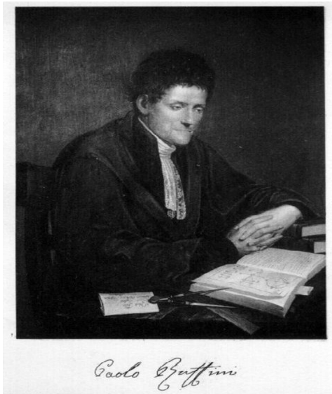
- Простейшими иррациональными уравнениями от одной переменной будем называть уравнения вида:

1. $\sqrt[2к]{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$
2. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$
3. $g(x) \cdot \sqrt{f(x)} = 0$

- Все корни четной степени, входящие в иррациональное уравнение, являются арифметическими.
- Все корни нечетной степени определены при любом действительном значении подкоренного выражения, при этом корень имеет тот же знак, что и подкоренное выражение.
- Алгоритм решения каждого из типов простейших уравнений:

1. $\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) = g^{2n}(x) \end{cases}$
2. Функция $y = \sqrt[2n+1]{t},\ n \in N$ пределена и моготонна при всех значениях аргумента.

- Поэтому $\sqrt[2n+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2n+1}(x)$



Паоло Руффини — итальянский математик (1765—1822), доктор медицины; первый доказал невозможность решения в радикалах всех уравнений высших степеней, начиная с 5-й.

Абель Нильс Хенрик норвежский математик указал частные типы уравнений, разрешимых в радикалах; связанные с ними группы называются абелевыми группами.

Основной заслугой Галуа является формулировка о разрешимости в радикалах алгебраических уравнений, начатых Ж. Лагранжем, Н. Абелем и др.

Справочные сведения

- **Решение иррациональных неравенств.**
- Справочные сведения. Решение простейших иррациональных неравенств.
- Решение неравенств , содержащихся под знаком радикала ,основано на теоремах:
- Т - 1:
- $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- Т – 2:
- $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
- Т – 3
- $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \\ f(x) \geq g^2(x) \end{array} \right.$

Решить неравенство $\sqrt{14-x} > 2-x$

- План решения:

- $$\sqrt{14-x} > 2-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 14-x \geq 0 \\ 2-x < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 14-x > (2-x)^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

- Решая совокупность двух систем получаем $(x-5)(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 5$

- $\sqrt{14-x} > 2-x \Leftrightarrow -2 < x \leq 14$

- Неравенству удовлетворяет одно отрицательное целое значение x=-1.

Заключение

- «Числа управляют миром», – говорили пифагорейцы. Мы не можем согласиться с данным утверждением, мы знаем, что не число есть основа вещей, хотя, несомненно, число играет исключительную роль в науке и технике, в деле подчинения ее сил человеку.
- Если вы хотите участвовать в большой жизни, то наполняйте свою голову математикой, пока есть к тому возможность. Она окажет вам потом огромную помощь во всей вашей работе.

Охватить всё, что связанно с радикалами у нас нет возможности.
Сегодня мы только чуть-чуть приоткрыли дверь в этот таинственный мир - « мир иррациональности ».