Разработка вероятностных математических моделей

- **Моделированием называется процесс изучения реального объекта, проводимый не на самом объекте, а на его модели.**
- **Модель** - материальный или абстрактный, мысленно созданный объект, который в процессе изучения (исследования) заменяет реальный объект, но сохраняет при этом его важнейшие свойства.

- Под **объектом или системой моделирования** обычно понимается совокупность предметов, как реальных, так и идеальных, которая организована определенным образом.

- Такая совокупность предметов называется **полем системы**, а данные, которые описывают организацию системы – **характеристика.**

1. **По физической природе**
   - материальные
     - физические
     - аналоговые
   - математические (абстрактные)
     - аналитические
     - эмпирические (имитационные)

2. **По зависимости от времени**
   - статические
   - динамические

3. **Похарактеру влияния параметров**
   - детерминированные
   - вероятностные (стохастические)

4. По назначению
- модели синтеза
- модели анализа
- модели оптимизации

5. По математическому описанию
- линейные
- нелинейные

6. По числу параметров
- однопараметрические
- многопараметрические

7. По иерархическому уровню (по степени детализации)
- метауровень
- макроуровень
- микроуровень

- **Математические модели** позволяют количественно исследовать явления, трудно поддающиеся изучению на физических моделях.

- **Вероятностная модель** – это математическая модель, имитирующая механизм функционирования гипотетического (не конкретного) реального явления (или системы) стохастической природы.

Исходные данные

1. Имеется массив объектов с наблюдаемыми переменными *X и скрытыми переменными T*
2. *Предполагается, что между наблюдаемыми и* скрытыми переменными существует зависимость
3. *Точный вид этой зависимости нам неизвестен и/или* зависимость недетерминированная, т.е. значения наблюдаемых переменных не позволяют однозначно определить значения скрытых переменных

При вероятностном подходе к решению задач, неопределенность в зависимости между X и T моделируется введением **совместного распределения** на все переменные *p(X, T).*

Выделяют два вида вероятностных моделей:

- порождающие (generative)
- дискриминативные (discriminative)

- При использовании **порождающих моделей** необходимо *задать совместное распределение p(X, T)* на множестве объектов
- Зная совместное распределение *мы* ***можем моделировать*** новые объекты из той же генеральной совокупности

- При использовании **дискримина-тивных моделей** *необходимо знать условное распределение $p(T|X)$* на множестве значений скрытых переменных объекта
- Зная условное распределение мы **можем определить** наиболее вероятные значения скрытых переменных объекта

- В отличие от порождающей модели, **дискриминативная модель не позволяет моделировать** новые объекты из генеральной совокупности.
- Если нам требуется только уметь определять значения скрытых переменных по наблюдаемым, использование такой модели предпочтительно

Первый этап математического моделирования

- постановка задачи,
- определение объекта и целей исследования,
- установление границ области влияния изучаемого объекта.

Первый этап математического моделирования

- **Границы области влияния объекта** *определяются областью значимого взаимодействия с внешними объектами*: границы области охватывают те элементы, воздействие которых на исследуемый объект существенно; за этими границами действие исследуемого объекта на внешние объекты стремится к нулю.
- **Это позволяет рассматривать моделируемую систему как замкнутую.**

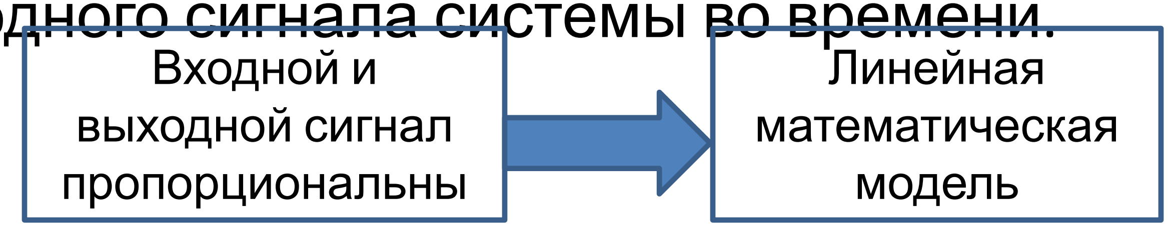
Второй этап математического моделирования

- **выбор типа математической модели**
- **контроль математической модели**

Строится несколько моделей, на основе сравнения результатов исследования которых с реальностью устанавливается наилучшая.

- Если для формирования математической модели недостаточно исходных данных, то выполняется **поисковый эксперимент**, в ходе которого устанавливаются:
- линейность или нелинейность,
- динамичность или статичность,
- стационарность или нестационарность,
- степень детерминированности исследуемого объекта или процесса.

- **Линейность устанавливается по характеру статической характеристики исследуемого объекта.**
- С*татическая* характеристика объекта - связь между величиной внешнего воздействия на объект (значением входного сигнала) и его реакцией на внешнее воздействие (значением выходного сигнала).
- Под *выходной* характеристикой системы - изменение выходного сигнала системы во времени.



- **Динамичности или статичности** осуществляется по поведению исследуемых показателей объекта во времени.

- **Объект исследования** можно считать **стационарным,** если в ходе ряда экспериментов установлено, что значение фиксируемого параметра в течение всего времени наблюдения не выходит за пределы отклонения, соответствующего ошибке измерения.

- **Детерминированным** называется объект с полностью известными (детерминированными) параметрами.

- Если хотя бы один параметр неизвестен или является случайной величиной (процессом), то объект называется **стохастическим.**

Контроль математической модели

виды контроля (проверки):

- размерностей;
- порядков;
- характера зависимостей;
- экстремальных ситуаций;
- граничных условий;
- математической замкнутости;
- физического смысла;
- устойчивости модели.

- **Контроль размерностей** сводится к проверке выполнения правила, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности.

- **Контроль порядков величин** направлен на упрощение модели. При этом определяются порядки складываемых величин и явно малозначительные слагаемые отбрасываются.

- **Анализ характера зависимостей** сводится к проверке направления и скорости изменения одних величин при изменении других.

- **Анализ экстремальных ситуаций** сводится к проверке наглядного смысла решения при приближении параметров модели к нулю или бесконечности.

- **Контроль граничных условий** состоит в том, что проверяется соответствие ММ граничным условиям, вытекающим из смысла задачи. При этом проверяется, действительно ли граничные условия поставлены и учтены при построении искомой функции и что эта функция на самом деле удовлетворяет таким условиям.

- **Анализ математической замкнутости** сводится к проверке того, что ММ дает однозначное решение.

- **Анализ физического смысла** сводится к проверке физического содержания промежуточных соотношений, используемых при построении ММ.

- **Проверка устойчивости модели** состоит в проверке того, что варьирование исходных данных в рамках имеющихся данных о реальном объекте не приведет к существенному изменению решения.

Характеристика вероятностный математических моделей теоретических распределений, применяемых в решении задач автомобильного транспорта

- **Плотность вероятности** случайной величины X, такая функция p(x), что при любых a и b вероятность неравенства a < X < b равна

$$\int\limits_{a}^{\square\square} \square\square(\square\square)\square\square\square\square$$

- **Вероятность безотказной работы** - это вероятность того, что в пределах заданий наработки отказ объекта не возникает.

Эта характеристика является функцией времени, причем она является убывающей функцией и может принимать значения от 1 до 0.

- **Средней наработкой до отказа** называется математическое ожидание наработки объекта до первого отказа T_1.

- Средняя наработка до отказа равна площади, образованной кривой вероятности безотказной работы P(t) и осями координат.

- **Интенсивность отказов -** это условная плотность вероятности возникновения отказа объекта,определяемая при условии, что до рассматриваемого момента времени отказ не наступил.

- **Средняя наработка на отказ** объекта (наработка на отказ) определяется как отношение суммарной наработки восстанавливаемого объекта к числу отказов, происшедших за суммарную наработку

з времени

соответствует

закону Вейбулла.

Распределение Вейбулла

- Зависимость интенсивности отказов от времени можно получить, используя для вероятностного описания случайной наработки до отказа двухпараметрическое распределение Вейбулла.

Распределение Вейбулла

Плотность вероятности момента отказа

$$f(t) = \lambda\delta t^{\delta-1} \cdot e^{-(\lambda t^{\delta})}$$

где δ - параметр формы (определяется подбором в результате обработки экспериментальных данных, δ > 0);
λ - параметр масштаба,

$$\lambda = \frac{1}{\hat{T}_1}$$

Распределение Вейбулла

- **Интенсивность отказов**

$$\lambda(t) = \lambda \cdot \delta \cdot t^{\delta-1}.$$

- **Вероятность безотказной работы**

$$P(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t)dt} = e^{-\lambda t^{\delta}}$$

Распределение Вейбулла

Средняя наработки до отказа

$$T_1 = \int_0^\infty P(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t^\delta}\, dt$$

Распределение Вейбулла

- При параметре **δ= 1** распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное, а при **δ= 2** - в распределение Рэлея.

- При **δ<1** интенсивность отказов монотонно убывает (период приработки), а при **δ>1** монотонно возрастает (период износа),

Распределение Вейбулла

- Путем **подбора параметра δ** можно получить, на каждом из трех участков, такую **теоретическую кривую λ (t),** которая достаточно близко совпадает с **экспериментальной кривой**, и тогда расчет требуемых показателей надежности можно производить на основе известной закономерности.

Экспоненциальное распределение

- Частный случай распределения Вейбулла, когда параметр формы $\delta = 1$.

- Распределение однопараметрическое, то есть для записи расчетного выражения достаточно одного параметра $\lambda = const$.

Экспоненциальное распределение

- Если интенсивность отказов постоянна, то вероятность безотказной работы как функция времени подчиняется экспоненциальному закону:

$$P(t) = e^{-\lambda \cdot t}$$

Экспоненциальное распределение

- Среднее время безотказной работы:

$$T_1 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda \cdot t} dt = \frac{1}{\lambda}$$

- Вероятность безотказной работы на интервале, превышающем среднее время T_1 будет менее 0,368.

Экспоненциальное распределение

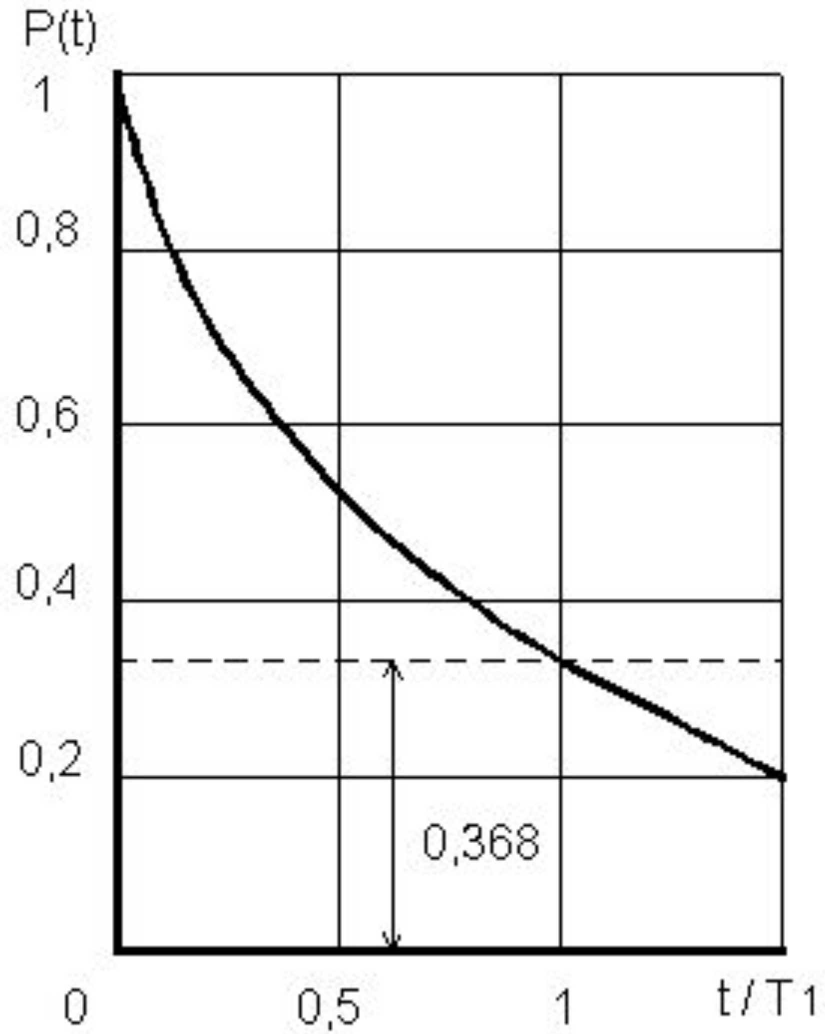


График экспоненциального распределения

Экспоненциальное распределение

Длительность периода нормальной эксплуатации до наступления старения может оказаться **существенно меньше T_1**, т.е. интервал времени на котором допустимо пользование экспоненциальной моделью, часто бывает меньшим среднего времени безотказной работы, вычисленного для этой модели.

Экспоненциальное распределение

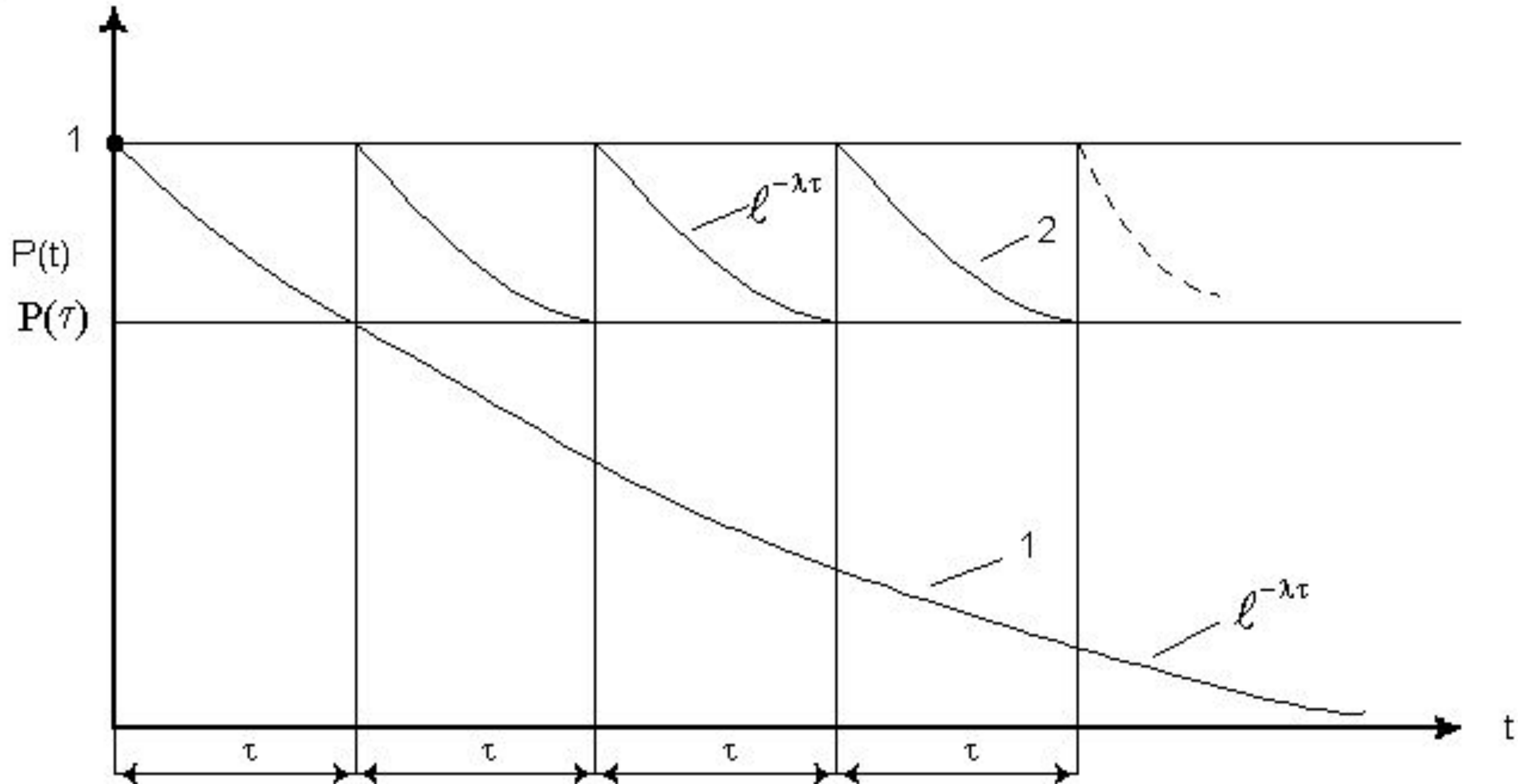
- Если объект отработал время т без отказа, сохранив λ = const, то дальнейшее распределение времени безотказной работы будет таким, как в момент первого включения λ = const.

Экспоненциальное распределение

- Таким образом, отключение работоспособного объекта в конце интервала и новое его включение на такой же интервал множество раз приведет к пилообразной кривой

$$P(\tau) = e^{-\lambda\tau}$$

Экспоненциальное распределение



Вероятность безотказной работы:

- **1-**непрерывная работа за время t;
- **2**-работа с интервалами т

Нормальное распределение (распределение Гаусса)

дает хорошую модель для реальных явлений, в которых:

- 1) имеется сильная тенденция данных группироваться вокруг центра;
- 2) положительные и отрицательные отклонения от центра равновероятны;
- 3) частота отклонений быстро падает, когда отклонения от центра становятся большими.

Нормальное распределение

- Плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{[-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}]} dx$$

где mx, σx - соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины x.

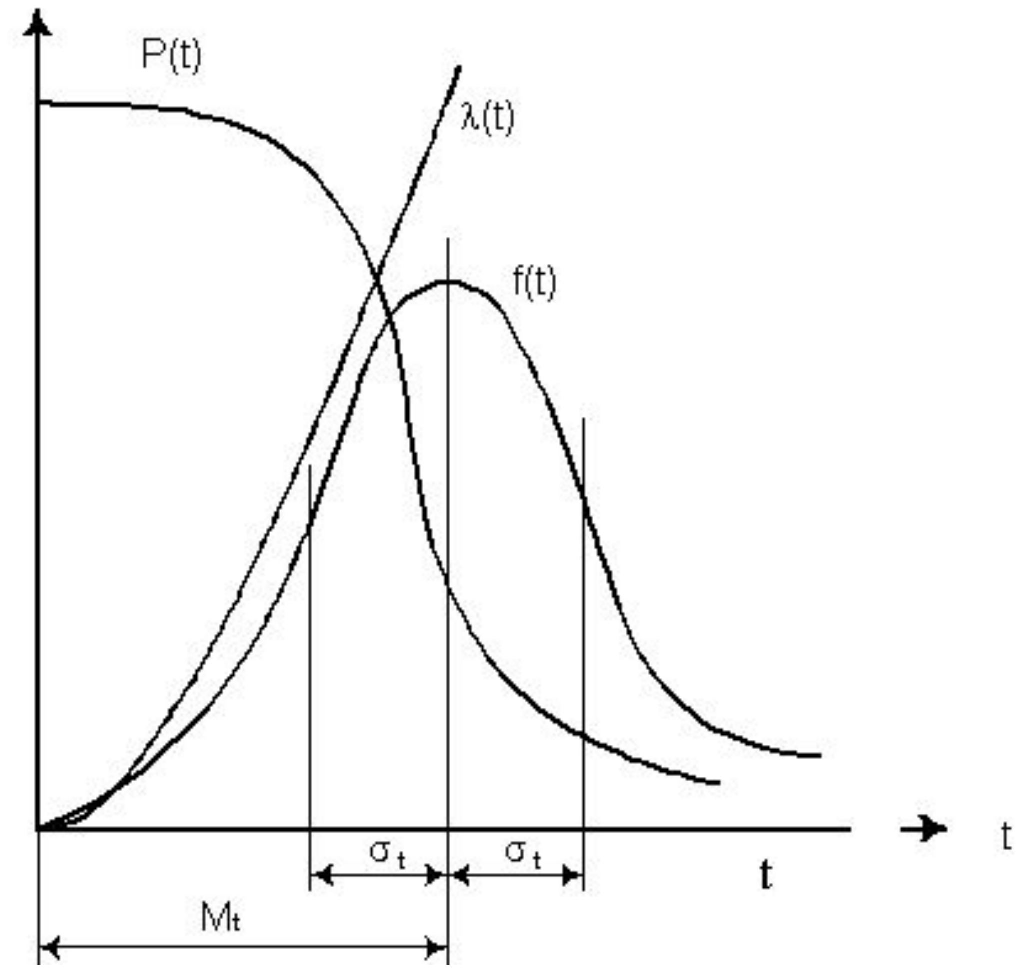
Нормальное распределение

- Вероятность безотказной работы

$$P(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_t} \int_0^t e^{\left[-\frac{(t-m_t)^2}{2\sigma_t^2}\right]} dt$$

- интенсивность отказов

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}$$



- Кривые **нормального закона** распределения

Проверка адекватности моделей

- т.е. проверка того, насколько хорошо модель описывает реальные процессы, происходящие в системе, насколько качественно она будет прогнозировать развитие данных процессов.

- Проверка адекватности проводится на основании некоторой экспериментальной информации, полученной на этапе функционирования системы или при проведении специального эксперимента, в ходе которого наблюдаются интересующие процессы.

- Проверка адекватности заключается в доказательстве факта, что точность результатов, полученных по модели, будет не хуже точности расчетов, произведенных на основании экспериментальных данных.

- С точки зрения *целевого предназначения* моделируемого объекта, то под адекватностью модели понимают степень её соответствия этому предназначению.

Проверка адекватности моделей

Критерий согласия

1. Пирсона
2. Колмогорова
3. Романовского
4. Мизеса.

ПОДГОТОВИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО