Теория функций комплексных переменных

Комплексные числа и переменные.

Рассмотрим множество, элементами которого являются все упорядоченные пары действительных чисел.

<u>Определение1</u>.Комплексным числом z называется упорядоченная пара действительных чисел a и b : $z = (a, b)$, для которых определены операции сложения и умножения.

Например, $z_1 = (2, 3)$, $z_2 = (5, 7)$.

Число a этой пары называется действительной частью комплексного числа z и обозначается $\mathrm{Re} z = a$, число b -мнимой частью числа z и обозначается $\mathrm{Im} z = b$.

Например, для комплексных чисел $z_1 = (2, 3)$, $z_2 = (5, 7)$ имеем $\mathrm{Re} z_1 = 2,\ \mathrm{Re} z_2 = 5,\ \mathrm{Im} z_1 = 3,\ \mathrm{Im} z_2 = 7$

<u>Определение 2</u>. Комплексные числа $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$ считаются равными тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$, то есть когда равны действительные и мнимые части.

<u>Определение 3.</u>Суммой комплексных чисел $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$ называется комплексное число $z = (a_1 + a_2;\ b_1 + b_2)$.

Определение 4. **Разностью** двух комплексных чисел $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$ называется комплексное число $z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2; b_1 - b_2)$, обладающее свойством $z + z_2 = z_1$.

Определение 5. **Произведением** комплексных чисел $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$ называется комплексное число $z = (a_1 a_2 - b_1 b_2; a_1 b_2 + b_1 a_2)$.

Определение 6. Комплексные числа вида $(a; 0)$ называют **действительным**.

Определение 7. Комплексные числа вида $(0; b)$ называют **мнимыми**.

Определение 8. Число $(0; 1)$ называют **мнимой единицей** и для его обозначения используют букву i, то есть $(0; 1) = i$.

Произвольное мнимое число $(0; b)$ можно представить в виде произведения чисел $(b; 0)$ и $(0; 1)$, то есть
$(0; b) = (b; 0)\,(0; 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1; b \cdot 1 + 0 \cdot 0)$.

Так как $(b; 0) = b$ и $(0; 1) = i$, то мнимое число $(0; b)$ записывают в виде bi.

Например, $(0; 2) = 2i$, $(0; -1) = -i$.

Определение 9. Два комплексных числа $z = (a, b)$ и $\bar{z} = (a; -b)$, имеющие одинаковые действительные и противоположные мнимые части, называют **сопряженными** комплексными числами.

Определение 10. **Частным** комплексных чисел $z_1 = (a_1; b_1)$ и $z_2 = (a_2; b_2)$, где $z_2 \neq 0$, называется комплексное число $z = (a; b)$, обладающее свойством $z_2 \cdot z = z_1$. Тогда $z = \frac{z_1}{z_2}$.

Алгебраическая форма записи комплексного числа. Операции над комплексными числами.

Запись комплексного числа $z = (x, y)$ в виде $z = x + iy$ называется **алгебраической** формой записи комплексных чисел.

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + y\,(0, 1) = x + iy.$$

Число $\bar{z} = x - iy$ - **комплексно сопряженное** с числом $z = x + iy$.

1. Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

2. **Суммой** чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$.

Положив $x_1 = x_2 = 0, y_1 = y_2 = 1$, получим важное соотношение $i \cdot i = -1$ или $i^2 = -1$.

3. **Произведением** чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i(x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$.

Операции сложения и умножения обладают следующими свойствами:

1. *Коммутативность сложения*:
$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, для любых комплексных чисел z_1, z_2

2. *Ассоциативность сложения*:
$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$,для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3

3. $z + 0 = z$ для любого комплексного числа z

4. *Коммутативность умножения*:
$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, для любых комплексных чисел z_1, z_2

5. *Ассоциативность умножения*:
$(z_1 \cdot z_2)\, z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$,для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3

6. *Дистрибутивный закон*
$z_1\,(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$,для любых комплексных чисел z_1, z_2, z_3

7. $1 \cdot z = z$ для любых комплексных чисел z

4.**Разностью**любых комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется комплексное число z такое, что $z_1 + z = z_2$.

5. Для любых комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, где $z_1 \neq 0$, существует число z такое, что $z_1 \cdot z = z_2$. Это число называется **частным** комплексных чисел z_2 и z_1 обозначается $z = \frac{z_2}{z_1}$.

При нахождении частного комплексных чисел удобно использовать следующую формулу:

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{z_2 \cdot \bar{z}_1}{z_1 \cdot \bar{z}_1} = \frac{(x_2+iy_2)\cdot(x_1-iy_1)}{(x_1+iy_1)\cdot(x_1-iy_1)} = \frac{(x_2+iy_2)\cdot(x_1-iy_1)}{x_1^2+y_1^2},$$

то есть умножить числитель и знаменатель дроби $\frac{z_2}{z_1}$ на число $\bar{z}_1$ сопряженное знаменателю z_1.

Пример 1

Сложить два комплексных числа $z_1 = 1+3i$, $z_2 = 4-5i$

Для того чтобы сложить два комплексных числа нужно сложить их действительные и мнимые части:
$z_1 + z_2 = 1+3i+4-5i = 5-2i$

Пример 2

Найти разности комплексных чисел $z_1 - z_2$ и $z_2 - z_1$, если $z_1 = -2+i$, $z_2 = \sqrt{3}+5i$

Действие аналогично сложению, единственная особенность состоит в том, что вычитаемое нужно взять в скобки, а затем – стандартно раскрыть эти скобки со сменой знака:

$z_1 - z_2 = -2+i-(\sqrt{3}+5i) = -2+i-\sqrt{3}-5i = -2-\sqrt{3}-4i$

Результат не должен смущать, у полученного числа две, а не три части. Просто действительная часть – составная: $-2-\sqrt{3}$. Для наглядности ответ можно переписать так: $z_1 - z_2 = (-2-\sqrt{3})-4i$.

Рассчитаем вторую разность:
$z_2 - z_1 = \sqrt{3}+5i-(-2+i) = \sqrt{3}+5i+2-i = 2+\sqrt{3}+4i$
Здесь действительная часть тоже составная: $2+\sqrt{3}$

Чтобы не было какой-то недосказанности, приведу короткий пример с «нехорошей» мнимой частью: $-1+\sqrt{2}i+7-3i = 6+(\sqrt{2}-3)i$. Вот здесь без скобок уже не обойтись.

Пример 3

Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 6i$

$$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(3+6i) = 1 \cdot 3 - i \cdot 3 + 1 \cdot 6i - i \cdot 6i = 3 - 3i + 6i + 6 = 9 + 3i$$

Надеюсь, всем было понятно, что $-i \cdot 6i = -6i^2 = -6 \cdot (-1) = +6$

Пример 4

Даны комплексные числа $z_1 = 13 + i$, $z_2 = 7 - 6i$. Найти частное $\frac{z_1}{z_2}$.

Составим частное:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13+i}{7-6i}$$

Деление чисел осуществляется **методом умножения знаменателя и числителя на сопряженное знаменателю выражение**.

Согласно правилу, знаменатель нужно умножить на $7+6i$, и, чтобы ничего не изменилось, домножить числитель на то же самое число $7+6i$:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}$$

Далее в числителе нужно раскрыть скобки (перемножить два числа по правилу, рассмотренному в предыдущем пункте). А в знаменателе воспользоваться формулой $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ (помним, что $i^2=-1$ и не путаемся в знаках!!!).

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(13+i)(7+6i)}{(7-6i)(7+6i)}=\frac{91+7i+78i+6i^2}{7^2-(6i)^2}=\frac{91+7i+78i-6}{49-(-36)}=$$

$$=\frac{85+85i}{49+36}=\frac{85+85i}{85}=1+i$$

Комплексная плоскость. Модуль комплексного числа.

Рассмотрим прямоугольную систему координат на плоскости. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ поставим в соответствие точку $M\,(x, y)$ координатной плоскости,то есть точку, абсцисса которой равна $\operatorname{Re} z = x$, а ордината равна $\operatorname{Im} z = y$.

Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между множеством комплексных чисел и точками плоскости, на которой выбрана система координат.

Определение 1. Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью** и обозначается символом $\mathbb{C}$.

Ось абсцисс называется **действительной осью** ,так как на ней расположены точки, соответствующие комплексным числам $x + 0 \cdot i$, то есть соответствующие действительным числам. Ось ординат называется **мнимой осью** - на ней лежат точки, соответствующие мнимым комплексным числам $0 + i \cdot y$.

Не менее важной и удобной является интерпретация комплексного числа $z = x + iy$ как вектора $\overline{OM}$.

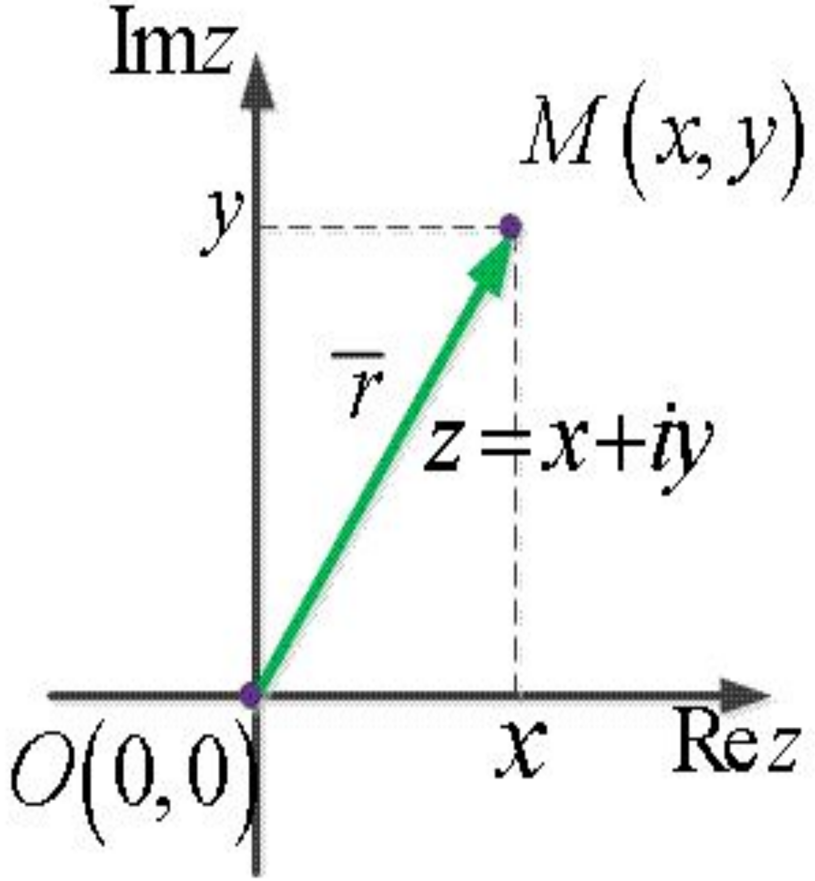


Рис. 1

Каждому вектору плоскости с началом в точке $O\left(0,0\right)$ и концом в точке $M\left(x,y\right)$ соответствует комплексное число $z=x+iy$ и наоборот (см. рис. 1).

Определение 2.Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется длина вектора $\bar{r}$,соответствующего этому числу. Модуль обозначается $|z| = r$.
Модуль $|z| = r$ однозначно определяется по формуле $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Пример 1. Найти модуль комплексного числа $z = 3 - 4i$.

Решение.

По формуле $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, учитывая, что $x = 3, y = -4$ находим модуль комплексного числа $|z| = r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Пример 2. Найти модуль комплексного числа $z = 4i$.

Решение.

По формуле $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$, учитывая, что $x = 0, y = 4$ находим модуль комплексного числа $|z| = r = \sqrt{0 + 4^2} = \sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4$.

Геометрический смысл комплексных чисел.

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Им соответствуют векторы с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) . Тогда числу

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$$

будет соответствовать вектор с координатами $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Таким образом, чтобы найти вектор, соответствующий сумме комплексных чисел z_1 и z_2, надо сложить векторы, отвечающие комплексным числам z_1 и z_2.

Аналогично, разности $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 соответствует разность векторов, соответствующих числам z_1 и z_2.

Модуль $|z_2 - z_1|$ разности двух комплексных чисел z_2 и z_1 по определению модуля - длина вектора $z_2 - z_1$. Построим этот вектор, как сумму двух векторов z_2 и $(-z_1)$.

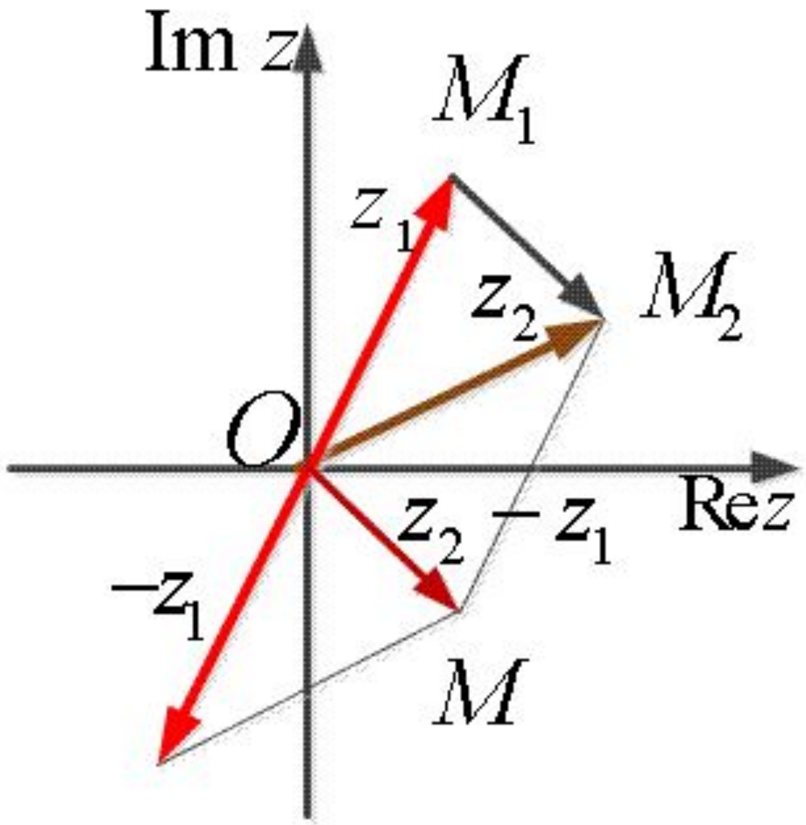


Рис. 1

Получим вектор $\overline{OM}$, равный вектору $\overline{M_1M_2}$. Следовательно, $|z_2 - z_1|$ есть длина вектора $\overline{M_1M_2}$, то есть модуль разности двух комплексных чисел - это расстояние между точками комплексной плоскости, которые соответствуют этим числам (см. рис. 1).

Полученное геометрическое изображение комплексных чисел позволяет геометрически представлять различные числовые множества (то есть множества, состоящие из комплексных чисел).

Пример 1. Пусть a и b фиксированные действительные числа. Тогда множество комплексных чисел, действительная часть которых равна a , $(\mathrm{Re}\ z = a)$ изображается множеством точек плоскости, абсциссы которых равны a, то есть прямой линией $x = a$, параллельной оси ординат (см. рис. 2).

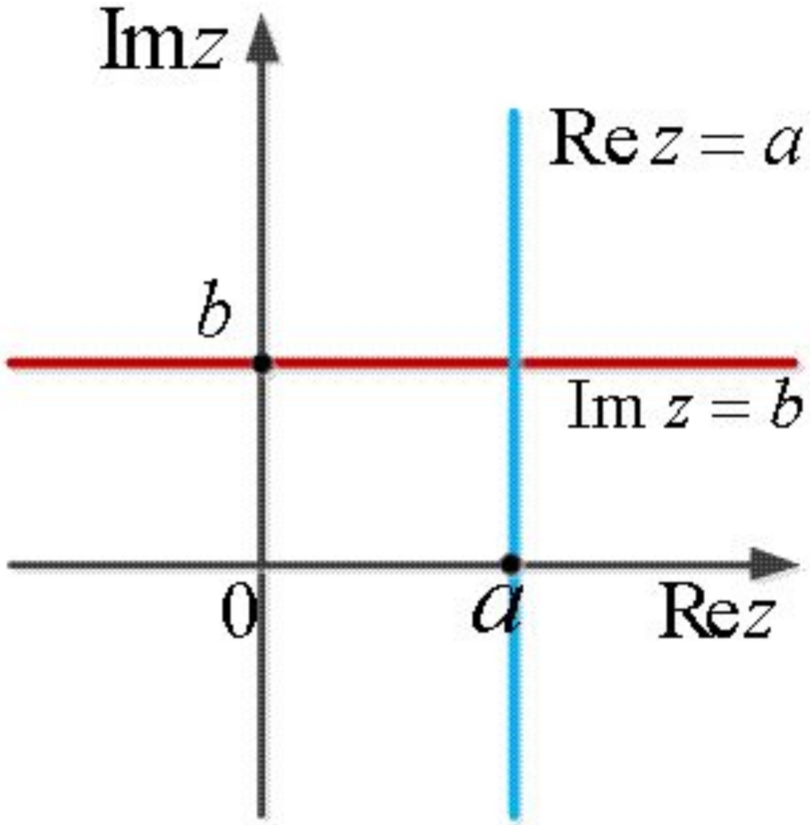


Рис. 2.

Аналогично множество комплексных чисел, у которых мнимая часть равна b , $(\mathrm{Im}\ z = b)$ изображается прямой $y = b$.

Пример 2. Неравенства $a < \operatorname{Re} z < b$ выделяют на комплексной плоскости вертикальную полосу, заключенную между прямыми $\operatorname{Re} z = a$ и $\operatorname{Re} z = b$, то есть между прямыми $x = a$ и $x = b$, причем граничные прямые в эту полосу не включаются.

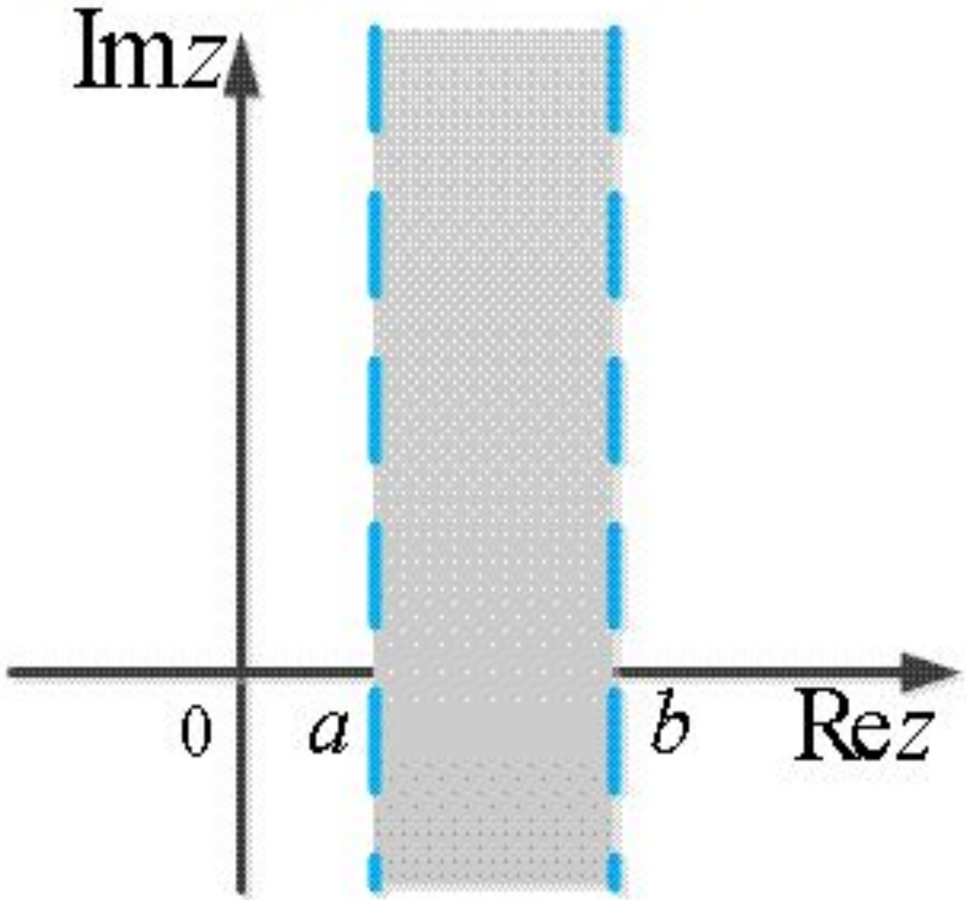


Рис. 3.

Неравенства $c \leq \operatorname{Im} z \leq d$, где $c < d$, выделяют горизонтальную полосу, заключенную между прямыми $y = c$ и $y = d$ и содержащую эти прямые (см. рис. 4).

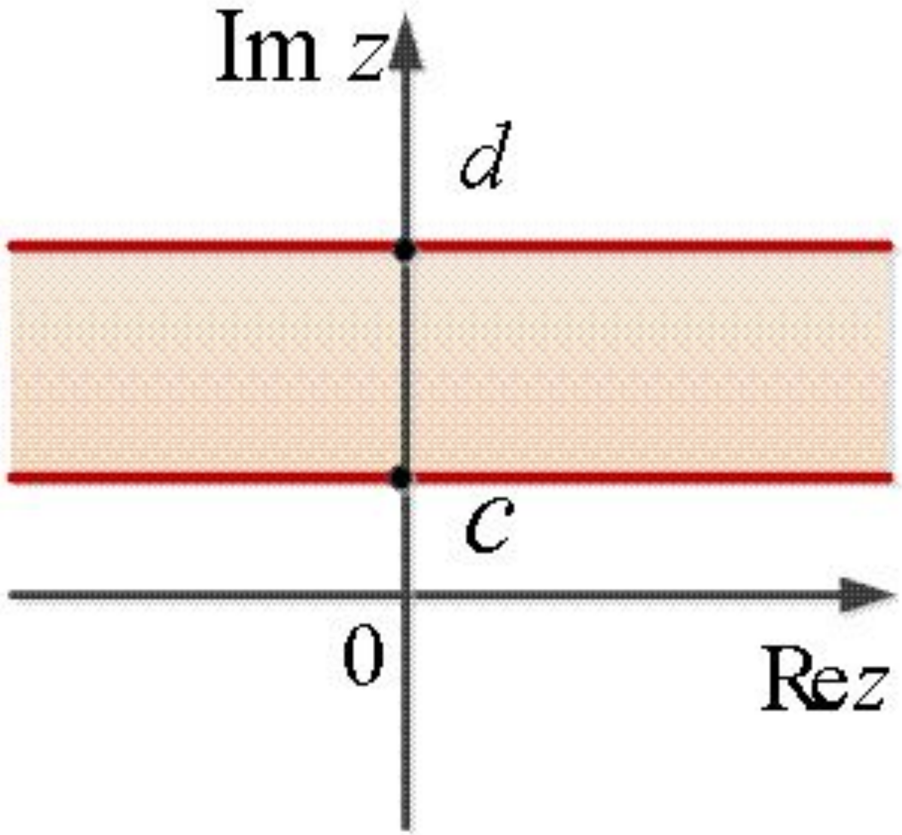


Рис. 4

Пример 3. Пусть R - положительное число. Так как $z = x + iy$ имеем: $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, то равенство $z \cdot \bar{z} = R^2$ задает множество точек $M\,(x; y)$ на плоскости, для которых $x^2 + y^2 = R^2$, то есть окружность с центром в начале координат и радиусом R (см. рис. 5).

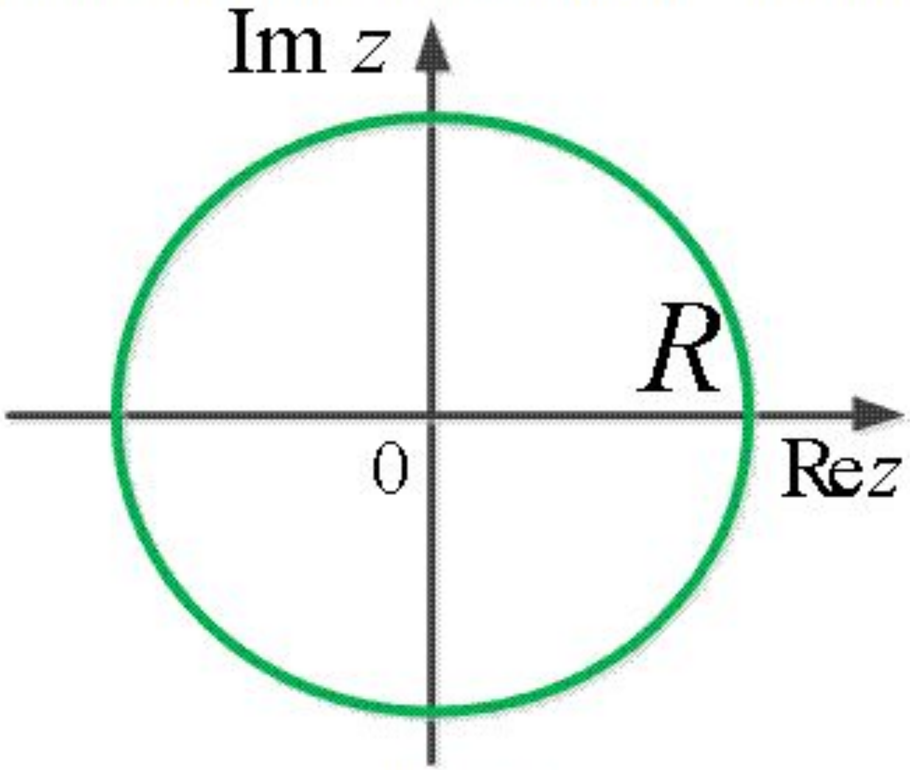


Рис. 5

Пример 4. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $|z-i|=2$.

Решение.

Пусть $z=x+iy$, тогда $|z-i|=|x+iy-i|=|x+i(y-1)|$, таким образом имеем $|x+i(y-1)|=2$. По определению модуля вектора получим $\sqrt{x^2+(y-1)^2}=2$, далее избавляемся от корня $x^2+(y-1)^2=4$. Получили уравнение окружности с центром в точке с координатами $(0,1)$ и радиусом $R=2$ (см. рис. 6).

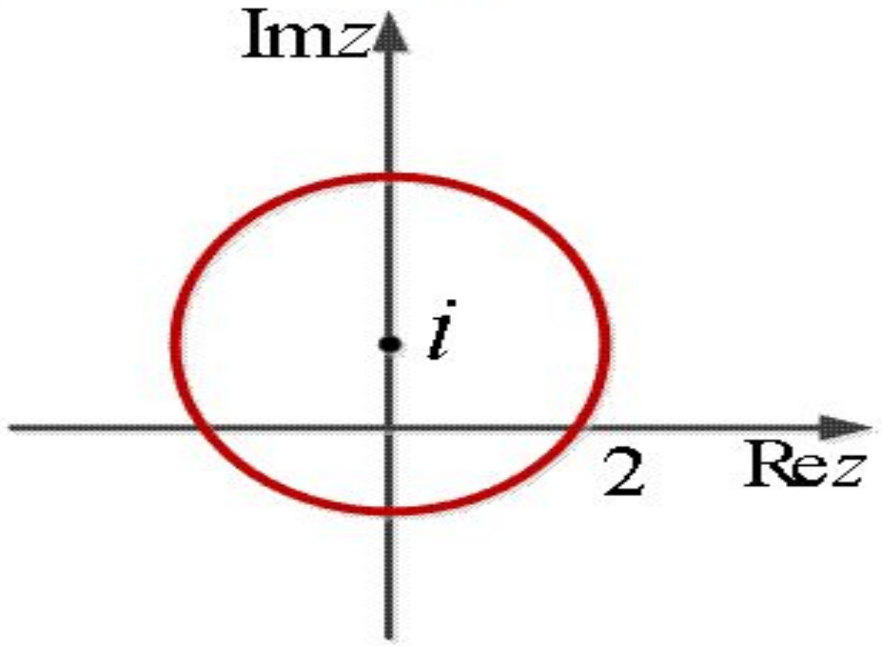


Рис. 6

Таким образом, условию $|z-i|=2$ удовлетворяют те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки i на расстояние, равное 2. Такие точки лежат на окружности с центром в точке $(0,1)$ и радиусом $R=2$.

Пример 5. Найти множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию: $1 < |z + 2 + i| < 2$.

Решение.
Пусть $z = x + iy$, тогда $|x + iy + 2 + i| = |x + 2 + i(y + 1)|$.
По определению модуля вектора имеем $\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = 1$ и $\sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = 2$,
избавляясь от корней получим уравнения окружностей $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$ и $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$, центры которых расположены в точке $(-2, -1)$.

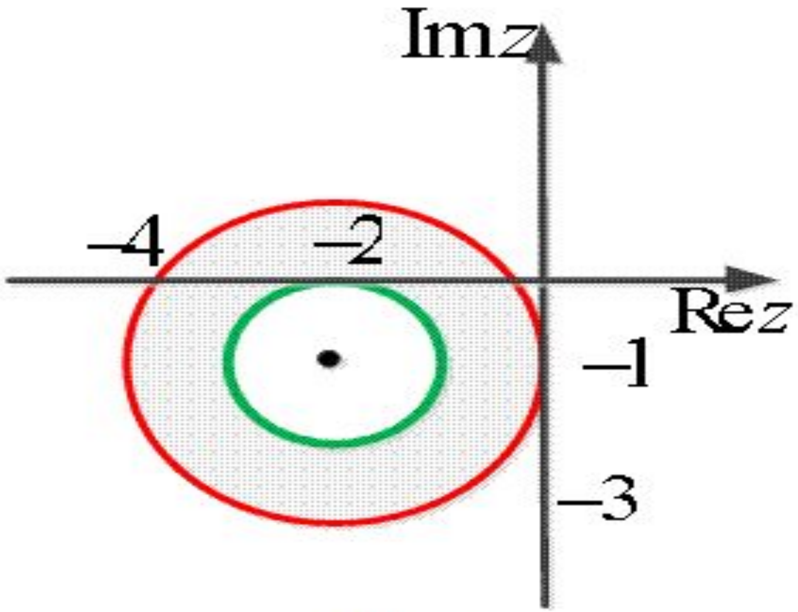


Рис. 7

Таким образом, условию $1 < |z + 2 + i| < 2$ удовлетворяют те точки комплексной плоскости, которые удалены от точки $(-2 - i)$ на расстояние, больше 1 , но меньше 2. Такие точки расположены внутри кольца, образованного двумя полученными концентрическими окружностями с центром в точке $(-2, -1)$ и радиусами $R_1 = 1$ и $R_2 = 2$ (см. рис. 7).

Добавим к множеству комплексных чисел еще одно число, обозначаемое символом ∞, которое называется **бесконечно удаленной точкой**.

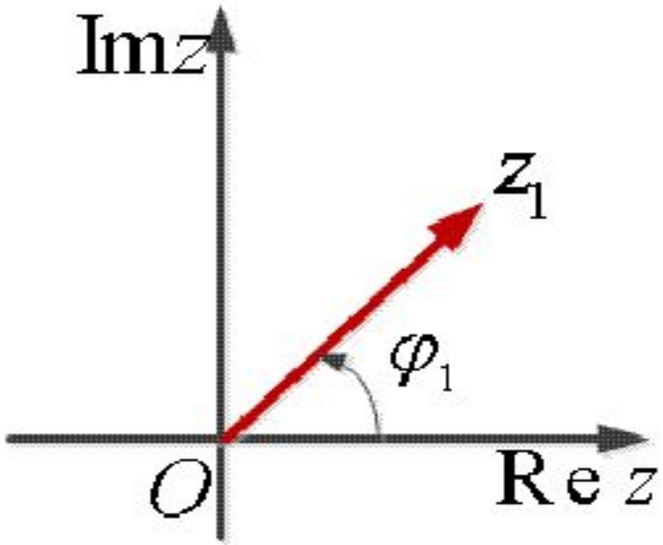
Определение 1. Комплексную плоскость $\mathbb{C}$ вместе с бесконечно удаленной точкой $z = \infty$ называют **расширенной комплексной плоскостью** и обозначают $\overline{\mathbb{C}}$.

Аргументы комплексного числа.

Определение 1. **Аргументом** комплексного числа $z \neq 0$ называется величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором z.

Причем величина угла считается положительной, если отсчет ведется против часовой стрелки, и отрицательной, если отсчет производится по часовой стрелке (см. рис. 1 и 2).

Аргумент комплексного числа обозначается $\varphi = Arg\, z$



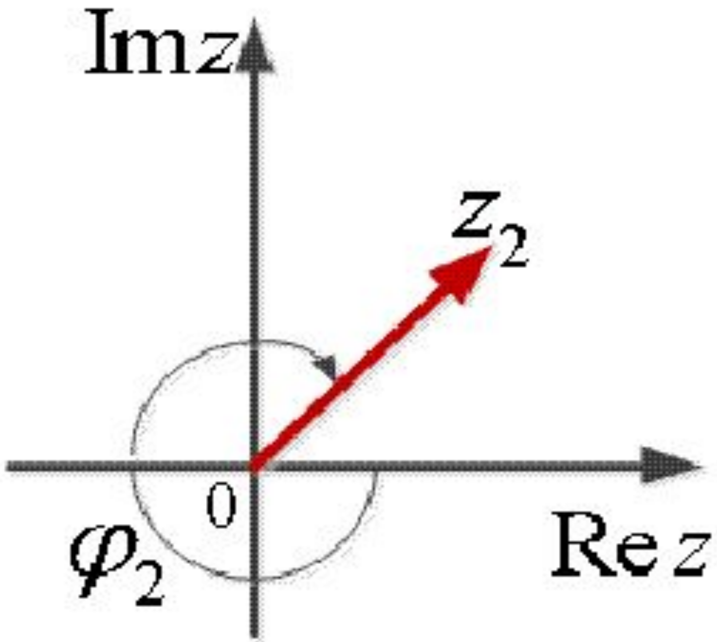


Рис. 1

Рис. 2

Аргумент комплексного числа определяется не однозначно. Любые два аргумента комплексного числа отличаются на число кратное $2\pi k$.

<u>Определение 2.</u> Среди всех значений $Arg\, z$ одно и только одно значение φ_0 удовлетворяет условию $-\pi < \varphi_0 \leq \pi$, которое называется **главным значением аргумента** и обозначается $\arg\, z: \quad \varphi_0 = \arg\, z.$

Следовательно,

$$\varphi = Arg\, z = \arg\, z + 2\pi k, \;\; k \in Z$$

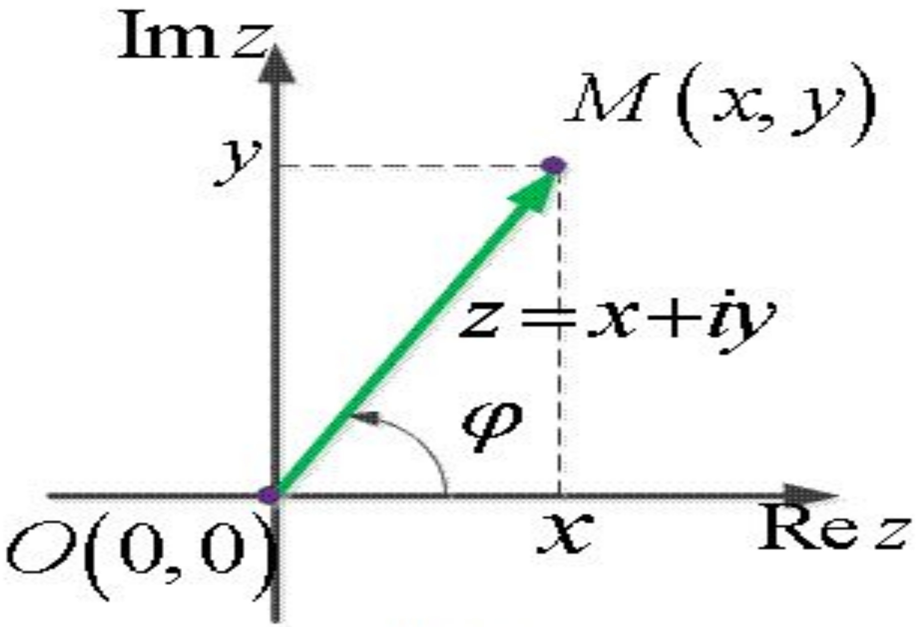


Рис. 3

Из прямоугольного треугольника на рис. 3 определяем тангенс угла φ,
$tg\varphi = \frac{y}{x}, x \neq 0.$
Тогда $\varphi = arctg\frac{y}{x}$. Так как $-\frac{\pi}{2} < arctg\frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$, то

$$\arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x} \quad при\, x > 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} + \pi \;\; при\, x < 0, y \geq 0, \\ arctg\dfrac{y}{x} - \pi \;\; при\; x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} \quad при\; x = 0, y > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} \;\; при\; x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Пример 1. Вычислить аргумент числа $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Решение. Так как $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2}$, то по формуле $\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x}$ получаем:

$$\varphi = arctg\left(\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = -arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}.$$

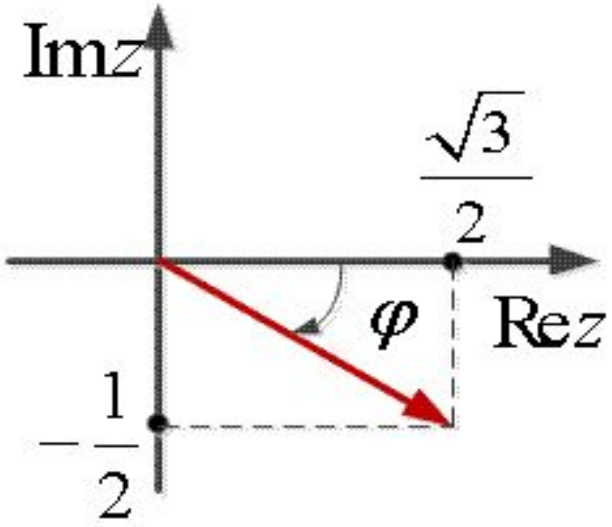


Рис. 4

Пример 2. Вычислить аргумент числа $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

Решение. Так как $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, y = -\frac{1}{2}$, то по формуле $\varphi = \arg z = arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi$ получаем:

$$\varphi = arctg\left(\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right) - \pi = arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

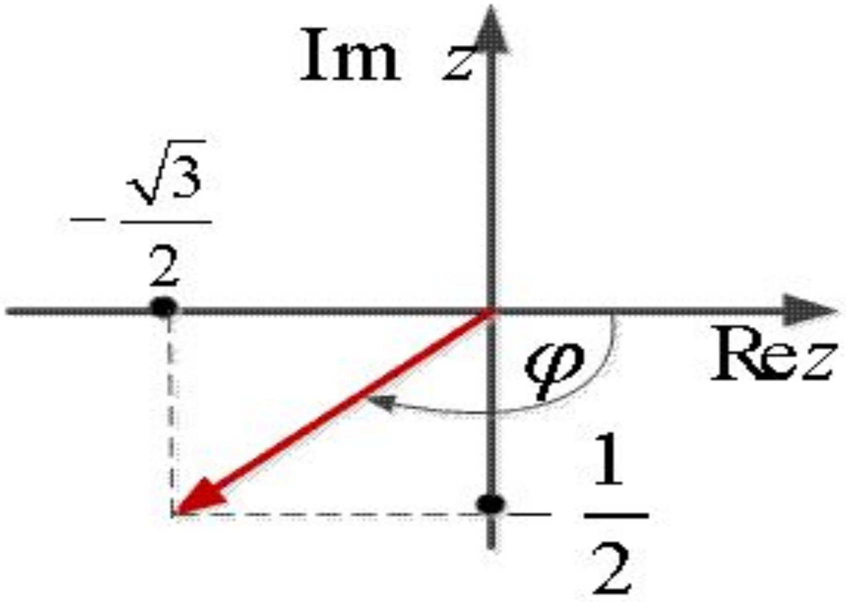


Рис. 5

Пример 3. Вычислить аргумент числа $z=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.

Решение. Так как $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}, y=\frac{1}{2}$, то по формуле $\varphi=\arg z=arctg\left(\frac{y}{x}\right)+\pi$ получаем:

$$\varphi=arctg\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}}\right)+\pi=-arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}.$$

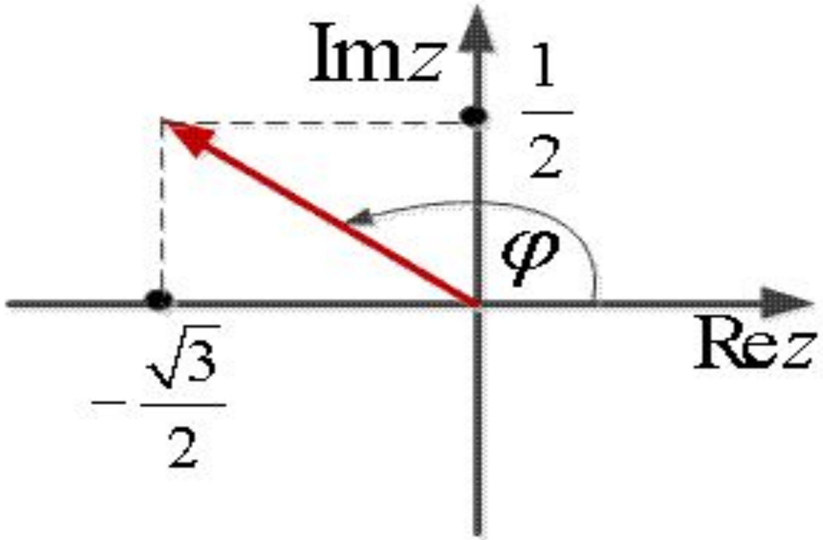


Рис. 6

Пример 4. Найти на плоскости множество, заданное неравенствами:

$$\begin{cases} a \le |z| \le b, & 0 \le a < b, \\ \alpha \le \arg z \le \beta, & -\pi < \alpha < \beta \le \pi \end{cases}$$

Решение. Неравенства $a \le |z| \le b$ показывают, что точки искомого множества принадлежат замкнутому кольцу, ограниченному окружностями с центром в начале координат и радиусами, равными соответственно a и b. Неравенства $\alpha \le \arg\ z \le \beta$ показывают, что точки принадлежат плоскому углу, ограниченному лучами, исходящими из точки O и образуют углы α и β с положительным направлением действительной оси. Значит, искомое множество, изображенное на рис. 7, является пересечением указанных кольца и угла (граница принадлежит множеству).

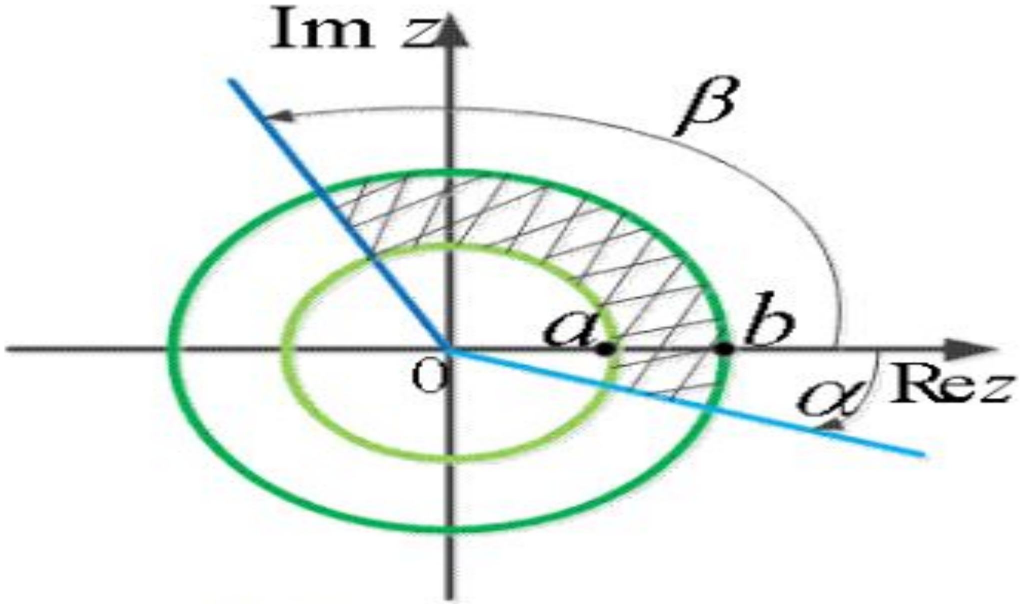


Рис. 7

Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа.

Модуль $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и аргумент φ комплексного числа можно рассматривать как полярные координаты вектора $\overline{r} = \overline{OM}$, изображающего комплексное число $z = x + iy$ (см. рис. 1).

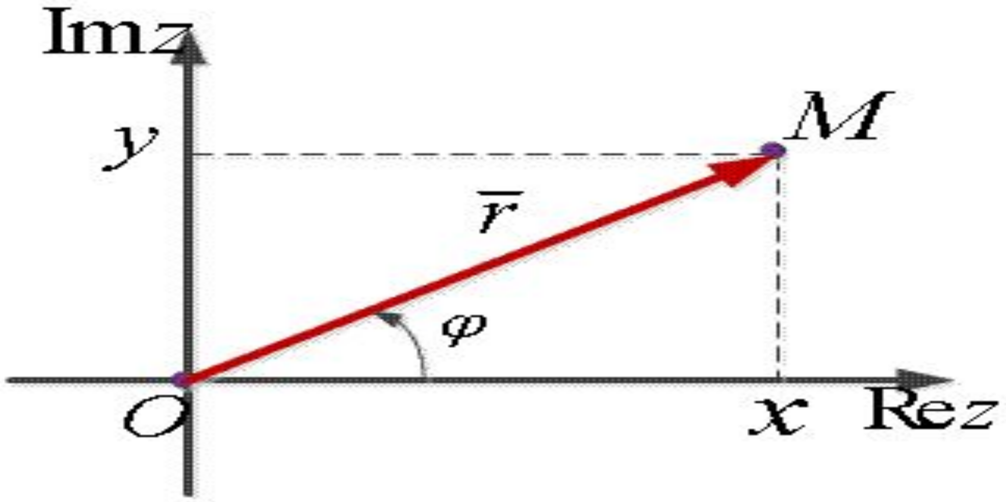


Рис. 1

Тогда имеет место следующая система $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$ или $\begin{cases} cos\varphi = \frac{x}{r} \\ sin\varphi = \frac{y}{r} \end{cases}$,

откуда получаем $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

Следовательно, $z = x + iy = r\ cos\varphi + ir\ sin\varphi$ или $z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Запись комплексного числа в виде

$\boxed{z = r\,(\ cos\varphi + i\ sin\varphi)}$ называется его **тригонометрической** формой.

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел во многих случаях оказывается более удобной, чем алгебраическая.

Для того чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа $x+iy$ к тригонометрической , достаточно найти его модуль и один из аргументов.

Пример 1. Записать число $z=-\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме.

Решение. Комплексное число расположено во второй четверти: $x=-\sqrt{3}, y=1$.

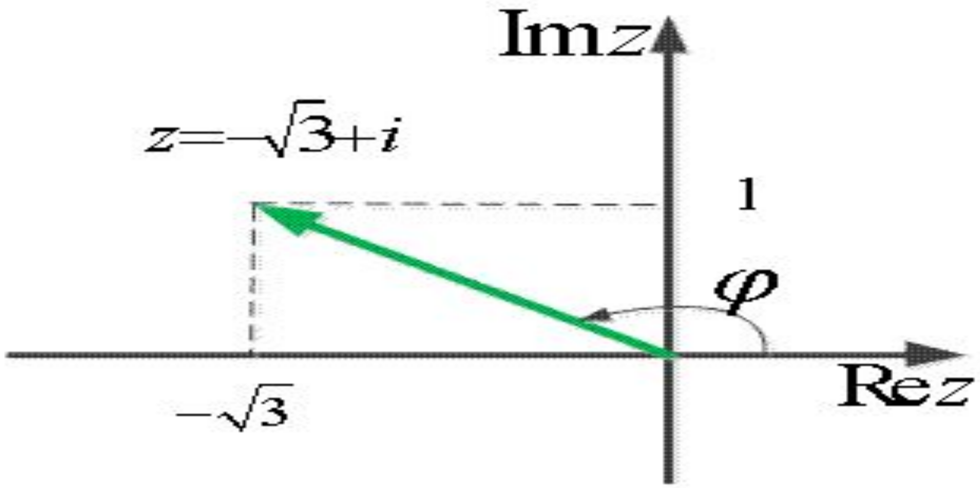


Рис. 2

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1}=\sqrt{4}=2$ (см. рис. 2),

$$\varphi=\arg z=arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi=-\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{5\pi}{6}$$

По формуле $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ имеем $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Используя **формулу Эйлера** $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$ комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в **показательной** (экспоненциальной)форме:

$\boxed{z = re^{i\varphi}}$, где $r = |z|$ - модуль комплексного числа, а угол $\varphi = Arg\, z = \ arg z + 2\pi k\,(k = 0, -1, 1, -2, 2...)$.

Функция $e^{i\varphi}$ периодическая с периодом 2π. Для записи комплексного числа в показательной форме, достаточно найти главное значение аргумента комплексного числа $\varphi = \arg z$.

Пример 2. Записать комплексное число $z=-1-i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Комплексное число расположено в третьей четверти: $x=-1, y=-1$ (см. рис. 3).

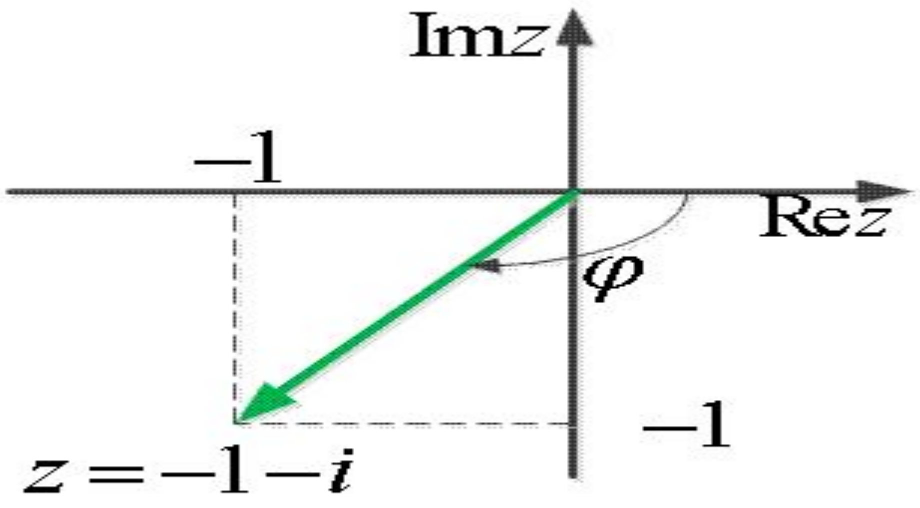


Рис. 3

Найдем его модуль и аргумент:

$$r=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}, \varphi=\arg z=arctg\left(\frac{-1}{-1}\right)-\pi=\frac{\pi}{4}-\pi=-\frac{3\pi}{4}.$$

По формулам $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $z=re^{i\varphi}$ имеем

$$z=-1-i=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

Замечание: выражение $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ не является тригонометрической формой записи числа $z=-1-i$.

Возведение в степень. Формула Муавра.

Найдем произведение комплексных чисел z_1 и z_2 заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 z_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)\, r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)$$

то есть

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Таким образом, ***при умножении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме,их модули перемножаются, а аргументы складываются.***

Это правило распространяется на любое конечное число множителей. В частности, если есть n множителей $z_1 = z_2 = \ldots = z_n$, то

$$\boxed{z^n = (r (\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)}.$$

Данная формула называется формулой Муавра.

При возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

При возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Найдем частное комплексных чисел z_1 и z_2 заданных в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right), z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)\cdot r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i\left(\sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right.$$

.

При делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, модуль делимого делится на модуль делителя $r = \frac{r_1}{r_2}$, а из аргумента делимого вычитается аргумент делителя $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

$$z_1/z_2 = r_1/r_2\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right).$$

Пример 1. Найти z^3, если $z = -i$.

Решение.

Запишем число $z = -i$ в тригонометрической форме. Для этого вычислим модуль и аргумент комплексного числа. Так как $x = 0, y = -1$, то получаем:
$|z| = r = \sqrt{0+1} = 1$, $\arg z = \varphi = -\frac{\pi}{2}$.

Таким образом $z = 1 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

Далее,применяя формулу Муавра, получим:

$$z^3 = 1^3 \cdot \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2} \cdot 3\right)\right) =$$
$$= 0 + i \cdot 1 = i.$$

Пример 2. Найти z^{11}, если $z = 1 - i$.

Решение.

Запишем число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме. Для этого вычислим модуль и аргумент комплексного числа.

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\,,$$
$$\varphi = \arg z = arctg\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом $z = \sqrt{2}\left(\,cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\ sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$

Далее, применяя формулу Муавра, получим

$$z^{11} = (\sqrt{2})^{11}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{4}\right)\right)$$

2π - период

Извлечение корней из комплексных чисел.

Рассмотрим комплексное число z. Перейдем к операции извлечения корня данной степени из комплексного числа.

Определение 1. Комплексное число $\omega = \rho\left(\cos\psi + i\sin\psi\right)$ называется **корнем степени** n , $n \in N$, из числа $z = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$ (обозначается $\sqrt[n]{z} = \omega$), если $\omega^n = z$.

Если $z = 0$, то при любом n уравнение $\omega^n = 0$ имеет одно решение $\omega = 0$.

Пусть теперь $z \neq 0$.

По определению корня и формуле Муавра получаем
$z = \omega^n = \rho^n\left(\cos n\psi + i\sin n\psi\right) = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

Отсюда имеем $\rho^n = r,\ n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k = 0, -1, 1-2, 2, \ldots$. То есть $\psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$ и $\rho = \sqrt[n]{r}$.

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = \omega_k$ принимает вид

$$\sqrt[n]{r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Таким образом, ***если $z \neq 0$, то существует ровно n корней степени n из числа z , которые определяются по формуле***

$$\boxed{\omega_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k = 0, 1, \ldots}$$

. (формула Муавра для нахождения корня nстепени)

Все комплексные числа ω_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$имеют один и тот же модуль $\sqrt[n]{r}$, а аргументы точек ω_k и ω_{k+1} отличаются друг от друга на $\frac{2\pi}{n}$.

Следовательно,комплексные числа ω_k располагаются на окружности радиусом $R = \sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат в вершинах правильного n -угольника.

Пример. Найти $\sqrt[4]{1-i}$.

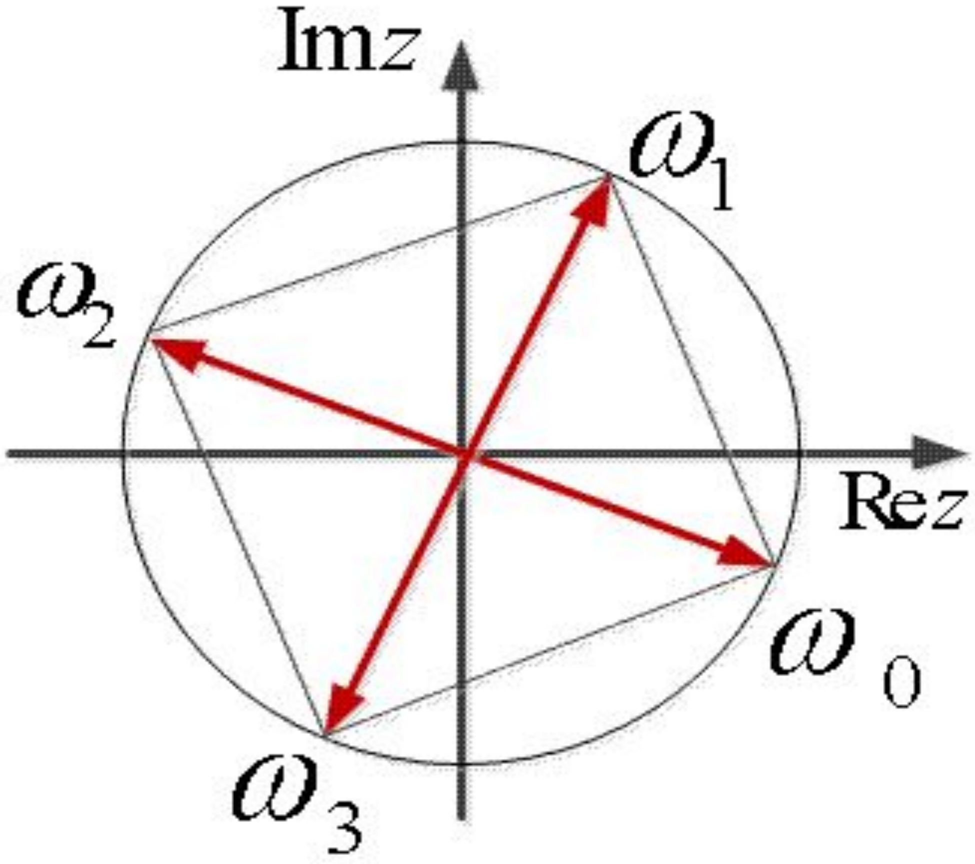
Решение.

Запишем число $\sqrt[4]{1-i}$ в тригонометрической форме. Найдем значения модуля $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, определим аргумент $\varphi = \arg z = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$.

Применяя формулу корня n степени, получаем

$$\omega_k = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}{4}\right),\ k = 0, 1, 2, 3.$$

Комплексные числа располагаются на окружности радиуса $R = \sqrt[8]{2}$ в вершинах правильного четырехугольника (см. рис. 1).



Квадратные уравнения.

В школьном курсе алгебры рассматривались квадратные уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \ (1)$$

с действительными коэффициентами a, b, c. Если дискриминант уравнения (1) неотрицателен, то решения такого уравнения определяли по формулам

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} \text{ , где } D = b^2 - 4ac \geq 0. \ (2)$$

В случае, если дискриминант $D < 0$, говорилось, что уравнение не имеет действительных решений.

Для вывода формул (2) использовался прием выделения квадрата трехчлена с последующим разложением левой части уравнения на линейные множители

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) =$$
$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a}\right) =$$
$$a\left(x + \frac{b+\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x + \frac{b-\sqrt{D}}{2a}\right)$$

откуда и получалась формула (2).

Все эти выкладки справедливы и в том случае, когда a, b, c являются комплексными числами, и корни уравнения отыскиваются в множестве комплексных чисел.
Таким образом, в множестве комплексных чисел уравнение

$$az^2 + bz + c = 0, a \neq 0$$

всегда разрешимо и имеет два корня.

Если $D = b^2 - 4ac = 0$, уравнение имеет двукратный корень, $D \neq 0$ уравнение имеет два различных корня .

Во всех случаях для корней квадратного уравнения справедлива формула

$$z = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \ ,$$

где под $\sqrt{D}$ подразумеваются все значения корня
$\sqrt{D} = \sqrt{|D|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{2}\right) \ , \quad \varphi = \arg D \, , \ \ k = 0, 1.$

Пример 1. Решить уравнение $z^2 + z + 1 = 0.$

Решение. Коэффициенты уравнения $a = 1, b = 1, c = 1,$ тогда по формуле для корней квадратного уравнения имеем

$$z = \frac{-1+\sqrt{1-4\cdot1\cdot1}}{2} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-3} = \sqrt{3 \cdot i^2} = \pm i \cdot \sqrt{3},$ то

$$z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, z_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\frac{1}{4}z^2 + (5i - 1)\,z + (-10i - 23) = 0.$

Решение. По формуле для корней квадратного уравнения (при $a = \frac{1}{4},\ b = 5i - 1,\ c = -10i - 23$) имеем

$$z = \frac{-(5i-1)+\sqrt{(5i-1)^2-4\cdot\frac{1}{4}\cdot(-10i-23)}}{2\cdot\frac{1}{4}} = \frac{-(5i-1)+\sqrt{-25-10i+1+10i+23}}{\frac{1}{2}} = \frac{-5i+1+\sqrt{-1}}{\frac{1}{2}}.$$

Тогда $z_1 = \frac{-5i+1-i}{\frac{1}{2}} = (1 - 6i)\cdot 2 = 2 - 12i$,

$z_2 = \frac{-5i+1+i}{\frac{1}{2}} = (1 - 4i)\cdot 2 = 2 - 8i.$

Уравнения высших степеней

Ранее рассматривалось решение двучленных уравнений степени n , то есть уравнений вида $z^n = a$ с помощью второй формулы Муавра.
Сложнее обстоит дело в случае общего алгебраического уравнения степени n:

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0, \quad (3)$$

где $a_0, \ldots a_n$ - заданные комплексные числа.

Определение 1. Число z_0 называется корнем многочлена $P_n(z)$ или решением уравнения (3), если $P_n(z_0) = 0$.

При решении алгебраических уравнений полезна следующая теорема.

Теорема (Безу) . Остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $z - z_0$ равен $P_n(z_0)$, то есть равен значению этого многочлена при $z = z_0$.

Таким образом,

$$\boxed{P_n(z) = Q_{n-1}(z) \cdot (z - z_0) + P_n(z_0)},$$

где остаток $P_n(z_0)$, если он не равен нулю, является многочленом, степень которого меньше степени делителя $z - z_0$.

В частности, если z_0 корень многочлена $P_n(z)$, то $P_n(z)$ делится на $z - z_0$ и

$$\boxed{P_n(z) = Q_{n-1}(z)(z - z_0)}.$$

Теорема (Гаусса). Каждое алгебраическое уравнение имеет в множестве комплексных чисел по крайней мере один корень.
Опираясь на теорему Гаусса, можно доказать, что

$$\boxed{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = a_0 (z - z_1)^{\alpha_1} \cdot (z - z_2)^{\alpha_2} \ldots (z - z_k)^{\alpha_k}},$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_k$ - некоторые различные комплексные числа, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ - натуральные числа, причем $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$.

Отсюда следует, что числа $z_1, z_2, \ldots, z_k$ и только они являются корнями уравнения (3). При этом говорят, что z_1, является корнем кратности α_1, z_2 - корнем кратности α_2 и т.д.

Теорема. Каждое алгебраическое уравнение степени n имеет в множестве комплексных чисел ровно n корней.

Теорема. Целые корни любого алгебраического уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.

Пример 3. Разложить многочлен $P(z) = z^3 - 6z - 9$ на множители.

Решение. Рассматривая делители свободного члена $-1, -3, -9, 1, 3, 9$, убеждаемся в том, что только при $z = 3$ $P(3) = 27 - 18 - 9 = 0$, то есть $z = 3$ является корнем многочлена $z^3 - 6z - 9$. Делим многочлен на $z - 3$.

Таким образом, $z^3 - 6z - 9 = (z-3) \cdot (z^2 + 3z + 3)$.
Находим корни квадратного трехчлена, решая уравнение $z^2 + 3z + 3 = 0$.
$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3 = (\sqrt{3 \cdot i^2})^2$, тогда $z_1 = \frac{-3-i\cdot\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{-3+i\cdot\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, разложение многочлена на множители имеет вид:
$z^3 - 6z - 9 = (z-3)(z - \frac{-3-i\cdot\sqrt{3}}{2})(z - \frac{-3+i\cdot\sqrt{3}}{2})$.

Пример 4. Решить уравнение $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0$.

Решение. Рассматривая делители свободного члена: $-1, -5, 1, 5$, убеждаемся в том, что только $z = 5$ является целым корнем уравнения. Делим левую часть уравнения на $z - 5$:
Таким образом, $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = (z-5)(z^2 + z + 1)$.

Решая квадратное уравнение $z^2 + z + 1 = 0$, получаем остальные корни.
$D = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 = (\sqrt{3 \cdot i^2})^2$, $z = \frac{-1 \pm i \cdot \sqrt{3}}{2}$.

Итак, $z_1 = 5, z_2 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, z_3 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.