

# ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ (ДСВ)

Математическое ожидание, мода, медиана.

Для описания ДСВ иногда удобно пользоваться числовыми характеристиками: модой, медианой, математическим ожиданием, дисперсией и среднеквадратическим отклонением.

*Модой* ДСВ (будем обозначать  $M_0(X)$ ) называется такое значение дискретной случайной величины, вероятность которого наибольшая.  
Значение...

**Задача 2.3.** Ряд распределений выпадения грани при подбрасывании одного кубика имеет вид 1, 2, 3, 4, 5, 6, так как выпадение любой грани происходит с вероятностью  $\frac{1}{6}$ . Составить закон распределения ДСВ  $X$  и найти моду.

*Решение.* Закон распределения для ДСВ  $X$  задается таблицей, из которой видно, что у всех значений ДСВ вероятность одинакова. Значит, в этом случае мода не может быть указана.

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

В некоторых случаях ДСВ имеет не одну, а несколько мод.

**Задача 2.4.** По наблюдениям метеорологов, среднесуточная температура в первой половине февраля имела следующий ряд распределения: -18, -15, -18, -18, -15, -12, -12, -5, -10, -7, -12, -18, -20, -15, -12. Составить закон распределения ДСВ — среднесуточной температуры и найти моду.

*Решение.* Составим закон распределения ДСВ — среднесуточной температуры, ранжируя ее значения в порядке возрастания:

$x_i$	-20	-18	-15	-12	-10	-7	-5
$p_i$	1/15	4/15	3/15	4/15	1/15	1/15	1/15

В данном случае наибольшую вероятность  $p = 4/15$  имеют два значения ДСВ:  $x = -18$  и  $x = -12$ . Значит, мода ДСВ  $X$  равна  $Mo(X) = -12$  и  $Mo(X) = -18$ .

**Медианой** ДСВ (будем обозначать  $Me(X)$ ) называется среднее по положению в пространстве событий значение дискретной случайной величины.

Если ранжировать (упорядочить в порядке возрастания или убывания) ряд распределений ДСВ, то в ряду с нечетным количеством членов медиана есть значение ДСВ на «среднем месте».

Номер места  $n$  вычисляется по формуле

$$n = \frac{N + 1}{2}, \quad (2.4)$$

где  $N$  — количество (конечное) элементов в ряду распределений.

Если в ряду распределений четное число членов, то медианой являются два значения с номерами  $n - 0,5 = [N/2]$  и  $n + 0,5 = [N/2 + 1]$ . Так, большие пальцы рук являются пятым и шестым, если считать слева направо ( $N = 10$ ).

**Задача 2.5.** Учет производительности труда станочников цеха № 3 за смену задан рядом распределений:

Номер по списку	1	2	3	4	5	6	7	8
Производительность, дет./смену	52	52	53	54	56	57	57	57

Найти моду и медиану ДСВ  $X$ .

**Решение.** Мода (самая «модная» производительность труда) равна 57 (деталей за смену), значит,  $Mo(X) = 57$ .

Так как  $N = 8$ , то медиана вычисляется с помощью определения номера места  $n$  по формуле  $n = \frac{N + 1}{2} = \frac{8 + 1}{2} = 4,5$  тогда  $n - 0,5 = 4$ ,  $n + 0,5 = 5$ .

Среднее арифметическое значение ДСВ на четвертом и пятом местах  $\frac{54 + 56}{2} = 55$ , значит,  $Me(X) = 55$ .

**Математическим ожиданием** ДСВ называется сумма произведений значений случайной величины на их вероятности (обозначается  $M(X)$  или  $Mx$ ):

$$M(X) = \sum_i x_i p_i \quad (2.5)$$

в случае, если существует сумма  $M|x| = \sum_i |x_i| p_i$ .

Бытовой и практический смысл математического ожидания — это среднее значение ДСВ. Например, при некотором измерении (скажем, титровании) величины  $C$  было получено  $N$  результатов  $C_1, C_2, \dots, C_N$ . Если они относительно близко лежат:  $(C_{\max} - C_{\min})/C_{\min} \ll 1$ , т.е. нет грубых промахов, то все полученные результаты равновероятны:  $p_k = 1/N = p$ ; тогда математическое ожидание ДСВ  $C$  равно  $M(C) = \sum_{k=1}^N C_k p_k = p \sum_{k=1}^N C_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N C_k$ , т.е. среднему арифметическому. Аналогично среднее значение некоторой функции  $f$  от ДСВ  $X$  вычисляется по формуле

$$Mf(X) = \sum_i f(x_i) p_i. \quad (2.6)$$

Если ДСВ задана законом распределения с конечным числом элементов:

$X_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_{n-1}$	$x_n$
$p_i$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	...	$p_{n-1}$	$p_n$

то математическое ожидание  $M(X)$  находится по формуле

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^n x_i p_i.$$

**Пример 2.1** [«петербургская игра», см. прил. 2(6)]. Игрок подбрасывает монету (если выпадает орел, то он выигрывает 1 р., при очередном бросании он выигрывает в два раза больше) до тех пор, пока не выпадает решка. На этом игра прекращается.

Вычислим математическое ожидание *выигрыша*:  $x_1 = 1, p_1 = \frac{1}{2}$ ;

$$x_2 = 2, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{8}, \dots, x_n = 2^{n-1}, p_n = \frac{1}{2^n}.$$

$$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty. \text{ Таким образом, невоз-}$$

можно определить даже разумные взносы участников игры.

**Задача 2.6.** Из 100 лотерейных билетов в тридцати выигрыш составляет 100 тыс. р., в десяти — 200 тыс. р., в пяти — 300 тыс. р., в одном — 1 млн р. Найти числовые характеристики выигрыша.

**Решение.** Случайная величина  $X$  — выигрыш — принимает значения  $x_1 = 0, x_2 = 100$  тыс. р.,  $x_3 = 200$  тыс. р.,  $x_4 = 300$  тыс. р.,  $x_5 = 1$  млн р.

Вероятность того, что СВ  $X$  принимает соответственно значения:

$$p_1 = \frac{54}{100} = 0,54; p_2 = \frac{30}{100} = 0,3; p_3 = \frac{10}{100} = 0,1;$$

$$p_4 = \frac{5}{100} = 0,05; p_5 = \frac{1}{100} = 0,01.$$

Тогда закон распределения этой ДСВ имеет вид:

$x_i$	0	100 тыс.	200 тыс.	300 тыс.	1 млн
$p_i$	0,54	0,30	0,10	0,05	0,01

Числовые характеристики выигрыша:

1)  $M_0 = 0$ , так как наибольшая вероятность  $p = 0,54$  (отсюда поговорка «в азартные игры с государством не играю», очень велика вероятность проигрыша). Антимода равна 1 млн;

2)  $M_e = 200$  тыс. — «идеальное равновесие» находится на третьем месте. Но эти характеристики не отвечают на вопрос: «Каков ожидаемый выигрыш?»;

3)  $M(X) = 0 \cdot 0,54 + 100 \text{ тыс. р.} \cdot 0,3 + 200 \text{ тыс. р.} \cdot 0,1 + 300 \text{ тыс. р.} \cdot 0,05 + 1\,000 \text{ тыс. р.} \cdot 0,01 = 75 \text{ тыс. р.}$  — это и есть среднее значение выигрыша, поэтому лотерейный билет должен стоить никак не меньше 75 тыс. р.

*Свойства математического ожидания:*

1) математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной  $M(C) = C = \text{const}$ ;

2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(kX) = kM(X), \quad k = \text{const};$$

3) математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий:  $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$ ;

4) математическое ожидание произведения *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий:  $M(XY) = M(X)M(Y)$ .

**Задача 2.7.** Найти математическое ожидание случайной величины  $Y = 5X + 9$ , если известно, что  $M(X) = 2,5$ .

*Решение.* Зная свойства математического ожидания, имеем:

$$\begin{aligned} M(Y) &= M(5X + 9) = M(5X) + M(9) = 5M(X) + 9 = 5 \cdot 2,5 + 9 = \\ &= 7,5 + 9 = 16,5. \end{aligned}$$

# Решить задачи:

## 2.1. Решите задачи.

Случайная величина  $X$  задана рядом распределения.

1) •

$x_i$	3	5	7	11	12
$p_i$	0,14	0,20	0,39	0,17	?

4)

$x_i$	2	4	6	8	9
$p_i$	0,23	0,17	0,18	0,25	?

г) определите числовые характеристики ДСВ  $X$ : моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.