Есть ли алгоритм решения комбинаторных задач?

Лапшева Е.Е.

Комбинаторика

Правило

суммы

произведения

Формулы

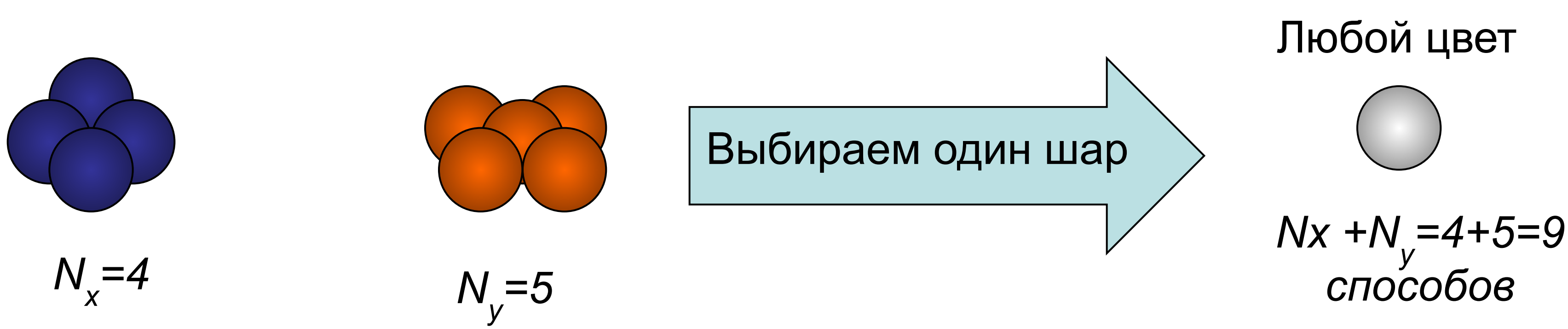
Перестановки

Размещения

Сочетания

Правило суммы

- Если элемент ***x*** можно выбрать способами n_x и если элемент *y* можно выбрать n_y способами, то выбор «либо ***x***, либо ***y***» можно осуществить способами $n_x + n_y$.



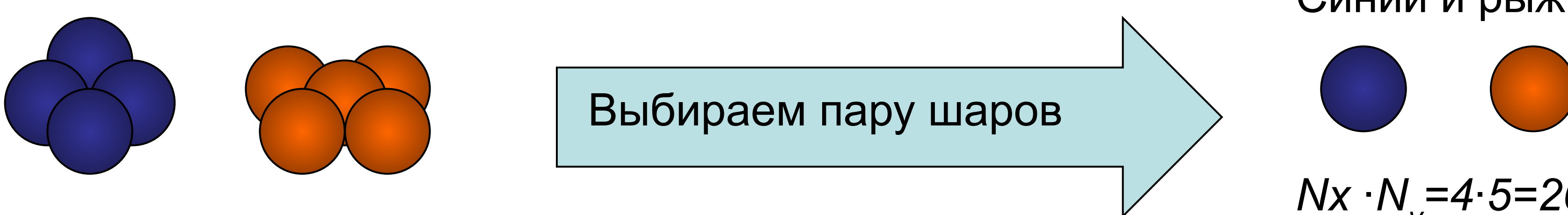
Пример 1

- В коробке 10 тетрадей в клетку и 5 тетрадей в линию. Сколькими способами можно выбрать одну тетрадь?

Правило произведения

- Если элемент ***x*** можно выбрать n_x способами и если после его выбора элемент ***y*** можно выбрать n_y способами, то выбор упорядоченной пары ***(x, y)*** можно осуществить $n_x \cdot n_y$ способами.

Синий и рыжий



$N_x=4$

$N_y=5$

$Nx \cdot N_y=4 \cdot 5=20$ *способов*

Пример 2

- В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Перестановки

Перестановки без повторений

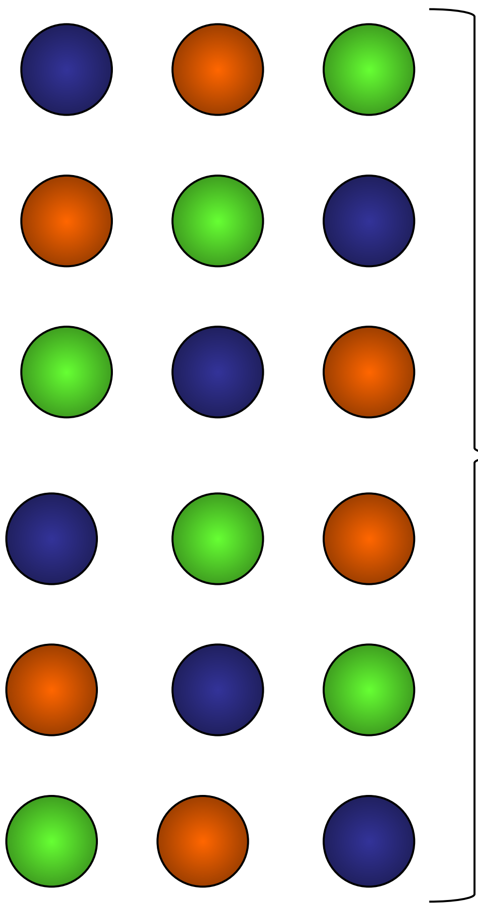
- Перестановками без повторений из ***n*** различных элементов называются все возможные последовательности этих ***n*** элементов. Число перестановок без повторений из ***n*** элементов равняется

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$$

по определению

$$0! = 1$$

Перестановки без повторений



6 различных перестановок

$$n = 3$$

$$P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

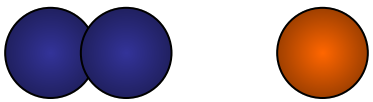
Пример 3

- Сколько различных гирлянд можно сделать из 10 светодиодов разного цвета?

Перестановки с повторениями

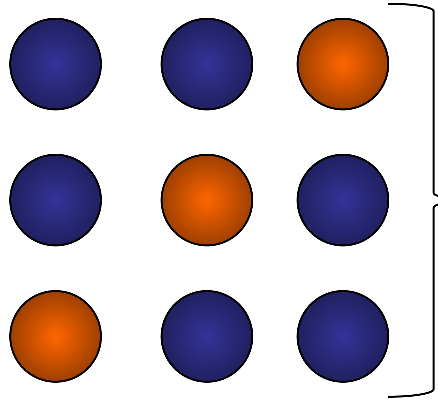
- *Перестановки с повторением* из ***n*** элементов ***k*** типов $(k \le n)$
- число элементов 1-го типа $\boldsymbol{n_1}$;
  число элементов 2-го типа $\boldsymbol{n_2}$; …;
  число элементов *k*-го типа $\boldsymbol{n_k}$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$
- все возможные последовательности исходных ***n*** элементов. Число перестановок с повторениями обозначают $\overline{P}_{n=n_1+n_2+\ldots+n_k}$
- подсчитывают так: $$\overline{P}_{n=n_1+n_2+\ldots+n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Перестановки с повторениями



n_1=2 n_2=1

n=n_1+n_2=2+1=3



3 различные перестановки

$$\overline{P}_{3=2+1} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{6}{2} = 3$$

Пример 4

- Дворовая футбольная команда выбирает капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать, если в команде 11 человек?

Пример 5

- Сколько различных гирлянд можно сделать, если у нас 5 красных, 7 синих и 4 желтых светодиода?
- Сколько различных гирлянд получится, если замкнуть гирлянду из предыдущей задачи в кольцо?

Размещения

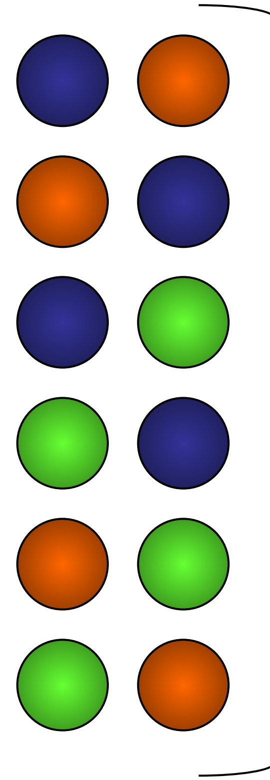
(выборки)

Размещения без повторений

- *Размещениями без повторений* из ***n*** различных элементов по ***m*** элементов называются все такие последовательности ***m*** различных элементов, выбранных из исходных ***n***, которые отличаются друг от друга или порядком следования элементов, или составом элементов.
- Число размещений без повторений из ***n*** элементов по ***m*** обозначается символом

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (m < n)$$

Размещения без повторений



6 различных выборок

n=3

Порядок выбора важен!

m=2

$$A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$$

Пример 6

- Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляются всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4 и 5 одновременно.

Пример 7

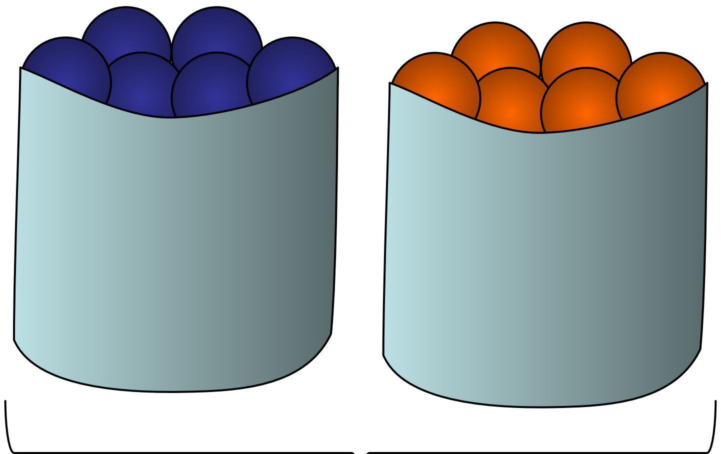
- Из группы в 15 человек выбирается 4 участника эстафеты 800+400+200+100. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

Размещения с повторениями

- *Размещения с повторениями* из элементов ***k*** типов по ***m*** элементов (***k*** и ***m*** могут быть в любых соотношениях) называются все такие последовательности ***m*** элементов, принадлежащих исходным типам, которые отличаются друг от друга или порядком следования элементов, или составом элементов.

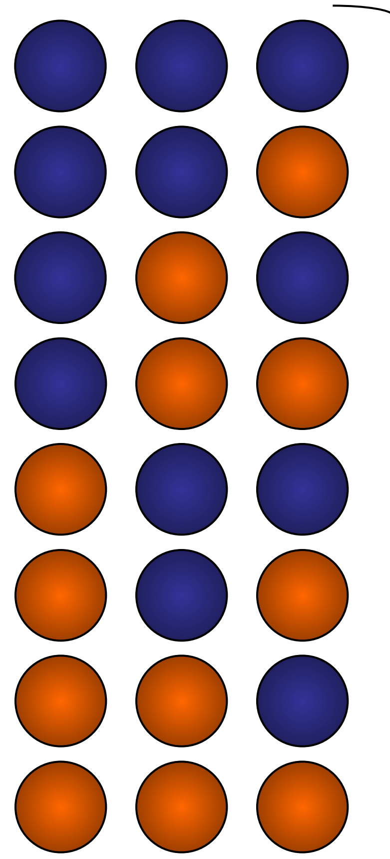
$$\overline{A_k^m} = k^m$$

Размещения с повторениями



k=2

n=3



8 вариантов выборок

$$\overline{A_2^3} = 2^3 = 8$$

Пример 8

- Назовем натуральное число "симпатичным", если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует четырехзначных "симпатичных" чисел?

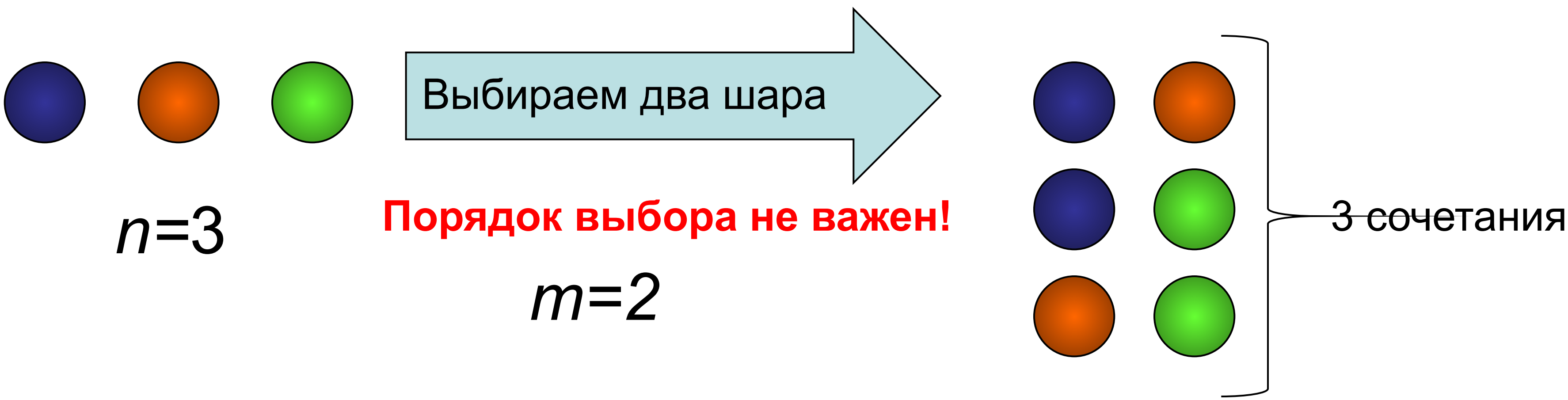
Сочетания

Сочетания без повторений

- *Сочетаниями без повторений* из ***n*** различных элементов по ***m*** элементов называются все такие последовательности ***m*** различных элементов, выбранных из исходных ***n***, которые отличаются друг от друга составом элементов.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (m < n)$$

Сочетания без повторений



$$C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{6}{2} = 3$$

Пример 9

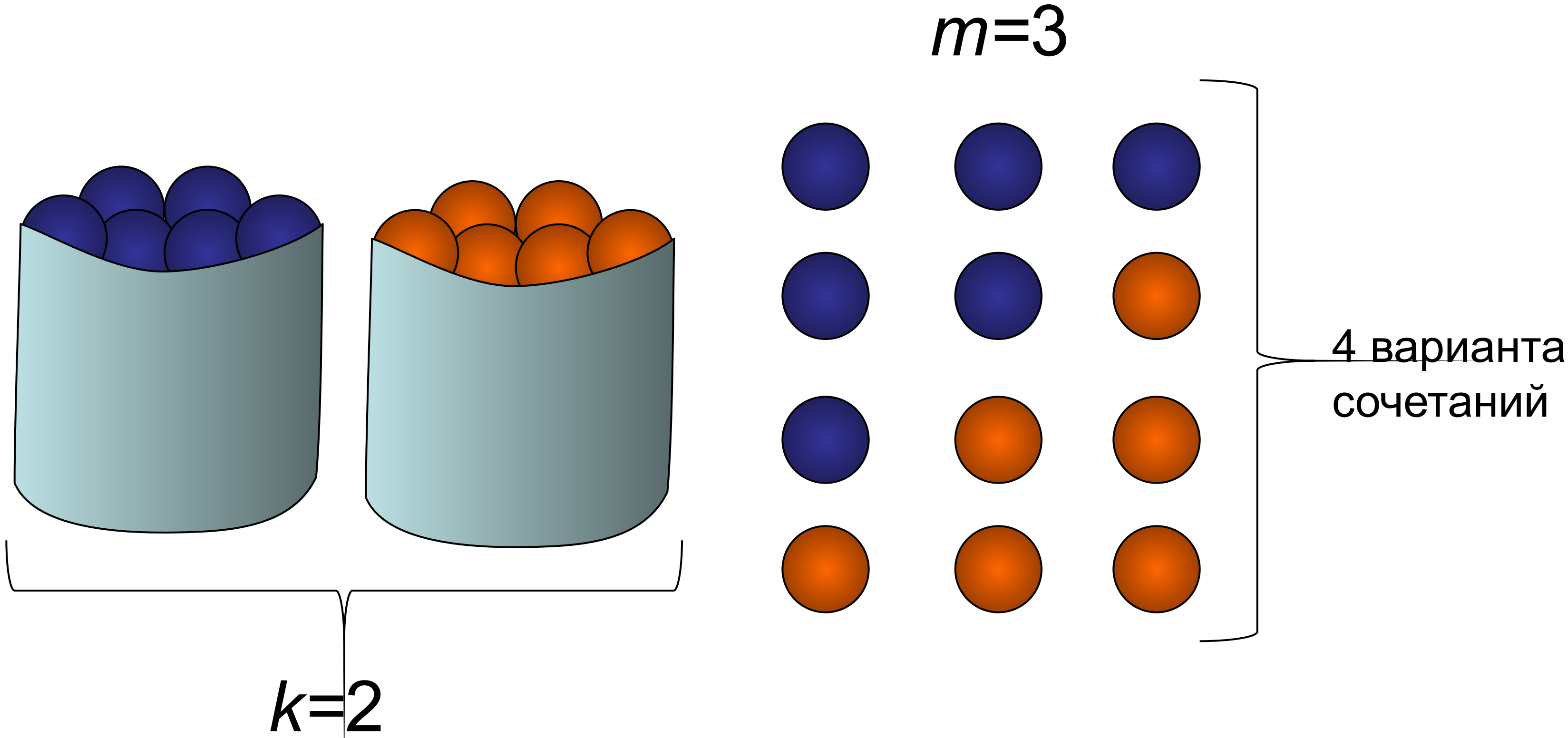
- Сколькими способами можно выбрать трех дежурных из группы в 20 человек?

Сочетания с повторениями

- *Сочетаниями с повторениями* из элементов ***k*** типов по ***m*** элементов (***m*** и ***k*** могут быть в любых соотношениях) называются все такие последовательности ***m*** элементов, принадлежащих исходным типам, которые отличают друг от друга составом элементов.

$$\overline{C_k^m} = \frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!}$$

Сочетания с повторениями



$$\overline{C_2^3} = \frac{(2+3-1)!}{3!(2-1)!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

Пример 10

- В вазе стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики. Все цветы на внешний вид одинаковы. Сколькими способами можно выбрать 3 цветка из вазы?

Формулы комбинаторики

Перестановки
Используются все элементы
Порядок элементов важен

Размещения
Используются не все элементы
Порядок элементов важен

Сочетания
Используются не все элементы
Порядок элементов не важен

1. Один выбор (анализ) элементов или несколько? Если один, то см. п.3
2. Каким союзом варианты выбора (анализа) соединяются? «И» – правило произведения, «или» – правило суммы.

Для каждого выбора задаются следующие вопросы:

3. Все элементы используются? Если «да», то это перестановки. Переходим к п. 5.
4. Порядок выбора элементов важен? Если «да», то это размещения, «нет» – сочетания.
5. Есть ли одинаковые элементы? Если «да» – то формула с повторениями, «нет» – без повторений.

Пример 11

- Световое табло состоит из лампочек. Каждая лампочка может находиться в одном из трех состояний («включено», «выключено» или «мигает»). Какое наименьшее количество лампочек должно находиться на табло, чтобы с его помощью можно было передать 18 различных сигналов?

Пример 12

- У людоеда в подвале томятся 25 пленников.
- а) Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?
- б) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

Пример 13

- Волонтеры разделились на две равные группы для розыска заблудившегося ребенка. Среди них только 4 знакомы с местностью. Каким числом способов они могут разделиться так, чтобы в каждую группу вошло 2 человека, знающих местность, если всего их 16 человек?

Пример 14

- Сколько существует натуральных чисел, меньших 256_{10}, таких, что в записи каждого числа в двоичной системе счисления будет равное количество единиц и значащих нулей. В ответе укажите целое число.

Пример 15

- В коробке находятся 16 шариков – 4 красных, 4 синих и 8 черных. Из коробки наугад вынули два шарика. Какое из перечисленных сообщений несет в себе наибольший объем информации?
- Один из вынутых шариков – красного цвета, а другой – синего;
- Один из вынутых шариков – синего цвета, а другой – черного;
- Оба вынутых шарика красного цвета;
- Оба вынутых шарика черного цвета;
- Цвета вынутых шариков отличаются друг от друга;
- Вынуты шарики одного и того же цвета.