ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ (ДСВ)

Математическое ожидание, мода, медиана.

Для описания ДСВ иногда удобно пользоваться числовыми характеристиками: модой, медианой, математическим ожиданием, дисперсией и среднеквадратическим отклонением.

Модой ДСВ (будем обозначать Mo(X)) называется такое значение дискретной случайной величины, вероятность которого наибольшая.

Задача 2.3. Ряд распределений выпадения грани при подбрасывании одного кубика имеет вид 1, 2, 3, 4, 5, 6, так как выпадение любой грани происходит с вероятностью $\frac{1}{6}$. Составить закон распределения ДСВ X и найти моду.

Решение. Закон распределения для ДСВ X задается таблицей, из которой видно, что у всех значений ДСВ вероятность одинакова. Значит, в этом случае мода не может быть указана.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

В некоторых случаях ДСВ имеет не одну, а несколько мод.

Задача 2.4. По наблюдениям метеорологов, среднесуточная температура в первой половине февраля имела следующий ряд распределения: –18, –15, –18, –18, –15, –12, –12, –5, –10, –7, –12, –18, –20, –15, –12. Составить закон распределения ДСВ — среднесуточной температуры и найти моду.

Решение. Составим закон распределения ДСВ — среднесуточной температуры, ранжируя ее значения в порядке возрастания:

x_i	–20	–18	–15	–12	–10	–7	–5
p_i	1/15	4/15	3/15	4/15	1/15	1/15	1/15

В данном случае наибольшую вероятность $p = 4/15$ имеют два значения ДСВ: $x = -18$ и $x = -12$. Значит, мода ДСВ X равна $\mathrm{Mo}(X) = -12$ и $\mathrm{Mo}(X) = -18$.

Медианой ДСВ (будем обозначать $\mathrm{Me}(X)$) называется среднее по положению в пространстве событий значение дискретной случайной величины.

Если ранжировать (упорядочить в порядке возрастания или убывания) ряд распределений ДСВ, то в ряду с нечетным количеством членов медиана есть значение ДСВ на «среднем месте».

Номер места n вычисляется по формуле

$$n = \frac{N+1}{2}, \tag{2.4}$$

где N — количество (конечное) элементов в ряду распределений.

Если в ряду распределений четное число членов, то медианой являются два значения с номерами $n - 0{,}5 = [N/2]$ и $n + 0{,}5 = [N/2 + 1]$. Так, большие пальцы рук являются пятым и шестым, если считать слева направо ($N = 10$).

Задача 2.5. Учет производительности труда станочников цеха № 3 за смену задан рядом распределений:

Номер по списку	1	2	3	4	5	6	7	8
Производительность, дет./смену	52	52	53	54	56	57	57	57

Найти моду и медиану ДСВ X.

Решение. Мода (*самая «модная»* производительность труда) равна 57 (деталей за смену), значит, $\mathrm{Mo}(X) = 57$.

Так как $N = 8$, то медиана вычисляется с помощью определения номера места n по формуле $n = \frac{N+1}{2} = \frac{8+1}{2} = 4{,}5$ тогда $n - 0{,}5 = 4$, $n + 0{,}5 = 5$.

Среднее арифметическое значение ДСВ на четвертом и пятом местах $\frac{54+56}{2} = 55$, значит, $\mathrm{Me}(X) = 55$.

Математическим ожиданием ДСВ называется сумма произведений значений случайной величины на их вероятности (обозначается $M(X)$ или Mx):

$$M(X) = \sum_i x_i p_i \tag{2.5}$$

в случае, если существует сумма $M|x| = \sum_i |x_i| p_i$.

Бытовой и практический смысл математического ожидания — это среднее значение ДСВ. Например, при некотором измерении (скажем, титровании) величины C было получено N результатов $C_1, C_2, \ldots, C_N$. Если они относительно близко лежат: $(C_{max} - C_{min})/C_{min} \ll 1$, т.е. нет грубых промахов, то все полученные результаты равновероятны: $p_k = 1/N = p$; тогда математическое ожидание ДСВ C равно $M(C) = \sum_{k=1}^{N} C_k p_k = p \sum_{k=1}^{N} C_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} C_k$, т.е. среднему арифметическому. Аналогично среднее значение некоторой функции f от ДСВ X вычисляется по формуле

$$Mf(X) = \sum_i f(x_i) p_i. \tag{2.6}$$

Если ДСВ задана законом распределения с конечным числом элементов:

X_i	x_1	x_2	x_3	…	x_{n-1}	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	…	p_{n-1}	p_n

то математическое ожидание $M(X)$ находится по формуле

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Пример 2.1 [*«петербургская игра»*, см. прил. 2(6)]. Игрок подбрасывает монету (если выпадает орел, то он выигрывает 1 р., при очередном бросании он выигрывает в два раза больше) до тех пор, пока не выпадает решка. На этом игра прекращается.

Вычислим математическое ожидание *выигрыша*: $x_1 = 1$, $p_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 2$, $p_2 = \frac{1}{4}$, $p_3 = \frac{1}{8}$, ..., $x_n = 2^{n-1}$, $p_n = \frac{1}{2^n}$.

$M(X) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$. Таким образом, невозможно определить даже разумные взносы участников игры.

Задача 2.6. Из 100 лотерейных билетов в тридцати выигрыш составляет 100 тыс. р., в десяти — 200 тыс. р., в пяти — 300 тыс. р., в одном — 1 млн р. Найти числовые характеристики выигрыша.

Решение. Случайная величина X — выигрыш — принимает значения $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ тыс. р., $x_3 = 200$ тыс. р., $x_4 = 300$ тыс. р., $x_5 = 1$ млн р.

Вероятность того, что СВ X принимает соответственно значения:

$$p_1 = \frac{54}{100} = 0{,}54;\ p_2 = \frac{30}{100} = 0{,}3;\ p_3 = \frac{10}{100} = 0{,}1;$$

$$p_4 = \frac{5}{100} = 0{,}05;\ p_5 = \frac{1}{100} = 0{,}01.$$

Тогда закон распределения этой ДСВ имеет вид:

x_i	0	100 тыс.	200 тыс.	300 тыс.	1 млн
p_i	0,54	0,30	0,10	0,05	0,01

Числовые характеристики выигрыша:

1) Mo = 0, так как наибольшая вероятность $p = 0{,}54$ (отсюда поговорка «в азартные игры с государством не играю», очень велика вероятность проигрыша). Антимода равна 1 млн;

2) Me = 200 тыс. — «идеальное равновесие» находится на третьем месте. Но эти характеристики не отвечают на вопрос: «Каков ожидаемый выигрыш?»;

3) $M(X) = 0 \cdot 0{,}54 + 100$ тыс. р. $\cdot\ 0{,}3 + 200$ тыс. р. $\cdot\ 0{,}1 + 300$ тыс. р. $\times\ 0{,}05 + 1\,000$ тыс. р. $\cdot\ 0{,}01 = 75$ тыс. р. — это и есть среднее значение выигрыша, поэтому лотерейный билет должен стоить никак не меньше 75 тыс. р.

Свойства математического ожидания:

1) математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной $M(C) = C = \text{const}$;

2) постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(kX) = kM(X),\ k = \text{const};$$

3) математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий: $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

4) математическое ожидание произведения *независимых* случайных величин равно произведению их математических ожиданий: $M(XY) = M(X)M(Y)$.

Задача 2.7. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 5X + 9$, если известно, что $M(X) = 2,5$.

Решение. Зная свойства математического ожидания, имеем:

$$M(Y) = M(5X + 9) = M(5X) + M(9) = 5M(X) + 9 = 5 \cdot 2,5 + 9 =$$
$$= 7,5 + 9 = 16,5.$$

Решить задачи:

2.1. *Решите задачи.*

Случайная величина X задана рядом распределения.

1)

x_i	3	5	7	11	12
p_i	0,14	0,20	0,39	0,17	?

4)

x_i	2	4	6	8	9
p_i	0,23	0,17	0,18	0,25	?

г) определите числовые характеристики ДСВ X: моду, медиану, математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение.