Теория игр

Основные понятия

Предмет изучения

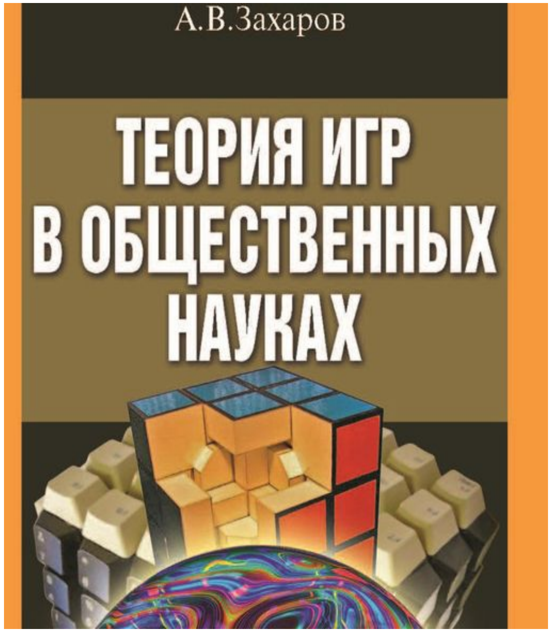
- **Теория игр** – раздел теории исследования операций, изучающий формальные модели принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях.
- Математическая модель конфликтной ситуации называется **игрой.**

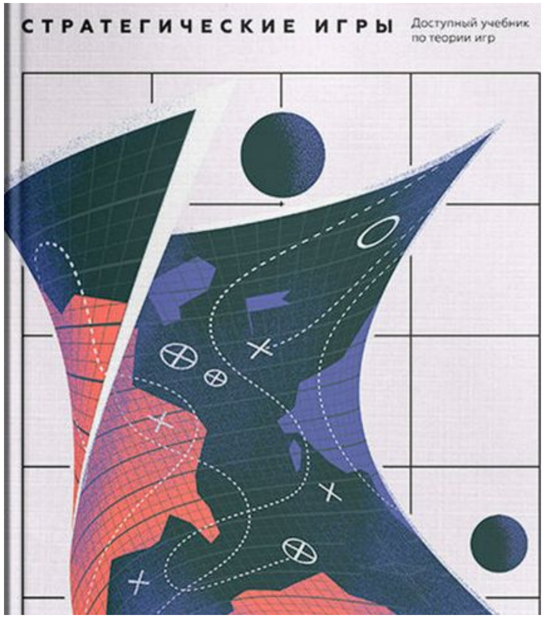


? ! ??!! ???!!! ????!!! !……..

- Измерить то, что легко измеряемо. Само по себе, это нормально.
- Отбросить то, что нельзя легко измерить или придать этому некое количественное значение. Это искусственно и вводит в заблуждение.
- Представить то, что нельзя измерить, как несущественное. Это - слепота.
- Заявить, что то, чего нельзя легко измерить, на самом деле не существует. Это - самоубийство.»

- Игровые математические модели имеют широкое практическое применение в экономике, политике, биологии, военном деле и других отраслях знаний





Основные понятия теории игр

- **Конфликтной** называется ситуация, в которой взаимодействует несколько сторон, и при этом каждый из участников старается достичь своей цели доступным ему способом, а результат взаимодействия зависит от действий каждого участника.

Черты конфликтной ситуации:

- наличие заинтересованных сторон
- наличие своих интересов (целей) у каждой стороны *
- наличие набора возможных действий у каждой из сторон
- часто недостаток информации (неопределенность)
- **<u>ПРИМЕРЫ</u>**

- Покупатель и продавец
- Работник и работодатель
- Спортивные состязания
- Вооруженные конфликты ....

Игроки – заинтересованные стороны в игре (участники игры).

Парная игра – игра, в которой принимают участие два игрока.

Множественная игра – игра с числом участников более двух.

Коалиция - объединение игроков

- Коалиции действия
- Коалиции интересов

Стратегия – любое возможное действие (комплекс действий) игрока

Ход - выбор действия игроками (личный ход *)

Ситуация (исход игры) – состояние, в котором оказываются игроки после очередного хода

Будем предполагать, что каждый из участников <u>парной</u> игры обладает своим набором чистых стратегий:
$S_A=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$, $S_B=\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$

В условиях конфликта каждый игрок делает свой ход, т.е. выбирает одну из своих возможных стратегий.

Сделав ход, игроки оказываются в ситуации $X_{ij}=\{A_i, B_j\}$.

Правила игры могут запрещать отдельные ситуации, которые называются «запрещенными».

Если в процессе игры возникает запрещенная ситуация, то игра считается несостоявшейся.

Функция выигрыша – степень удовлетворения интересов игрока (F_A).

Функция выигрыша определена на множестве ситуаций (S_A, S_B) и ставит в соответствие каждой ситуации X_{ij} некоторое число $F(X_{ij})$, называемое **выигрышем** игрока А в данной ситуации.

Реализация игры – выбор игроками своих возможных стратегий и получение в сложившейся ситуации своего выигрыша.

Предполагается, что игра происходит по определенным правилам (без этого не возможна формализация задачи).

Правила - система условий, которые описывают:

-возможные действия каждого из игроков;

- объем информации, которую может получить каждая из сторон о возможных действиях противника;

- исход (результат) игры после каждой совокупности «ходов» противника

Цель теории игр – выработка рекомендаций для удовлетворительного поведения игроков в конфликте и выявления для каждого из них **оптимальной стратегии**.

Оптимальная стратегия – такая стратегия, которая при многократном повторении игры гарантирует игроку максимальный возможный средний выигрыш (при условии неопределенности –не зависящий от поведения других участников).

Замечания:

- Выбор оптимальной стратегии базируется на принципе **разумности** каждого игрока, т.е. поведение каждого из них направлено на достижение своих целей.
- Оптимальность опирается на некоторый **критерий**. Поэтому возможны случаи, когда стратегия является оптимальной в смысле одного критерия и не оптимальной в смысле другого.

Парная игра с нулевой суммой выигрыша

Определение. Игры, в которых каждый из игроков преследует противоположные интересы называются **антагонистическими.**

В антагонистической игре один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой.

Следовательно: $F_A(A_iB_j) = - F_B(B_jA_i)$ или

$$F_A(A_iB_j) + F_B(B_jA_i) = 0$$

Антагонистическая парная игра определяется совокупностью $\{S_A, S_B, F_A\}$

Пусть игроки A и B имеют наборы стратегий $S_A=\{A_1\ A_2,\ldots,A_m\}$ и $S_B=\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$.

Ситуация $X_{ij}=(A_i,\ B_j)$ полностью определяет **выигрыш** игрока A, который равен значению функции выигрыша $F_A(A_iB_j)= a_{ij}$.

Это число в антагонистической парной игре одновременно **проигрыш** игрока B.

Матрица $A=\{a_{ij}\}$, в которой номер строки - номер стратегии игрока A, а номер столбца – номер стратегии игрока B, называется матрицей **выигрыша игрока** A.

Платежная матрица

A =

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	….	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	….	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	….	a_{2n}
…..	….	….	….	….
A_m	a_{m1}	a_{m2}	….	a_{mn}

Аналогичным образом можно построить матрицу выигрышей игрока В.
При этом **В= - А^T**.
Таким образом матрица **В** полностью определяется матрицей **А.**

Матрица **А** называется также **платежной матрицей или матрицей игры.**

Замечания.

Матрица игры существенно зависит от упорядочивания множеств S_A и S_B. При иной нумерации стратегий матрица окажется другой. Т.е. одна и та же игра может быть представлена различными матрицами. Но функция F_A остается однозначно определенной.

Построение матрицы игры является весьма сложной задачей. Однако, всякую конечную игру можно привести к матричной форме.

Пример построения платежной матрицы

<u>Задача.</u> Две фирмы А и В производят один и тот же сезонный товар, который поступает на рынок в моменты времени i и j. Цель фирмы В разорить фирму А и стать монополистом на рынке, пойдя на некоторые убытки.

Товар обладает следующим свойством. Чем дольше он находится в производстве, тем выше его качество.

Способ борьбы один: поставлять товар более высокого качества.

Для разорения фирмы А необходимо минимизировать ее доходы.

<u>Необходимо.</u> Построить матрицу игры А для $n = 4$ при условии, что доход равен величине С (в единицу времени).

Решение

Стороны А и В имеют противоположные интересы.

Фирма обладает набором стратегий $S_A=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ поставки товара в момент времени i, а фирма В набором $S_B=\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$ поставки товара в момент времени j.

Возможны три варианта сравнения моментов поставки товара: $i<j$, $i=j$, $i>j$.

С – некоторая постоянная величина, n – число моментов поставки.

$$F_A(i,j)=\begin{cases} c*(j-i) & при \quad i<j \\ c*(n-i+j)/2 & при \quad i=j \\ c*(n-i+1) & при \quad i>j \end{cases}$$

В результате для n = 4 получим матрицу:

$A_i \backslash B_j$	$B_1=1$	$B_2=2$	$B_3=3$	$B_4=4$
$A_1=1$	$a_{11}=2c$	$a_{12}=c$	$a_{13}=2c$	$a_{14}=3c$
$A_2=2$	$a_{21}=3c$	$a_{22}=2c$	$a_{23}=c$	$a_{24}=2c$
$A_3=3$	$a_{31}=2c$	$a_{32}=3c$	$a_{33}=2c$	$a_{34}=c$
$A_4=4$	$a_{41}=c$	$a_{42}=2c$	$a_{43}=3c$	$a_{44}=2c$

Максиминные и минимаксные стратегии

Пусть имеем парную антагонистическую игру между игроками A и B:

$S_A=\{A_1,A_2,\dots,A_m\}$,

$S_B=\{B_1,B_2,\dots,B_n\}$,

$F_A(i,j)=a_{ij}$.

Анализ платежной матрицы: игрок A.

Если игрок **A** выбирает одну из своих стратегий (A_i), то его выигрыш – одно из значений $a_{ij,}$ лежащее в строке i.
A исходит из того, что игрок B в ответ выберет наилучшую из своих стратегий, при которой выигрыш игрока A будет минимальным.

Пусть $\boldsymbol{\alpha_i = \min(a_{ij})}$ при $1 \leq j \leq n$ для всех $1 \leq i \leq m$

α_i – показатель эффективности стратегии A_i.

A выберет ту стратегию, при которой показатель эффективности $\boldsymbol{\alpha_i}$ принимает максимальное значение:

$$\boldsymbol{\alpha = \max(\alpha_i) = \max \min(a_{ij}) \text{ при } 1 \leq j \leq n \text{ и } 1 \leq i \leq m}.$$

Данный **принцип** выбора стратегии называется ***максиминным***.

α – максимин стратегий игрока A.

S_A^{maxmin} – множество максиминных стратегий игрока A.

Если игрок A выбирает одну из максиминных стратегий A_i^{maxmin}, то его выигрыш будет $a_i^{maxmin}{}_k \geq \boldsymbol{\alpha}$ при любой стратегии игрока **B**.

Анализ платежной матрицы : игрок В

В антагонистической игре результат игры для игрока В удобно анализировать как «проигрыш».

Для стратегий B_j «выигрыши» расположены в столбцах матрицы F_A: a_{ji}.

Максимальный выигрыш игрока А есть:

$$\boldsymbol{\beta_j = \max(a_{ji})} \text{ при } \boldsymbol{1 \le i \le m}$$

Интерес игрока В : выбрать такую стратегию, при которой игрок А будет иметь минимальный выигрыш:

$$\boldsymbol{\beta = \min(\beta_j) = \operatorname{minmax}(a_{ji})}$$

Это **минимаксный принцип**.

β – минимакс стратегий игрока **В.**

$\mathbf{S_B^{minimax}}$ – множество минимаксных стратегий игрока **В.**

α – нижняя граница игры

β – верхняя граница игры

$$\boldsymbol{\alpha \le \beta}$$

Замечание: α и β могут быть любыми действительными числами. Если α <0 термин проигрыш не употребляется.

Пример. Найти верхнюю и нижнюю границы игры и максиминную и минимаксную стратегии игроков A и B.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	-4	3	5	-4
A_2	1	-2	1	**-2**
A_3	5	4	-2	**-2**
β_j	5	**3**	5	3 \-2

Т.к. $\alpha_2=\alpha_3$, то стратегии

A_2 и A_3 – максиминные стратегии игрока **A**.

У игрока **B** стратегия B_2 минимаксная.

Уменьшение размерности игры

При анализе матрицы можно исключить из платежной матрицы стратегии, заведомо ***невыгодные*** по сравнению с другими стратегии.

- Для игрока А - те, которым соответствуют строки с элементами, заведомо меньшими по сравнению с элементами других строк
- Для игрока В - те, которым соответствуют столбцы с элементами, заведомо большими по сравнению с элементами других столбцов элементами, заведомо большими по сравнению с элементами других столбцов

Определение 1: стратегия A_i доминирует стратегию A_j **игрока А**, если для любой стратегии B_k , $k = 1,\dots,n$ **игрока В**

$$F(A_i, B_k) \geq F(A_j, B_k).$$

Стратегия A_i - ***доминирующая***

Стратегия A_j - ***доминируемая***

Определение 2: стратегия B_i доминирует стратегию B_j **игрока В**, если для любой стратегии A_k , $k = 1,\dots,m$ **игрока А**

$$F(A_k, B_i) \leq F(A_k, B_j).$$

Пример:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	6	7	8
A_2	4	4	7	6
A_3	8	7	11	9
A_4	9	6	5	4

1) $A_1 \le A_3$, $A_2 \le A_3$. Вычеркиваем стратегии A_1, A_2.

Получаем $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2) $B_3 \ge B_4$, $B_1 \ge B_2$. Вычеркиваем стратегии B_1, B_3.

Получаем $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пусть дана платежная матрица $(a_{ij})_{m\times n}$.

Все элементы a_{ij} платежной матрицы можно сделать неотрицательными. Тогда цена игры γ также будет неотрицательной величиной $\gamma \geq 0$.

Обозначим искомые оптимальные стратегии $S_A^*(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ и $S_B^*(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

При этом $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ и $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$.

При нахождения $S_A^*(p_1, p_2, \dots, p_m)$ важно: эта стратегия дает A средний выигрыш, не меньше, чем цена игры $\gamma \geq 0$ при любой стратегии игрока B,

Получаем систему
$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \geq \gamma \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \geq \gamma \\ \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \geq \gamma \end{cases}.$$

Поделим каждое неравенство этой системы на γ и введем новые переменные

$x_i = p_i / \gamma$ для всех $i = 1, 2, \dots, m$.

Целевая функция: $Z = x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{p_1 + p_2 + ... + p_n}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \to \min$,

так как для игрока А цена игры находится как ***максимальный*** гарантированный выигрыш, а, следовательно, обратная ей величина должна исследоваться на *минимум*.

Система ограничений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \quad ... \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases}$.

Дополнительные условия, вытекающие из смысла переменной $\{x_i \geq 0 \ (i = 1,2,...,m)$

При нахождении оптимальной стратегии $S_B^*(q_1, q_2, \dots, q_n)$ для игрока В получаем **новую** ЗЛП. В системе

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \le \gamma \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \le \gamma \\ \dots \\ a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \dots + a_{nm}q_n \le \gamma \end{cases}$$

введем новые переменные $y_j = \dfrac{q_j}{\gamma}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$.

Целевая функция

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \to \max$$

исследуется на максимум, как обратная величина для проигрыша игрока В.

Система ограничений: $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \ldots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_n \le 1 \end{cases}.$

Дополнительные условия $\{y_j \ge 0 \ (j = 1,2,\ldots,n)$.

При решении приведенных ЗЛП видим, что они являются ***двойственными*** по отношении друг к другу.

1) $\min Z = \max F = 1/\gamma$.

2) Матрицы систем ограничений по отношению задач друг к другу получаются транспонированием.

3) Система ограничений ЗЛП-1 имеет неравенства со знаками $\geq$, в ЗЛП-2 , соответственно знаки в неравенствах системы ограничений $\leq$.

4) Число переменных одной задачи равно числу неравенств в системе ограничений другой ЗЛП.

Игры с природой

- *один из участников («природа») безразличен к результату игры;*
- *«природа» - совокупность внешних обстоятельств, в которых сознательному игроку приходится принимать решение*

Примеры:

1) выбор агрономической службой сельскохозяйственного предприятия участков для посева той или иной культуры в надежде получить в предстоящем году наилучший урожай;
2) определение объема выпуска сезонной продукции в ожидании наиболее выгодного для ее реализации уровня спроса;

Пассивный игрок:

1) природа;
2) уровень спроса;

1. **Критерий Вальда**

Стратегия выбирается из условия

$$\max_i (\min_j a_{ij})$$

и совпадает с нижней ценой игры. Активный игрок (А) исходит из предположения о том, что природа будет действовать наихудшим для него образом, поэтому данный критерий считается **пессимистическим.**

2.Критерий максимума

является **оптимистическим** и выбирается из условия

$$\max_i (\max_j a_{ij})$$

3. **Критерий Гурвица**

Стратегия определяется по формуле

$$\max_i (\alpha \cdot \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}), \quad 0 \le \alpha \le 1$$

α — степень оптимизма.

Критерий придерживается промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы.

При $\alpha = 0$ данный критерий можно заменить критерием максимума, а при $\alpha = 1$ — критерием Вальда.

Величина критерия зависит от степени ответственности игрока: чем она выше, тем ближе α к единице.

4. **Критерий Сэвиджа**.

Осуществляется выбор стратегии, не допускающей слишком высоких потерь. Для этого используется матрица рисков, элементы которой отражают убытки, которые понесет игрок А в том случае, если для каждого состояния природы не будет выбрано наилучшей стратегии.

Элементы матрицы рисков $R = \left(r_{ij}\right)$ находятся по формуле

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij} \quad ,$$

где $\max_i a_{ij}$ — максимальный элемент в столбце **j** исходной платежной матрицы. Оптимальная стратегия определяется выражением

$$r_{ij} = \min_i \left(\max_j a_{ij}\right)$$

5.1.Критерий Бейса относительно выигрышей

	П1	П2	…	Пn
A1	a11	a12	…	a1n
A2	a21	a22	…	a2n
…	…	…	…	…
Am	am1	am2	…	amn
qi	q1	q2	…	q3

- Показателем эффективности чистой стратегии игрока по критерию Бейса называется среднее значение выигрыша для данной стратегии

$$\bar{a}_i = \sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}$$

- Оптимальной по критерию Бейса относительно выигрышей является чистая стратегия с максимальным показателем эффективности

$$\bar{a}_i^0 = \max(\bar{a}_i) = \max\left(\sum_{j=1}^{n} q_j a_{ij}\right)$$

5.2. Критерий Бейса относительно рисков

Показателем неэффективности стратегии А относительно рисков называется среднее взвешенное значение рисков по этой стратегии

$$\bar{r}_i = \sum_{j=1}^{n} q_j r_{ij} \quad при \quad i = 1,2,\ldots, m$$

Оптимальной по критерию Бейса относительно рисков является стратегия с минимальным значением неэффективности

$$\bar{r}_i^{\,0} = \min \bar{r}_i$$

А/П	$П_1$	$П_2$	$П_3$	....	$П_n$
A_1	r_{11}	r_{12}	r_{13}	....	r_{1n}
A_2	r_{21}	r_{22}	r_{23}	....	r_{2n}
....	....	....	....	....	....
A_m	r_{m1}	r_{m2}	r_{m3}	....	r_{mn}
q_j	q_1	q_2	q_3	....	q_n

Предприятие может выпускать три вида верхней одежды пальто (A_1), куртки (A_2), ветровки (A_3). Прибыль от продаж товара каждого вида определяется состоянием спроса, на который существенное влияние оказывают погодные условия, которые могут быть представлены так: дожди (B_1), облачно (B_2), ясно (B_3). Зависимость дохода предприятия от вида продукции и погодных условий представлена в таблице (в млн. руб). Найти оптимальную стратегию работы предприятия по указанным критериям.

	Погодные условия		
Товар	дожди	облачно	ясно
Пальто	6	9	4
куртки	10	6	2
ветровки	1	2	8

Решение задачи

товар	дожди	облачно	ясно	Критерий Вальда $\max_i(\min_j a_{ij})$	Критерий максимума $\max_i(\max_j a_{ij})$	Критерий Гурвица $\max_i(\alpha \cdot \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij})$, α=0,7	Критерий Гурвица, α=0,3
Пальто	6	9	4	<u>4</u>	9	0,7*4+0,3*9=<u>5,5</u>	0,3*4+0,7*9=7,5
Куртки	10	6	2	2	<u>10</u>	0,7*2+0,3*10=4,4	0,3*2+0,7*10=<u>7,6</u>
ветровки	1	2	8	1	8	0,7*1+0,3*8=3,1	0,3*1+0,7*8=5,9

Решение задачи

товар	*дожди*	*облачно*	*ясно*		**Матрица рисков**			**Критерий Сэвиджа** $r_{ij} = \min_i (\max_j a_{ij})$
Пальто	**6**	**9**	**4**		**4**	**0**	**4**	$\underline{\mathbf{4}}$
Куртки	**10**	**6**	**2**		**0**	**3**	**6**	**6**
ветровки	**1**	**2**	**8**		**9**	**7**	**0**	**7**
	10	**9**	**8**		$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$			

Критерии Бейса

	П1	П2	П3	Средний риск
A1	4	0	4	**<u>1</u>**
A2	0	3	6	3,9
A3	9	7	0	3,9
q	0,2	0,3	0,5	

	П1	П2	П3	Средний выигрыш
A1	6	9	4	**<u>5,9</u>**
A2	10	6	2	4,8
A3	1	2	8	4,8
q	0,2	0,3	0,5	

Получение результата:

	Вальда	Максимума	Гурвица	Сэвиджа	Бейса
А1	*		*	*	**
А2		*	*		
А3					
Вывод: оптимальная стратегия А1.					