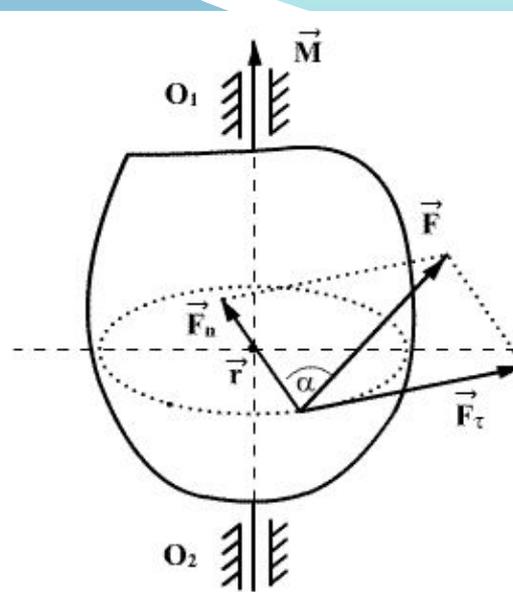
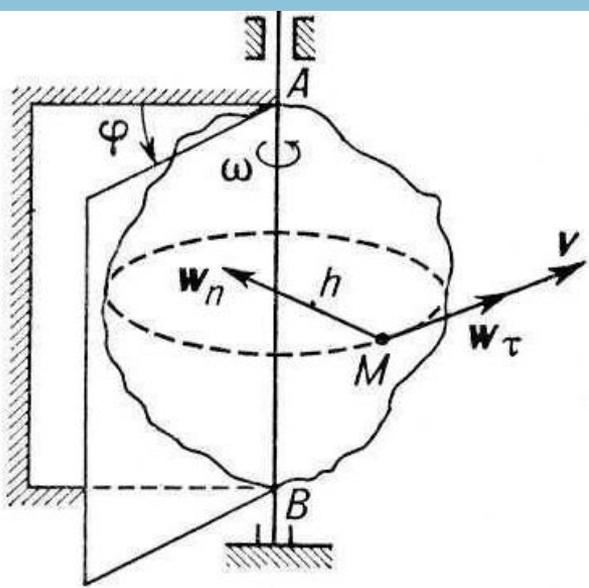


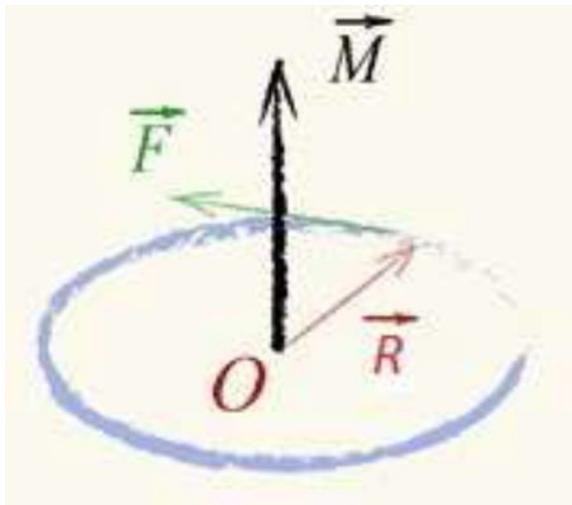
МЕХАНИКА

Лекция 4

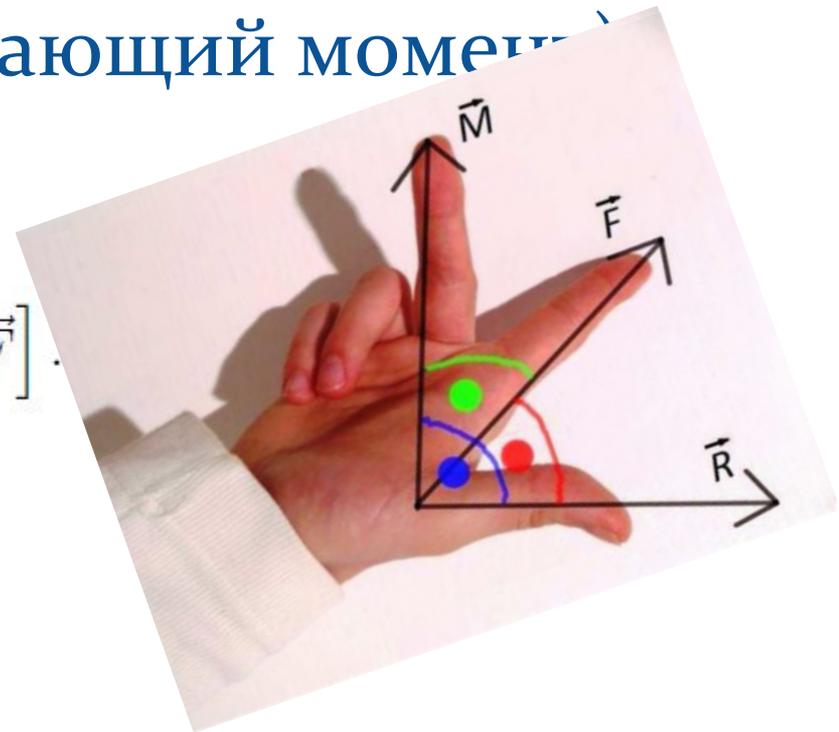
Вращательное движение тел



- Момент силы (вращающий момент)



$$\vec{M} = [\vec{R} \times \vec{F}]$$



- Момент импульса $\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}]$
 $L = p \cdot R = mvR = \omega mR^2 = I \cdot \omega.$
- Момент инерции $I = mR^2$
- 2-й закон динамики для вращательного движения $\dot{\vec{p}} = \vec{F} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \frac{\vec{M}}{\vec{R}} \Rightarrow \vec{R} \cdot \dot{\vec{p}} = \vec{M}$
 $\dot{\vec{L}} = \vec{M}.$
- Закон сохранения момента импульса:
 если $L = \text{const}$, то $M = 0$.

$$L = \omega mR^2 = \text{const}.$$



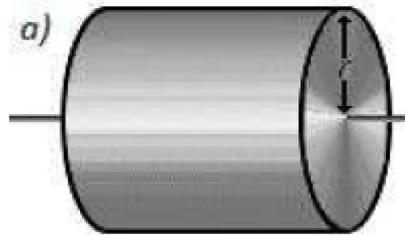
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ

МОМЕНТА ИМПУЛЬСА.

СКАМЬЯ ЖУКОВСКОГО

Моменты инерции некоторых тел:

- Сплошной однородный цилиндр



$$\frac{dm}{ds} = \frac{m}{s} \Rightarrow dm = \frac{m}{s} ds, \quad I = \int r^2 dm = \int r^2 \frac{m}{s} ds,$$

$$I = \int r^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} d(\pi r^2) = \int r^2 \cdot \frac{m}{\pi R^2} (2\pi r dr) = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr =$$

$$= \frac{2m}{R^2} \left(\frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{2m}{4R^2} \cdot (r^4) \Big|_0^R = \frac{mR^2}{2}.$$

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

Моменты инерции некоторых тел:

- Бесконечно тонкий диск

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

- Сплошной однородный шар

$$\frac{m}{V} = \frac{dm}{dv} \Rightarrow dm = m \frac{dV}{V}, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad I = \frac{2}{5}mR^2.$$

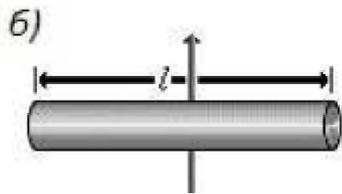
- Полый шар с тонкими стенками

$$I = \frac{2}{3}mR^2.$$

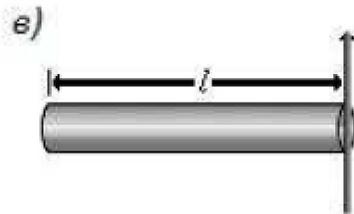
- Тонкое круглое кольцо

$$I = \frac{mR^2}{2}.$$

- Однородный тонкий диск



$$I_c = \frac{1}{12}ml^2,$$



$$I_a = \frac{1}{3}ml^2.$$

Моменты инерции некоторых тел:

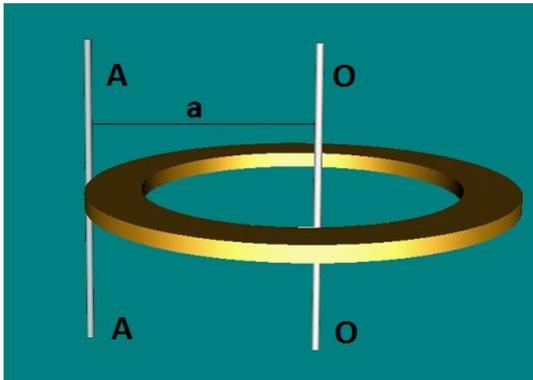
- Однородная прямоугольная пластина

$$I_x = \frac{1}{12}my^2, \quad I_y = \frac{1}{12}mx^2.$$

- Прямоугольный параллелепипед

$$\begin{cases} I_x = \frac{1}{12}m(y^2 + z^2) \\ I_y = \frac{1}{12}m(x^2 + z^2) \\ I_z = \frac{1}{12}m(x^2 + y^2). \end{cases}$$

- Теорема Гюйгенса-Штейнера $I_a = I_o + ma^2.$



- Кинетическая энергия вращающегося тела

$$E = \frac{mv^2}{2}. \quad E = \left(\frac{mv^2}{2}\right)_{\text{поступат.}} + \left(\frac{mv^2}{2}\right)_{\text{вращат.}} = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$$

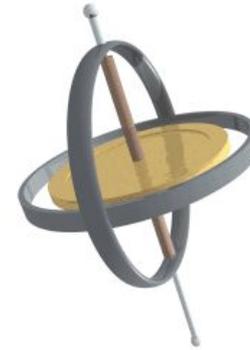
- Работа при вращении $dA = Fds \quad F = M/R$

$$dA = \frac{M}{R}Rd\varphi = Md\varphi \quad dA = Md\varphi \Rightarrow A = \int dA = \int Md\varphi.$$

- Мощность при вращении $P = \dot{A} = M\dot{\varphi} = M\omega.$

Трёхмерное вращение

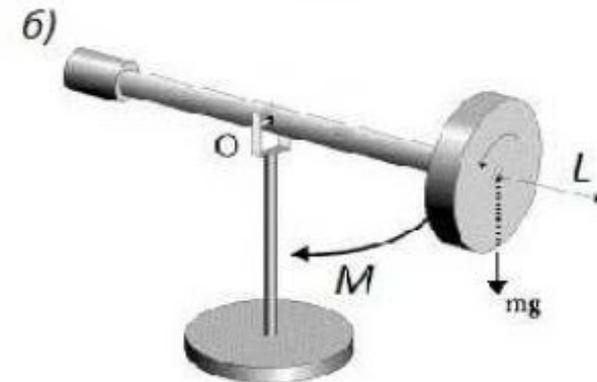
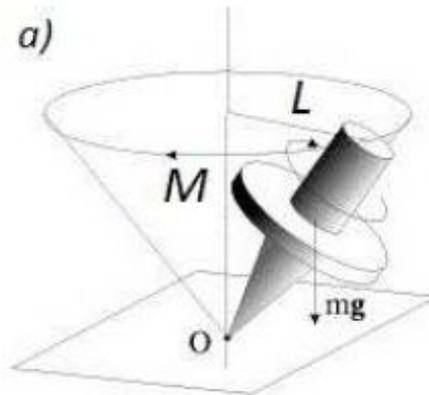
- Гироскоп

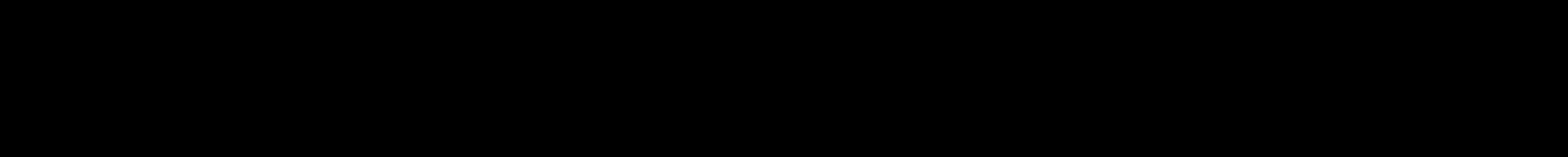
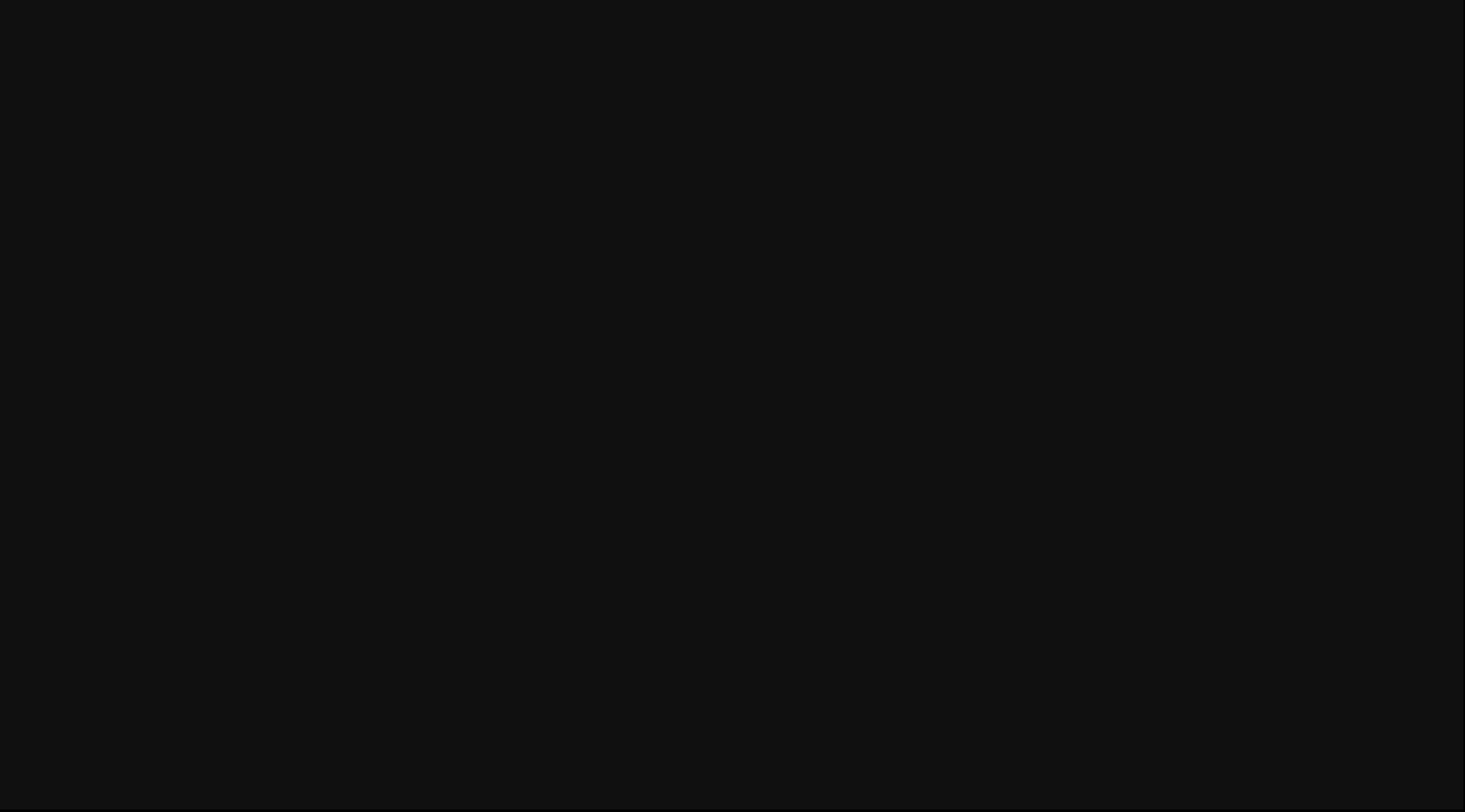


- Свойства гироскопа:

- Ось сохраняет положение в пр-ве,
- Прецессия оси.

$$\vec{M} = [\vec{L} \times m\vec{g}].$$







Спасибо за внимание