

Разработка вероятностных математических моделей

- **Моделированием** называется процесс изучения реального объекта, проводимый не на самом объекте, а на его модели.
- **Модель** - материальный или абстрактный, мысленно созданный объект, который в процессе изучения (исследования) заменяет реальный объект, но сохраняет при этом его важнейшие свойства.

- Под **объектом или системой моделирования** обычно понимается совокупность предметов, как реальных, так и идеальных, которая организована определенным образом.
- Такая совокупность предметов называется **полем системы**, а данные, которые описывают организацию системы – **характеристика**.

1. По физической природе



2. По зависимости от времени



3. По характеру влияния параметров



4. По назначению

модели синтеза

модели анализа

модели оптимизации

5. По математическому описанию

линейные

нелинейные

6. По числу параметров

однопараметрические

многопараметрические

7. По иерархическому уровню
(по степени детализации)

метауровень

макроуровень

микроуровень

- **Математические модели** позволяют количественно исследовать явления, трудно поддающиеся изучению на физических моделях.
- **Вероятностная модель** – это математическая модель, имитирующая механизм функционирования гипотетического (не конкретного) реального явления (или системы) стохастической природы.

Исходные данные

1. Имеется массив объектов с наблюдаемыми переменными X и скрытыми переменными T
2. Предполагается, что между наблюдаемыми и скрытыми переменными существует зависимость
3. Точный вид этой зависимости нам неизвестен и/или зависимость недетерминированная, т.е. значения наблюдаемых переменных не позволяют однозначно определить значения скрытых переменных

При вероятностном подходе к решению задач, неопределенность в зависимости между X и T моделируется введением **совместного распределения** на все переменные $p(X, T)$.

Выделяют два вида вероятностных моделей:

- порождающие (generative)
- дискриминативные (discriminative)

- При использовании **порождающих моделей** необходимо задать совместное распределение $p(X, T)$ на множестве объектов
- Зная совместное распределение **МЫ МОЖЕМ моделировать** новые объекты из той же генеральной совокупности

- При использовании **дискримина-тивных моделей** необходимо знать условное распределение $p(T|X)$ на множестве значений скрытых переменных объекта
- Зная условное распределение мы можем определить наиболее вероятные значения скрытых переменных объекта

- В отличие от порождающей модели, дискриминативная модель не позволяет моделировать новые объекты из генеральной совокупности.
- Если нам требуется только уметь определять значения скрытых переменных по наблюдаемым, использование такой модели предпочтительно

Первый этап математического моделирования

- **постановка задачи,**
- **определение объекта и целей исследования,**
- **установление границ области влияния изучаемого объекта.**

Первый этап математического моделирования

- **Границы области влияния объекта** *определяются областью значимого взаимодействия с внешними объектами:* границы области охватывают те элементы, воздействие которых на исследуемый объект существенно; за этими границами действие исследуемого объекта на внешние объекты стремится к нулю.
- **Это позволяет рассматривать моделируемую систему как замкнутую.**

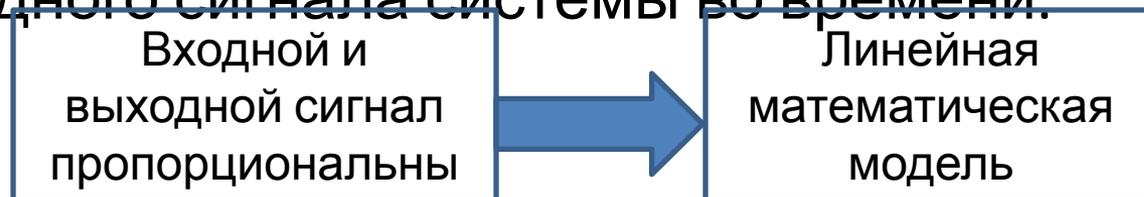
Второй этап математического моделирования

- **выбор типа математической модели**
- **контроль математической модели**

Строится несколько моделей, на основе сравнения результатов исследования которых с реальностью устанавливается наилучшая.

- Если для формирования математической модели недостаточно исходных данных, то выполняется **поисковый эксперимент**, в ходе которого устанавливаются:
 - линейность или нелинейность,
 - динамичность или статичность,
 - стационарность или нестационарность,
 - степень детерминированности исследуемого объекта или процесса.

- **Линейность устанавливается по характеру статической характеристики исследуемого объекта.**
- *Статическая* характеристика объекта - связь между величиной внешнего воздействия на объект (значением входного сигнала) и его реакцией на внешнее воздействие (значением выходного сигнала).
- Под *выходной* характеристикой системы - изменение выходного сигнала системы во времени.



- **Динамичности или статичности** осуществляется по поведению исследуемых показателей объекта во времени.
- **Объект исследования** можно считать **стационарным**, если в ходе ряда экспериментов установлено, что значение фиксируемого параметра в течение всего времени наблюдения не выходит за пределы отклонения, соответствующего ошибке измерения.

- **Детерминированным** называется объект с полностью известными (детерминированными) параметрами.
- Если хотя бы один параметр неизвестен или является случайной величиной (процессом), то объект называется **стохастическим**.

Контроль математической модели

виды контроля (проверки):

- размерностей;
- порядков;
- характера зависимостей;
- экстремальных ситуаций;
- граничных условий;
- математической замкнутости;
- физического смысла;
- устойчивости модели.

- **Контроль размерностей** сводится к проверке выполнения правила, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности.
- **Контроль порядков величин** направлен на упрощение модели. При этом определяются порядки складываемых величин и явно малозначительные слагаемые отбрасываются.
- **Анализ характера зависимостей** сводится к проверке направления и скорости изменения одних величин при изменении других.

- **Анализ экстремальных ситуаций** сводится к проверке наглядного смысла решения при приближении параметров модели к нулю или бесконечности.
- **Контроль граничных условий** состоит в том, что проверяется соответствие ММ граничным условиям, вытекающим из смысла задачи. При этом проверяется, действительно ли граничные условия поставлены и учтены при построении искомой функции и что эта функция на самом деле удовлетворяет таким условиям.

- **Анализ математической замкнутости** сводится к проверке того, что ММ дает однозначное решение.
- **Анализ физического смысла** сводится к проверке физического содержания промежуточных соотношений, используемых при построении ММ.
- **Проверка устойчивости модели** состоит в проверке того, что варьирование исходных данных в рамках имеющихся данных о реальном объекте не приведет к существенному изменению решения.

**Характеристика
вероятностный
математических моделей
теоретических
распределений,
применяемых в решении
задач автомобильного
транспорта**

- **Плотность вероятности** случайной величины X , такая функция $p(x)$, что при любых a и b вероятность неравенства $a < X < b$ равна



a

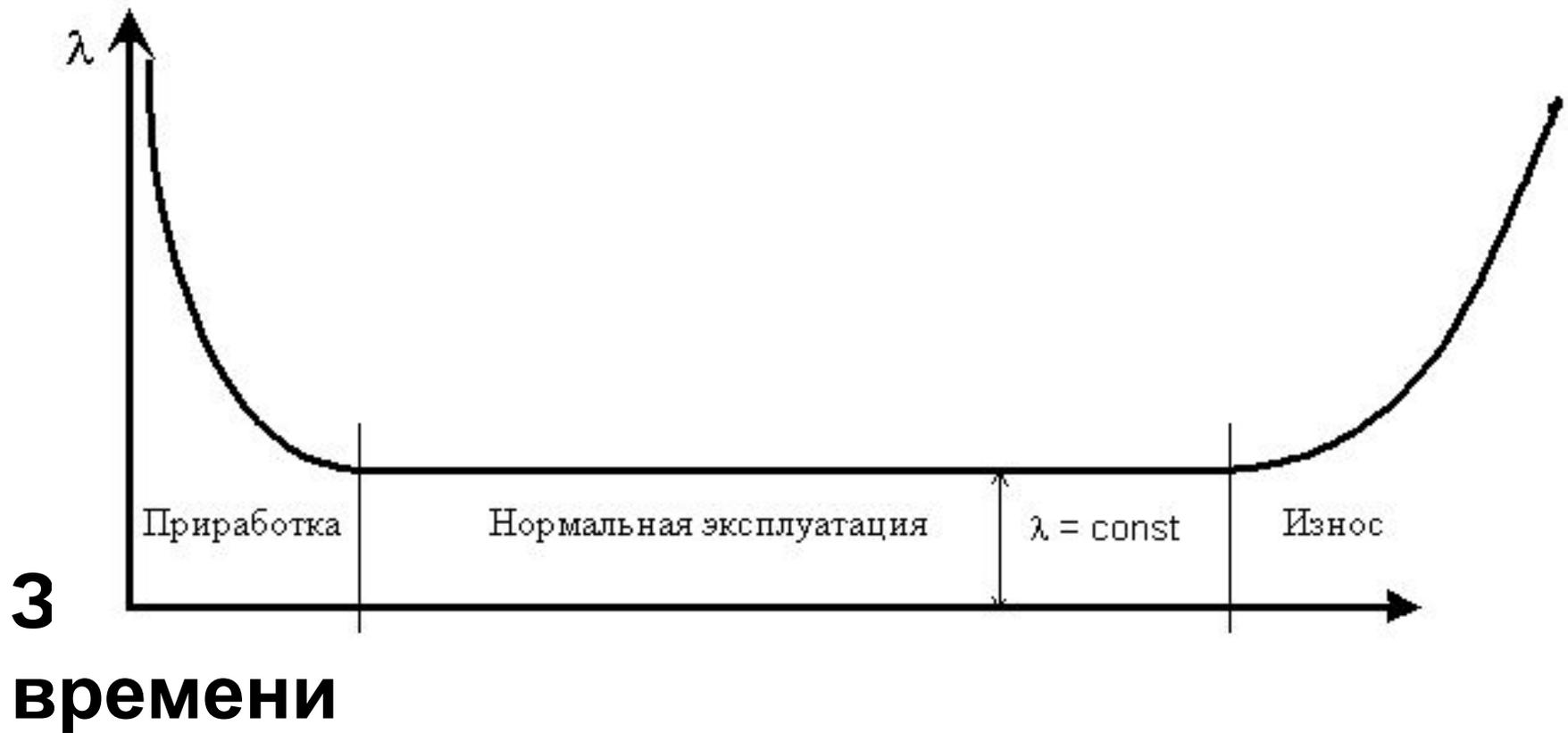
- **Вероятность безотказной работы** - это вероятность того, что в пределах заданий наработки отказ объекта не возникает.

Эта характеристика является функцией времени, причем она является убывающей функцией и может принимать значения от 1 до 0.

- **Средней наработкой до отказа** называется математическое ожидание наработки объекта до первого отказа T_1 .
- Средняя наработка до отказа равна площади, образованной кривой вероятности безотказной работы $P(t)$ и осями координат.

- **Интенсивность отказов** - это условная плотность вероятности возникновения отказа объекта, определяемая при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не наступил.

- **Средняя наработка на отказ** объекта (наработка на отказ) определяется как отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к числу отказов, происшедших за суммарную наработку



соответствует

закону Вейбулла.

Распределение Вейбулла

- Зависимость интенсивности отказов от времени можно получить, используя для вероятностного описания случайной наработки до отказа двухпараметрическое распределение Вейбулла.

Распределение Вейбулла

Плотность вероятности момента отказа

$$f(t) = \lambda \delta t^{\delta-1} \cdot e^{-(\lambda t^{\delta})}$$

где δ - параметр формы (определяется подбором в результате обработки экспериментальных данных, $\delta > 0$);
 λ - параметр масштаба,

$$\lambda = \frac{1}{\hat{T}_1}$$

Распределение Вейбулла

- **Интенсивность отказов**

$$\lambda(t) = \lambda \cdot \delta \cdot t^{\delta-1}.$$

- **Вероятность безотказной работы**

$$P(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t)dt} = e^{-\lambda t^{\delta}}$$

Распределение Вейбулла

Средняя наработка до отказа

$$T_1 = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^{\delta}} dt$$

Распределение Вейбулла

- При параметре $\delta = 1$ распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное, а при $\delta = 2$ - в распределение Рэлея.
- При $\delta < 1$ интенсивность отказов монотонно убывает (период приработки), а при $\delta > 1$ монотонно возрастает (период износа),

Распределение Вейбулла

- Путем подбора параметра δ можно получить, на каждом из трех участков, такую теоретическую кривую $\lambda(t)$, которая достаточно близко совпадает с экспериментальной кривой, и тогда расчет требуемых показателей надежности можно производить на основе известной закономерности.

Экспоненциальное распределение

- Частный случай распределения Вейбулла, когда параметр формы $\delta = 1$.
- Распределение однопараметрическое, то есть для записи расчетного выражения достаточно одного параметра $\lambda = \text{const}$.

Экспоненциальное распределение

- Если интенсивность отказов постоянна, то вероятность безотказной работы как функция времени подчиняется экспоненциальному закону:

$$P(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

Экспоненциальное распределение

- Среднее время безотказной работы:

$$T_1 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

- Вероятность безотказной работы на интервале, превышающем среднее время T_1 будет менее 0,368.

Экспоненциальное распределение

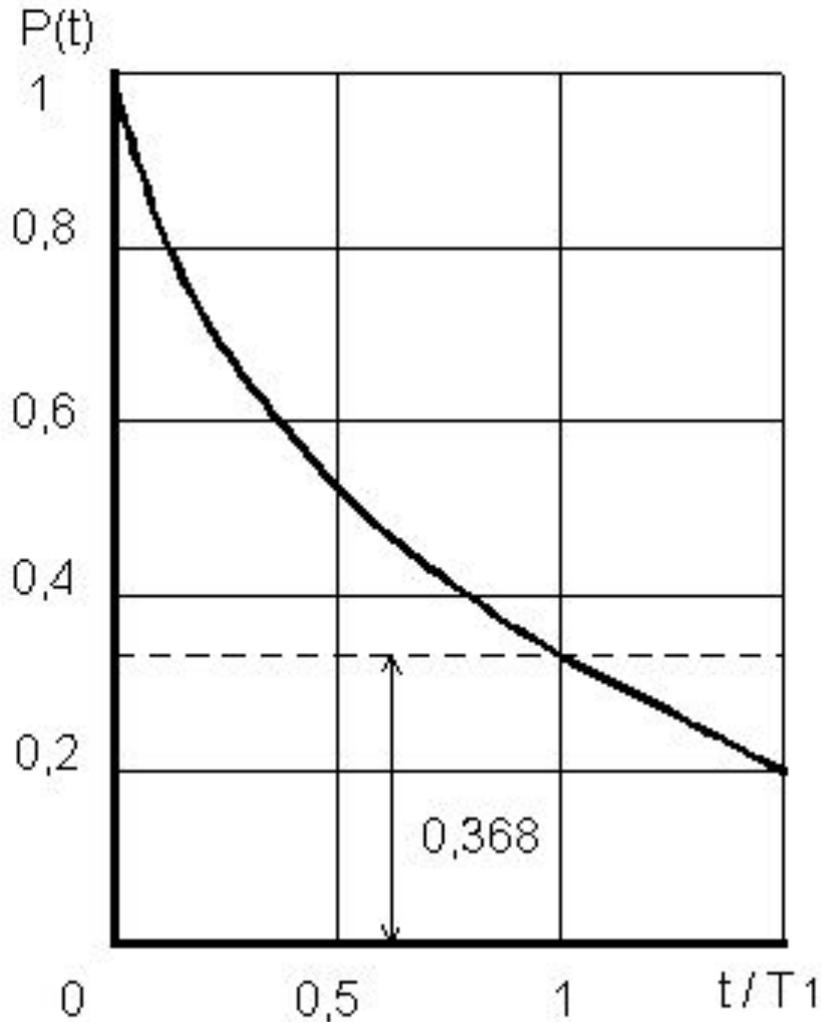


График
экспоненциального
распределения

Экспоненциальное распределение

Длительность периода нормальной эксплуатации до наступления старения может оказаться **существенно меньше** T_1 , т.е. интервал времени на котором допустимо пользование экспоненциальной моделью, часто бывает меньшим среднего времени безотказной работы, вычисленного для этой модели.

Экспоненциальное распределение

- Если объект отработал время t без отказа, сохранив $\lambda = \text{const}$, то дальнейшее распределение времени безотказной работы будет таким, как в момент первого включения $\lambda = \text{const}$.

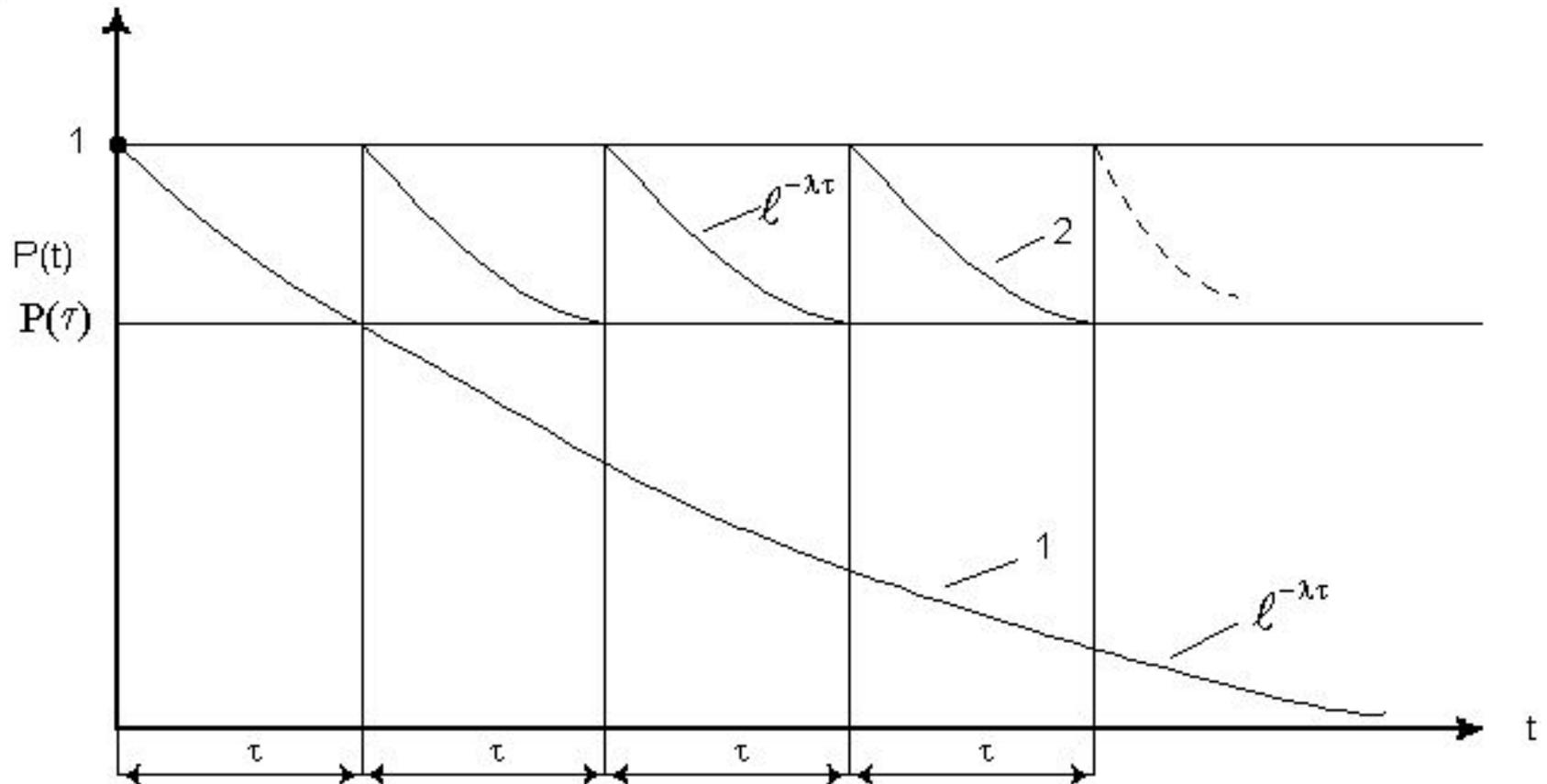
Экспоненциальное распределение

- Таким образом, отключение работоспособного объекта в конце интервала и новое его включение на такой же интервал множество раз приведет к пилообразной кривой

$$P(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

Экспоненциальное

распределение



Вероятность безотказной работы:

- **1**-непрерывная работа за время t ;
- **2**-работа с интервалами τ

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

дает хорошую модель для реальных явлений, в которых:

- 1) имеется сильная тенденция данных группироваться вокруг центра;
- 2) положительные и отрицательные отклонения от центра равновероятны;
- 3) частота отклонений быстро падает, когда отклонения от центра становятся большими.

Нормальное распределение

- Плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx$$

где m_x , σ_x - соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины x .

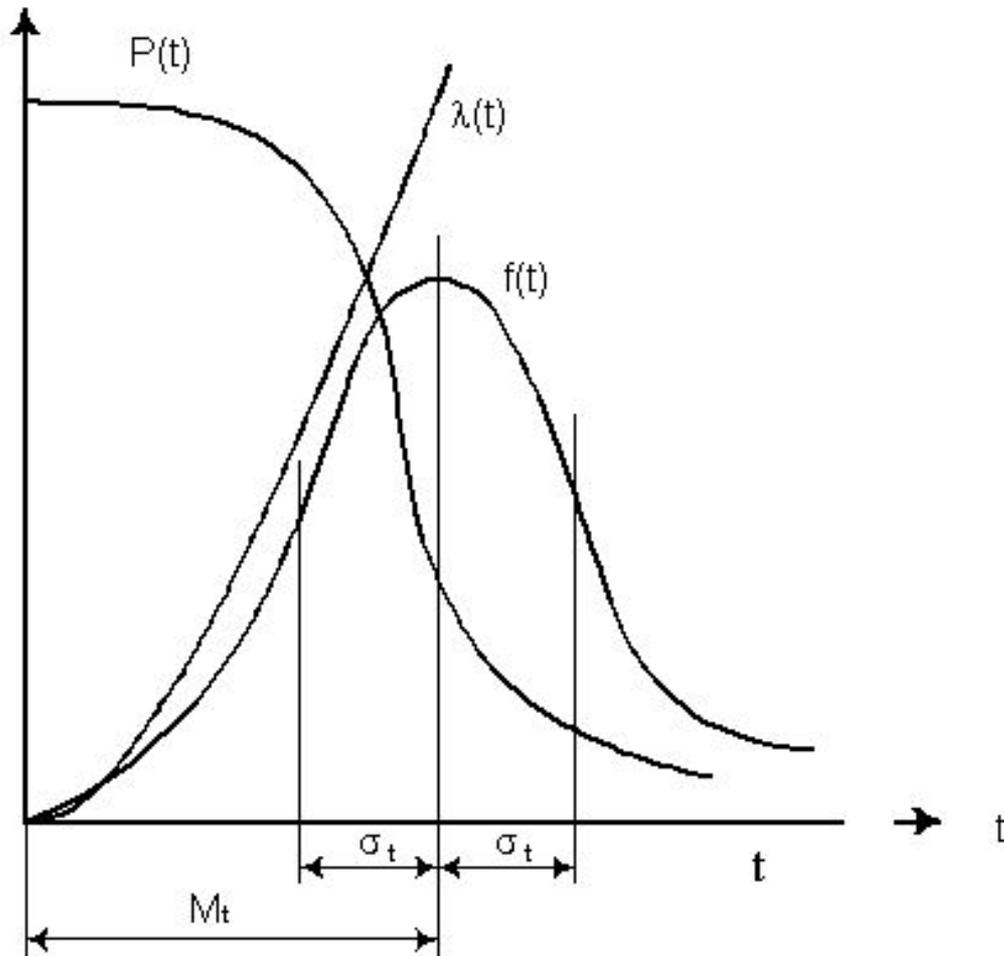
Нормальное распределение

- Вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_t} \int_0^t e^{\left[-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2} \right]} dt$$

- ИНТЕНСИВНОСТЬ ОТКАЗОВ

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}$$



- Кривые **нормального закона** распределения

Проверка адекватности моделей

- т.е. проверка того, насколько хорошо модель описывает реальные процессы, происходящие в системе, насколько качественно она будет прогнозировать развитие данных процессов.
- Проверка адекватности проводится на основании некоторой экспериментальной информации, полученной на этапе функционирования системы или при проведении специального эксперимента, в ходе которого наблюдаются интересующие процессы.

- Проверка адекватности заключается в доказательстве факта, что точность результатов, полученных по модели, будет не хуже точности расчетов, произведенных на основании экспериментальных данных.
- С точки зрения *целевого предназначения* моделируемого объекта, то **под адекватностью модели понимают степень её соответствия этому предназначению.**

Проверка адекватности моделей

Критерий согласия

1. Пирсона
2. Колмогорова
3. Романовского
4. Мизеса.

ПОДГОТОВИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО