

# **Разработка вероятностных математических моделей**

- **Моделированием** называется процесс изучения реального объекта, проводимый не на самом объекте, а на его модели.
- **Модель** - материальный или абстрактный, мысленно созданный объект, который в процессе изучения (исследования) заменяет реальный объект, но сохраняет при этом его важнейшие свойства.

- Под **объектом или системой моделирования** обычно понимается совокупность предметов, как реальных, так и идеальных, которая организована определенным образом.
- Такая совокупность предметов называется **полем системы**, а данные, которые описывают организацию системы – **характеристика**.

1. По физической природе



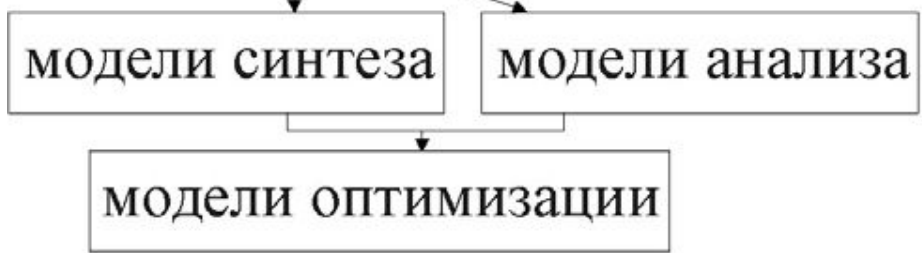
2. По зависимости от времени



3. По характеру влияния параметров



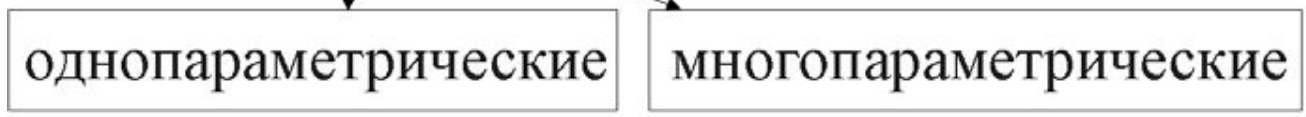
4. По назначению



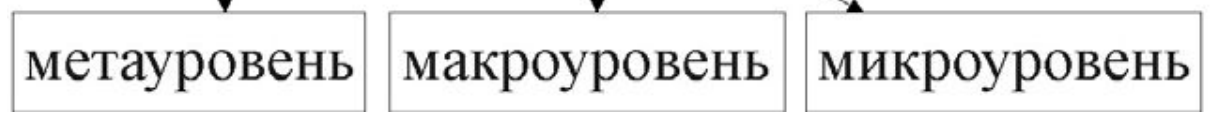
5. По математическому описанию



6. По числу параметров



7. По иерархическому уровню  
(по степени детализации)



- **Математические модели** позволяют количественно исследовать явления, трудно поддающиеся изучению на физических моделях.
- **Вероятностная модель** – это математическая модель, имитирующая механизм функционирования гипотетического (не конкретного) реального явления (или системы) стохастической природы.

# Исходные данные

1. Имеется массив объектов с наблюдаемыми переменными  $X$  и скрытыми переменными  $T$
2. Предполагается, что между наблюдаемыми и скрытыми переменными существует зависимость
3. Точный вид этой зависимости нам неизвестен и/или зависимость недетерминированная, т.е. значения наблюдаемых переменных не позволяют однозначно определить значения скрытых переменных

При вероятностном подходе к решению задач, неопределенность в зависимости между  $X$  и  $T$  моделируется введением **совместного распределения** на все переменные  $p(X, T)$ .

*Выделяют два вида вероятностных моделей:*

- порождающие (generative)
- дискриминативные (discriminative)



- При использовании **порождающих моделей** необходимо задать совместное распределение  $p(X, T)$  на множестве объектов
- Зная совместное распределение **МЫ МОЖЕМ моделировать** новые объекты из той же генеральной совокупности

- При использовании **дискримина-тивных моделей** необходимо знать условное распределение  $p(T|X)$  на множестве значений скрытых переменных объекта
- Зная условное распределение мы можем определить наиболее вероятные значения скрытых переменных объекта

- В отличие от порождающей модели, дискриминативная модель не позволяет моделировать новые объекты из генеральной совокупности.
- Если нам требуется только уметь определять значения скрытых переменных по наблюдаемым, использование такой модели предпочтительно

# **Первый этап математического моделирования**

- **постановка задачи,**
- **определение объекта и целей исследования,**
- **установление границ области влияния изучаемого объекта.**

# Первый этап математического моделирования

- **Границы области влияния объекта** *определяются областью значимого взаимодействия с внешними объектами:* границы области охватывают те элементы, воздействие которых на исследуемый объект существенно; за этими границами действие исследуемого объекта на внешние объекты стремится к нулю.
- **Это позволяет рассматривать моделируемую систему как замкнутую.**

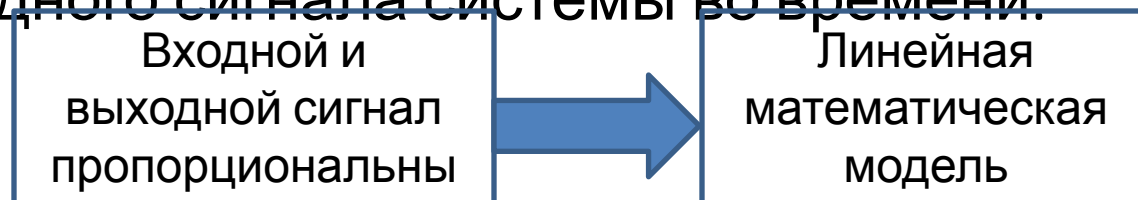
# Второй этап математического моделирования

- **выбор типа математической модели**
- **контроль математической модели**

*Строится несколько моделей, на основе сравнения результатов исследования которых с реальностью устанавливается наилучшая.*

- Если для формирования математической модели недостаточно исходных данных, то выполняется **поисковый эксперимент**, в ходе которого устанавливаются:
  - линейность или нелинейность,
  - динамичность или статичность,
  - стационарность или нестационарность,
  - степень детерминированности исследуемого объекта или процесса.

- **Линейность устанавливается по характеру статической характеристики исследуемого объекта.**
- *Статическая* характеристика объекта - связь между величиной внешнего воздействия на объект (значением входного сигнала) и его реакцией на внешнее воздействие (значением выходного сигнала).
- Под *выходной* характеристикой системы - изменение выходного сигнала системы во времени.





- **Динамичности или статичности** осуществляется по поведению исследуемых показателей объекта во времени.
- **Объект исследования** можно считать **стационарным**, если в ходе ряда экспериментов установлено, что значение фиксируемого параметра в течение всего времени наблюдения не выходит за пределы отклонения, соответствующего ошибке измерения.

- **Детерминированным** называется объект с полностью известными (детерминированными) параметрами.
- Если хотя бы один параметр неизвестен или является случайной величиной (процессом), то объект называется **стохастическим**.

# Контроль математической модели

виды контроля (проверки):

- размерностей;
- порядков;
- характера зависимостей;
- экстремальных ситуаций;
- граничных условий;
- математической замкнутости;
- физического смысла;
- устойчивости модели.

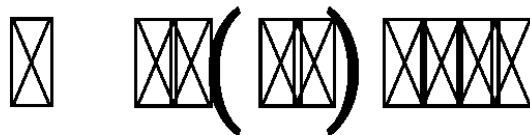
- **Контроль размерностей** сводится к проверке выполнения правила, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности.
- **Контроль порядков величин** направлен на упрощение модели. При этом определяются порядки складываемых величин и явно малозначительные слагаемые отбрасываются.
- **Анализ характера зависимостей** сводится к проверке направления и скорости изменения одних величин при изменении других.

- **Анализ экстремальных ситуаций** сводится к проверке наглядного смысла решения при приближении параметров модели к нулю или бесконечности.
- **Контроль граничных условий** состоит в том, что проверяется соответствие ММ граничным условиям, вытекающим из смысла задачи. При этом проверяется, действительно ли граничные условия поставлены и учтены при построении искомой функции и что эта функция на самом деле удовлетворяет таким условиям.

- **Анализ математической замкнутости** сводится к проверке того, что ММ дает однозначное решение.
- **Анализ физического смысла** сводится к проверке физического содержания промежуточных соотношений, используемых при построении ММ.
- **Проверка устойчивости модели** состоит в проверке того, что варьирование исходных данных в рамках имеющихся данных о реальном объекте не приведет к существенному изменению решения.

**Характеристика  
вероятностный  
математических моделей  
теоретических  
распределений,  
применяемых в решении  
задач автомобильного  
транспорта**

- **Плотность вероятности** случайной величины  $X$ , такая функция  $p(x)$ , что при любых  $a$  и  $b$  вероятность неравенства  $a < X < b$  равна



$a$



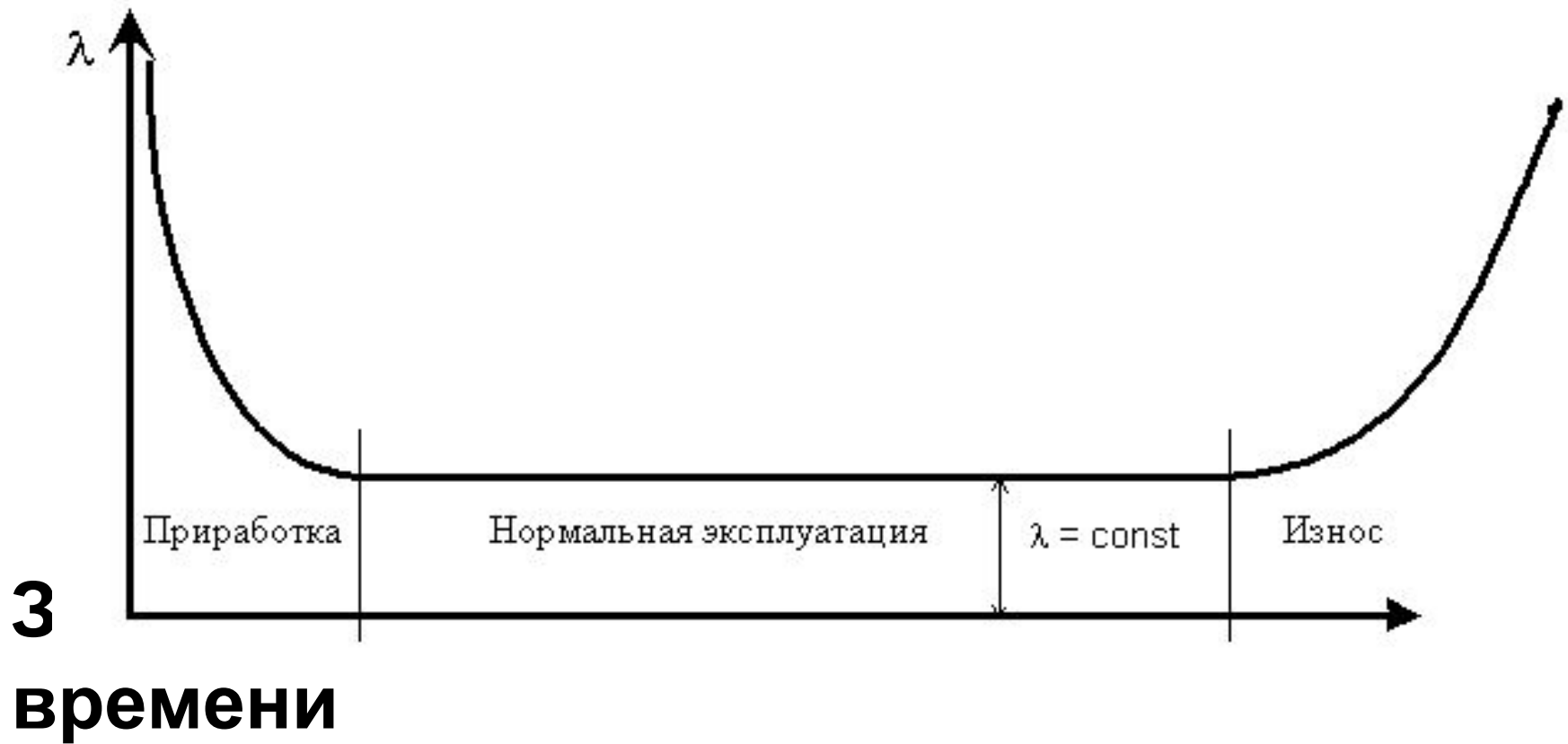
- **Вероятность безотказной работы** - это вероятность того, что в пределах заданий наработки отказ объекта не возникает.

Эта характеристика является функцией времени, причем она является убывающей функцией и может принимать значения от 1 до 0.

- **Средней наработкой до отказа** называется математическое ожидание наработки объекта до первого отказа  $T_1$ .
- Средняя наработка до отказа равна площади, образованной кривой вероятности безотказной работы  $P(t)$  и осями координат.

- **Интенсивность отказов** - это условная плотность вероятности возникновения отказа объекта, определяемая при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не наступил.

- **Средняя наработка на отказ** объекта (наработка на отказ) определяется как отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к числу отказов, происшедших за суммарную наработку



соответствует

**закону Вейбулла.**

# Распределение Вейбулла

- Зависимость интенсивности отказов от времени можно получить, используя для вероятностного описания случайной наработки до отказа двухпараметрическое распределение Вейбулла.

# Распределение Вейбулла

**Плотность вероятности момента отказа**

$$f(t) = \lambda \delta t^{\delta-1} \cdot e^{-(\lambda t^{\delta})}$$

где  $\delta$  - параметр формы (определяется подбором в результате обработки экспериментальных данных,  $\delta > 0$ );  
 $\lambda$  - параметр масштаба,

$$\lambda = \frac{1}{\hat{T}_1}$$

# Распределение Вейбулла

- **Интенсивность отказов**

$$\lambda(t) = \lambda \cdot \delta \cdot t^{\delta-1}.$$

- **Вероятность безотказной работы**

$$P(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t)dt} = e^{-\lambda t^\delta}$$



# Распределение Вейбулла

Средняя наработка до отказа

$$T_1 = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^{\delta}} dt$$

# Распределение Вейбулла

- При параметре  $\delta = 1$  распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное, а при  $\delta = 2$  - в распределение Рэлея.
- При  $\delta < 1$  интенсивность отказов монотонно убывает (период приработки), а при  $\delta > 1$  монотонно возрастает (период износа),

# Распределение Вейбулла

- Путем подбора параметра  $\delta$  можно получить, на каждом из трех участков, такую теоретическую кривую  $\lambda(t)$ , которая достаточно близко совпадает с экспериментальной кривой, и тогда расчет требуемых показателей надежности можно производить на основе известной закономерности.

# Экспоненциальное распределение

- Частный случай распределения Вейбулла, когда параметр формы  $\delta = 1$ .
- Распределение однопараметрическое, то есть для записи расчетного выражения достаточно одного параметра  $\lambda = \text{const}$  .

# Экспоненциальное распределение

- Если интенсивность отказов постоянна, то вероятность безотказной работы как функция времени подчиняется экспоненциальному закону:

$$P(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

# Экспоненциальное распределение

- Среднее время безотказной работы:

$$T_1 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

- Вероятность безотказной работы на интервале, превышающем среднее время  $T_1$  будет менее 0,368.

# Экспоненциальное распределение

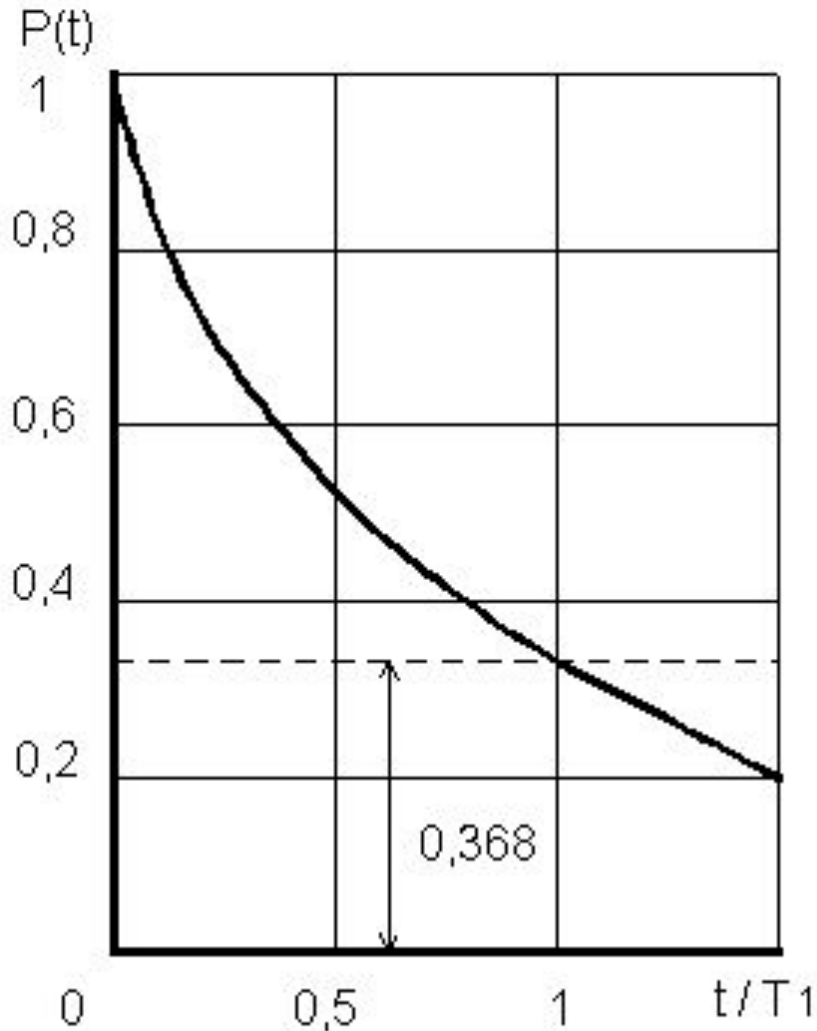


График  
экспоненциального  
распределения

# Экспоненциальное распределение

Длительность периода нормальной эксплуатации до наступления старения может оказаться **существенно меньше**  $T_1$ , т.е. интервал времени на котором допустимо пользование экспоненциальной моделью, часто бывает меньшим среднего времени безотказной работы, вычисленного для этой модели.



# Экспоненциальное распределение

- Если объект отработал время  $t$  без отказа, сохранив  $\lambda = \text{const}$ , то дальнейшее распределение времени безотказной работы будет таким, как в момент первого включения  $\lambda = \text{const}$ .

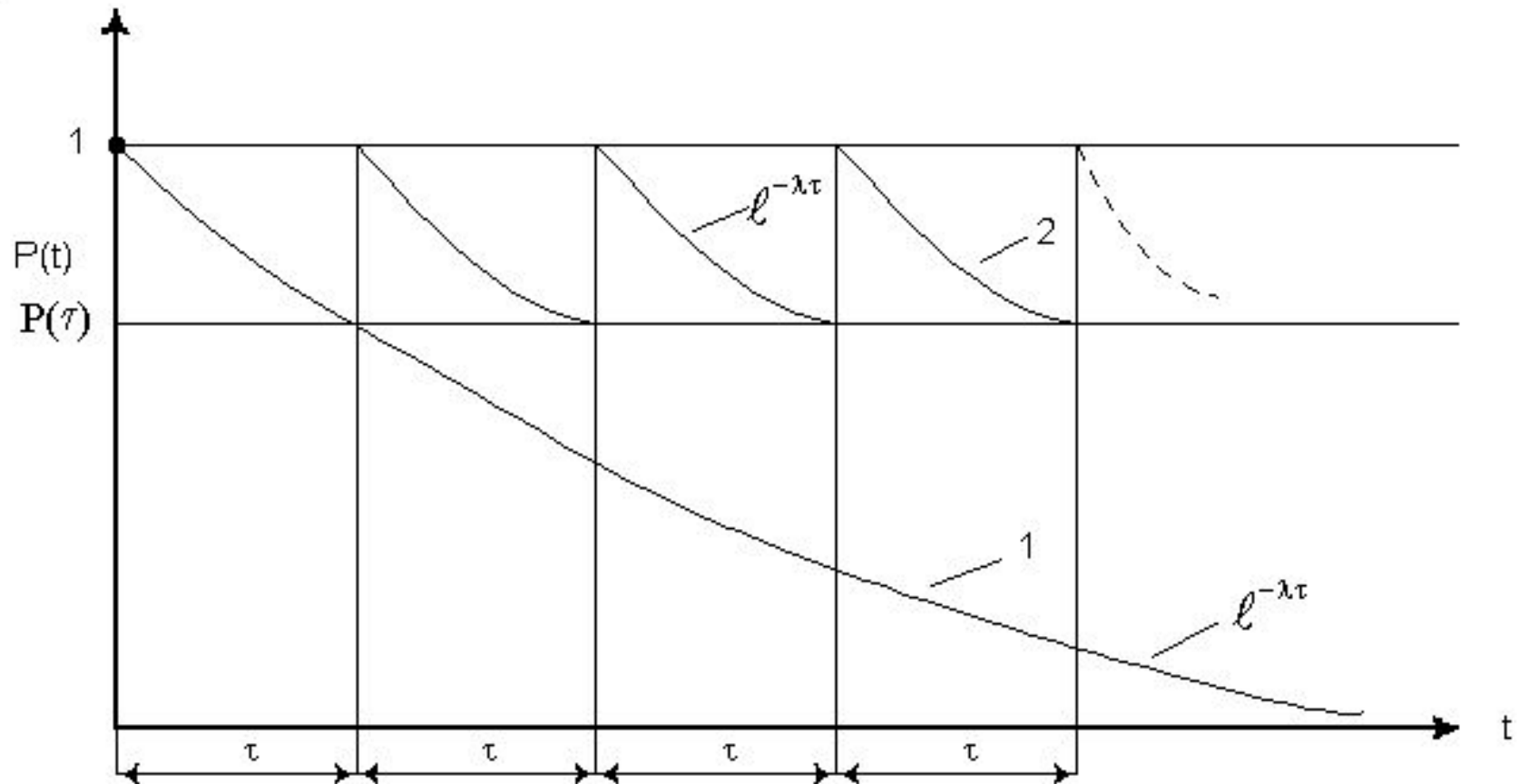
# Экспоненциальное распределение

- Таким образом, отключение работоспособного объекта в конце интервала и новое его включение на такой же интервал множество раз приведет к пилообразной кривой

$$P(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

# Экспоненциальное

## распределение



Вероятность безотказной работы:

- 1-непрерывная работа за время  $t$ ;
- 2-работа с интервалами  $\tau$

# Нормальное распределение (распределение Гаусса)

дает хорошую модель для реальных явлений, в которых:

- 1) имеется сильная тенденция данных группироваться вокруг центра;
- 2) положительные и отрицательные отклонения от центра равновероятны;
- 3) частота отклонений быстро падает, когда отклонения от центра становятся большими.

# Нормальное распределение

- Плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

где  $m_x$ ,  $\sigma_x$  - соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины  $x$ .

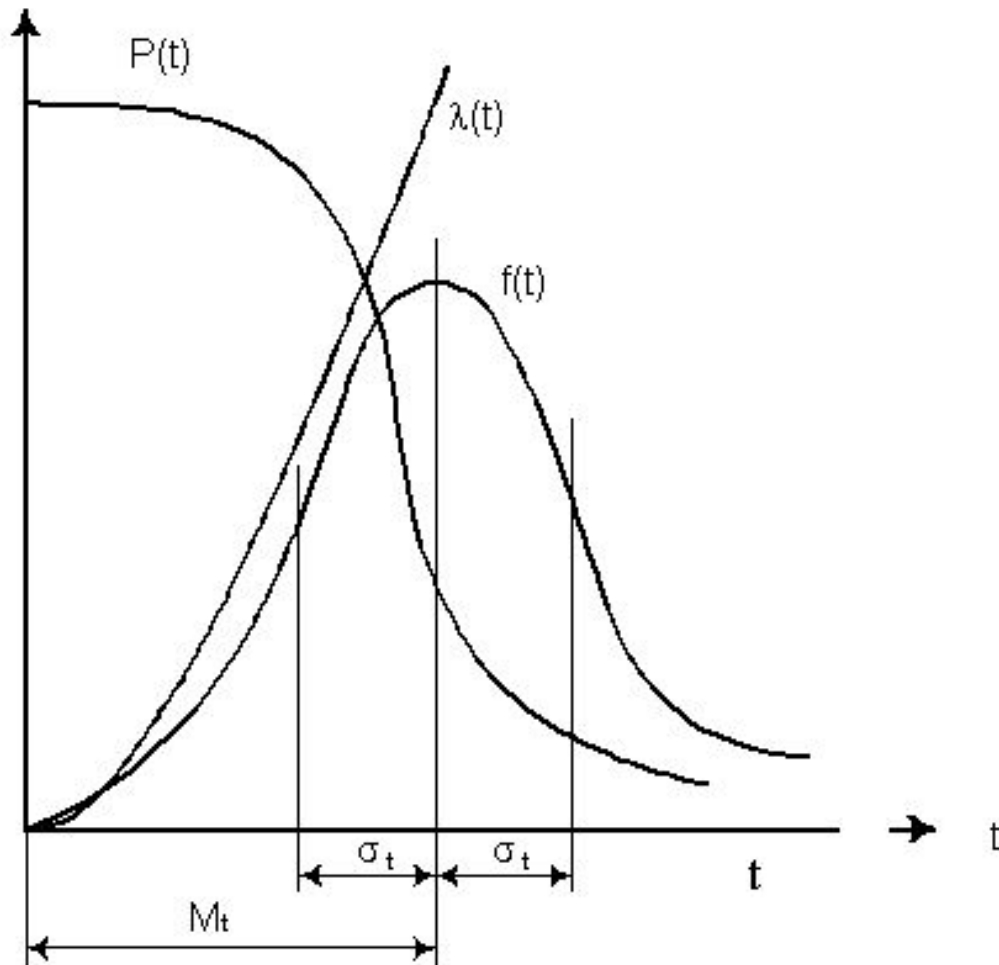
# Нормальное распределение

- Вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_t} \int_0^t e^{\left[ -\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2} \right]} dt$$

- ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТКАЗОВ

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}$$



- Кривые **нормального закона** распределения

# Проверка адекватности моделей

- т.е. проверка того, насколько хорошо модель описывает реальные процессы, происходящие в системе, насколько качественно она будет прогнозировать развитие данных процессов.
- Проверка адекватности проводится на основании некоторой экспериментальной информации, полученной на этапе функционирования системы или при проведении специального эксперимента, в ходе которого наблюдаются интересующие процессы.



- Проверка адекватности заключается в доказательстве факта, что точность результатов, полученных по модели, будет не хуже точности расчетов, произведенных на основании экспериментальных данных.
- С точки зрения *целевого предназначения* моделируемого объекта, то **под адекватностью модели понимают степень её соответствия этому предназначению.**

# Проверка адекватности моделей

Критерий согласия

1. Пирсона
2. Колмогорова
3. Романовского
4. Мизеса.

**ПОДГОТОВИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО**