



Физико-технические основы электроэнергетики

Лекция 7

Профессор Е.Ю.Клименко

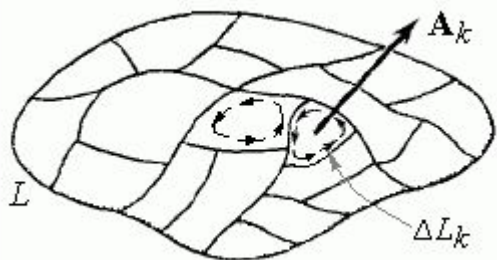
Расчет коэффициента самоиндукции (продолжение)

На прошлой лекции мы получили:

$$L_{aa} = \iint \frac{dl_a dl'_a}{R} \quad (R \neq 0)$$

Двойное интегрирование по одному контуру и по площади вызывает недоумение. Рассмотрим физический смысл этого действия. На прошлой лекции мы получили выражение для собственной энергии линейного (тонкого) проводника:

$$W_{aa} = \frac{I_a}{2} \oint \mathbf{A}_a \cdot d\mathbf{l} = \frac{L_{aa} I_a^2}{2} \quad \text{откуда: } \oint \mathbf{A}_a \cdot d\mathbf{l} = L_{aa} I_a$$



Теорема Стокса (напоминание)

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{A} dS = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{A} dS = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dS = \Phi_a = L_{aa} I_a$$

Φ_a - поток магнитной индукции (магнитный поток).

Таким образом, первый (внутренний) интеграл соответствует определению векторного потенциала от единичного тока, а второй – расчету магнитного потока, через контур, равному при единичном токе коэффициенту самоиндукции.

Расчет коэффициента самоиндукции

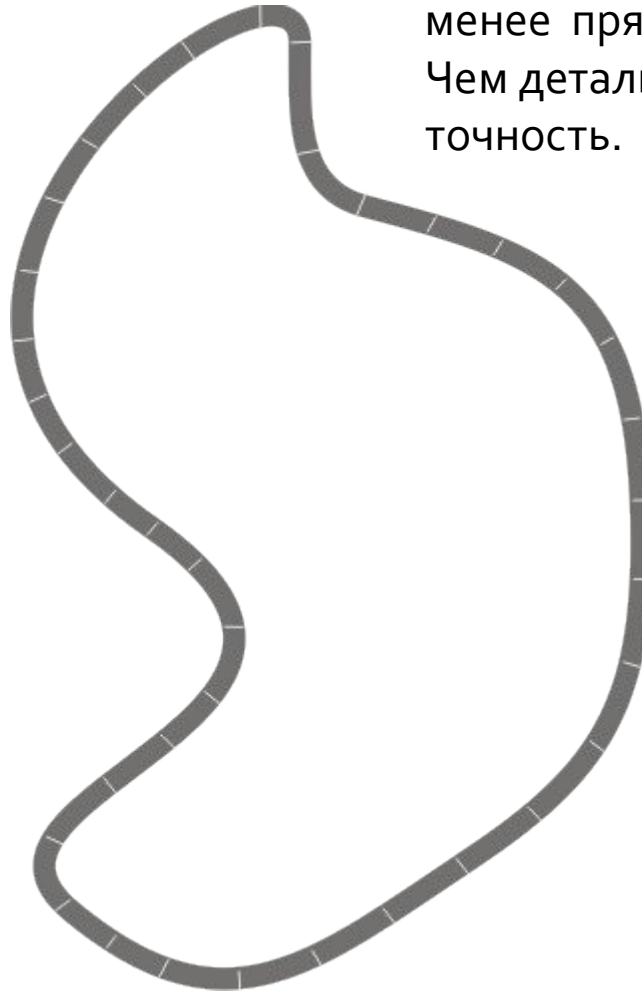
Чтобы проверить, действительно ли Вы понимаете, что означает та или иная формула, запрограммируйте вычисления с ее помощью.



Рассчитать коэффициент самоиндукции L_{aa} для произвольного контура. Этот коэффициент численно равен потоку, создаваемому в контуре единичным током

Расчет коэффициента самоиндукции

Разбиваем контур на более или менее прямолинейные участки.
Чем детальнее разбиение, тем выше точность.



Расчет коэффициента самоиндукции

Каждому участку сопоставляем свой вектор $d\vec{l}$



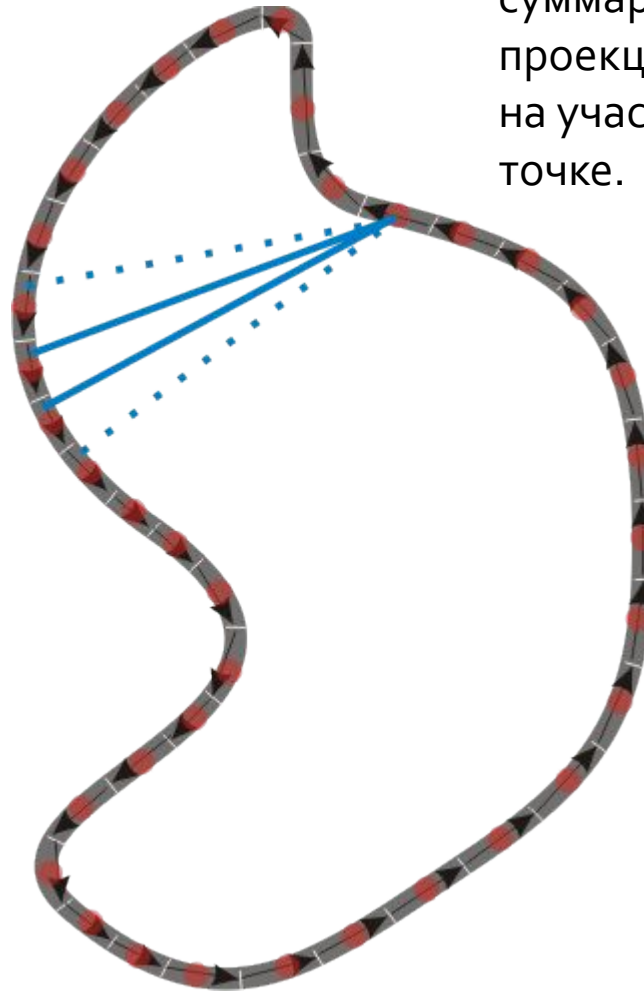
Расчет коэффициента самоиндукции

Посередине каждого участка
Размещаем точки, в которых будем
считать проекцию векторного
потенциала (под интегралом стоит
скалярное произведение элементов)



Расчет коэффициента самоиндукции

Для каждой точки рассчитываем суммарную (от всех отрезков) проекцию векторного потенциала на участок, соответствующей этой точке.



$$dA_k = \frac{\mu_0}{4\pi l_a^k} \sum_{i \neq k} \frac{dl_a^k \cdot dl_a^i}{R_{ik}}$$

Считаем, что в пределах участка векторный потенциал постоянен.

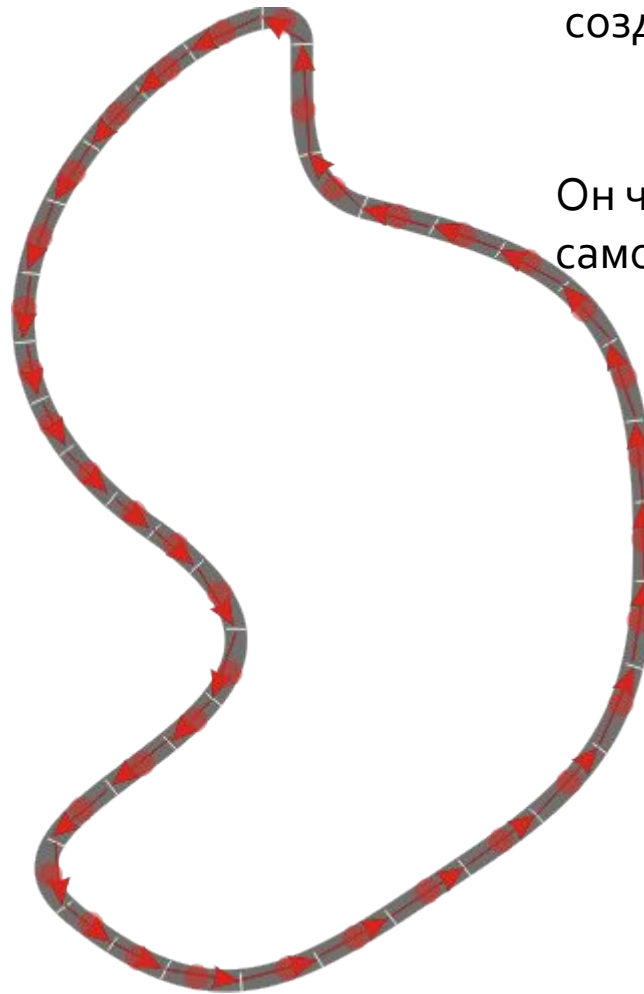
Расчет коэффициента самоиндукции

Находим поток через контур,
создаваемый собственным током

$$\Phi = \sum_k dA_k l_a^k$$

Он численно равен коэффициенту
самоиндукции

$$\Phi = L_{aa} I$$



Самоиндукция соленоида

На прошлой лекции мы получили для длинного соленоида $B = \mu_0 n I$.
Если пренебречь краевыми эффектами, энергия заключенная в магнитном поле соленоида

$$W = \frac{\mu_0 (nI)^2}{2} l \pi r^2 = \frac{LI^2}{2}$$

Индуктивность соленоида: $L = \mu_0 n^2 l \pi r^2 = \frac{\mu_0 n l r}{2} \mathcal{L}$.

Здесь \mathcal{L} - длина провода в соленоиде.

Точнее индуктивность соленоида можно рассчитать, вычислив векторный потенциал в точке на каждом i -том витке (в пределах одного витка он постоянен) от всех других (j -тых) витков.

$$A_{\varphi}^i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_0}{\pi k} \left(\frac{a_i}{r_j}\right)^{0.5} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right] \quad k^2 = \frac{4a \cdot r}{(a+r)^2 + z^2}$$

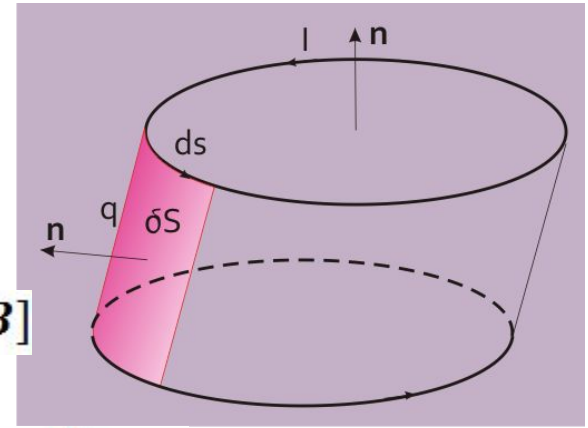
Затем векторный потенциал на каждом витке нужно умножить на его длину и полученные результаты просуммировать.

(поскольку $K(1)$ стремится к бесконечности, членом суммы при $j=i$ можно пренебречь, если витков много)

$$L = \sum_{k=1}^N A_{\varphi}^k 2\pi r_k$$

Силы, действующие на контур в магнитном поле.

Пусть каждый элемент контура под действием поля испытал малое перемещение q при неизменной силе тока. Работа, совершенная над элементом ds $\mathbf{qF} = Iq[\mathbf{ds} \times \mathbf{B}]$. Работа, совершенная над контуром:



$$\delta A = \oint \mathbf{qF} ds = I \oint \mathbf{q}[\mathbf{ds} \times \mathbf{B}] = I \oint \mathbf{B}[\mathbf{q} \times \mathbf{ds}] = I \oint \mathbf{B} \delta \mathbf{S}$$

$\delta A = I \int_{\Delta} \mathbf{B} \delta \mathbf{S} = I \int_{\Delta} B_n \delta S = I \delta \Phi$ — работа, совершенная над контуром при перемещении. $\delta \mathbf{S}$ — элемент контура при перемещении на q поверхность, описанная всеми элементами контура при перемещении.

Работа сил магнитного поля равна изменению магнитного потока через контур, умноженному на ток.

Если при перемещении не меняется магнитный поток через контур, то поле не совершает работы.

«Потенциальная» функция

Введем обозначение $U = -I\Phi$ тогда $\delta A = -(\delta U)_{I=const}$ Работа сил магнитного поля равна убыли функции U , которая играет роль потенциальной или силовой функции тока в магнитном поле. К ней можно применять правила аналитической механики: Если U зависит от каких-либо обобщенных координат q_i , характеризующих положение контура, то обобщенная сила θ_i , действующая на ток в направлении q_i , равна $\theta_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$. Однако, нельзя отождествлять U с потенциальной энергией магнитного поля, поскольку она не принимает во внимание работу электродвижущих сил, индуцируемых магнитным полем в движущемся проводнике.

Устойчивое равновесие контура постоянного тока соответствует минимуму потенциальной функции, т.е. максимуму магнитного потока Φ .

Поскольку мы рассматривали работу при неизменном токе в контуре, то изменение потока может быть связано лишь с другими контурами. Пусть есть один внешний контур. Его поток через первый контур: $\Phi_{21} = L_{21}I_2$

$$U_{21} = -L_{21}I_2I_1 \quad \delta A = -(U_{21})_I = I_1I_2\delta L_{21} \quad \theta_i = -\frac{(\partial U_{21})_I}{\partial q_i} = I_1I_2 \frac{\partial L_{21}}{\partial q_i}$$

Видно, что механическое взаимодействие замкнутых токов удовлетворяет третьему закону Ньютона, так как $L_{12} = L_{21}$.

Пример: «Рамка в однородном поле»

Рамка площадью S обтекается током I . Закреплена так, что может вращаться вокруг оси, перпендикулярной B .

Магнитный поток через рамку $\Phi = BS \cos \theta$.

Потенциальная функция: $U = -IBS \cos \theta$.

Обобщенная координата: θ ей соответствует обобщенная сила : момент N .

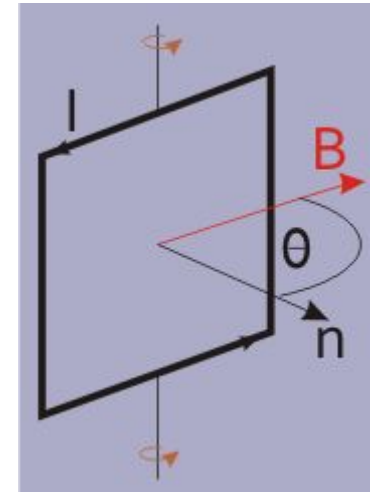
$$N = - \frac{\partial U}{\partial \theta} = -IBS \sin \theta$$

Положениям равновесия рамки соответствуют $N=0$ т.е.

$$\theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta = \pi$$

Первое соответствует минимуму потенциальной функции, а второе максимуму.

Поле стремится повернуть рамку так, чтобы нормаль совпала с направлением поля.

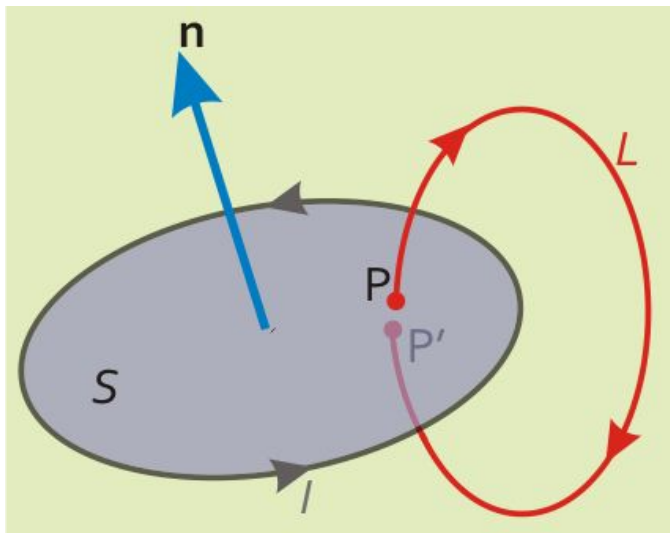


Скалярный потенциал магнитного поля

Электродинамика позволяет решать возникающие задачи несколькими способами. Одним из таких способов является введение скалярного магнитного потенциала, удобного при описании поля на некотором расстоянии от контуров с током, хотя это и не необходимое требование.

Скалярный потенциал электростатического поля удалось ввести, поскольку $\text{rot } \mathbf{E} = 0$. Векторный потенциал магнитного поля нам пришлось ввести, поскольку $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ не равен нулю. Но в области, где нет токов ничто не мешает использовать скалярный потенциал, который будем обозначать буквой ψ , причем $\Delta \psi = 0$.

Однако, необходимо договориться, как в этом случае описывать токи.



Введем перегородку S . Рассмотрим циркуляцию вектора \mathbf{B} на пути L от точки P до P' . Поскольку эти точки близки, то для скалярного потенциала циркуляция должна быть равна нулю, но по закону полного тока она равна $\mu_0 I$. Оба требования могут быть удовлетворены, если допустить, что на перегородке происходит скачок потенциала $\psi - \psi' = \mu_0 I$. Воображаемая перегородка является поверхностью разрыва потенциала.

В лекции 3 было введено понятие электрического диполя. (напоминание)

Потенциал диполя

Потенциал диполя равен разности потенциалов зарядов. R'_i

Найдем $R'_i = R_0 - R_i$ $R_i'^2 = R_0^2 - 2R_0R_i + R_i^2$

$$\frac{1}{R'_i} = \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{2R_0R_i}{R_0^2} + \frac{R_i^2}{R_0^2} \right)^{-0.5} = \frac{1}{R_0} \left(1 + \frac{R_0R_i}{R_0^2} \right)$$

$$\varphi = \frac{1}{R_0} (e^+ + e^-) + \frac{pR_0}{R_0^3} = \frac{pR_0}{R_0^3}$$

Определим: $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$ тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho')$$

ρ' - связанный объемный заряд.

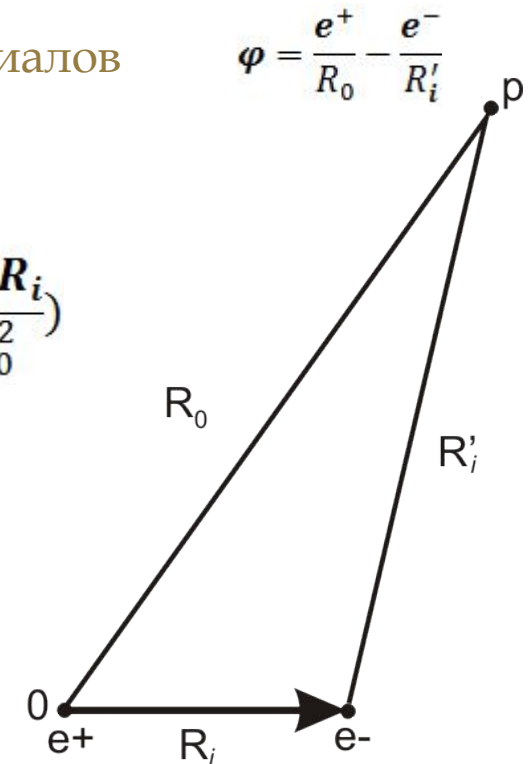
Уравнение Пуассона для диэлектрика

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho')$$

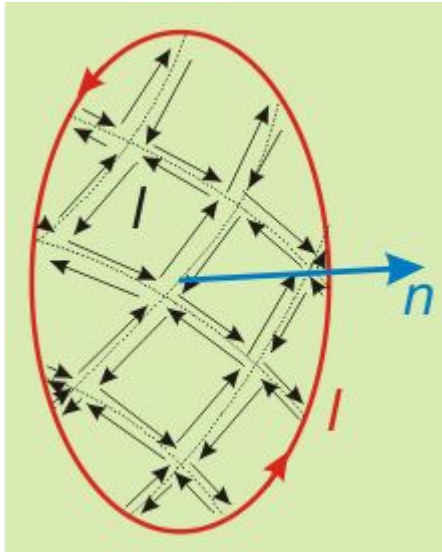
Граничные условия для диэлектрика

$$n(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0} n(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) - \frac{1}{\varepsilon_0} n(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\varpi - \varpi')$$

ϖ' - связанный поверхностный заряд

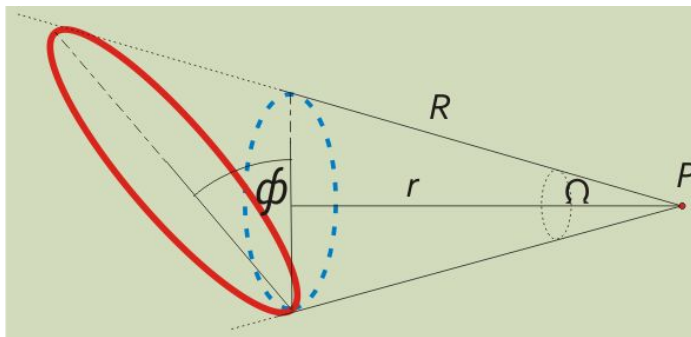


Скалярный потенциал магнитного поля



Если введенную перегородку мысленно разбить на ячейки с токами, текущими по границам и равными току в контуре, то, с одной стороны, поле контура не изменится, так как токи в соседних ячейках компенсируют друг друга, а с другой стороны, каждую ячейку можно рассматривать как элементарный диполь с моментом $d\mathbf{m} = I ds \mathbf{n} = I ds \mathbf{n}$. По аналогии с электрическим моментом

$$\psi = \frac{dm \mathbf{n} \mathbf{R}}{4\pi R^3} = \frac{I ds}{4\pi R^2} \frac{nR \cos\phi}{R} = \frac{I d\Omega}{4\pi}$$



Телесный угол — часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки P (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол).

Телесный угол измеряется отношением площади той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса сферы:

Примеры (1)

Определить магнитное поле на оси кругового тока радиуса a на расстоянии r от него

Из точки наблюдения A контур тока виден под углом где площадь сегмента сферы радиуса ограниченного контуром тока.

$$\Omega = 2\pi \int_0^{\vartheta_0} \sin\vartheta d\vartheta = 2\pi(1 - \cos\vartheta_0) = 2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)$$

Поэтому магнитный потенциал в точке наблюдения равен

$$\psi = \frac{2\pi\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)$$

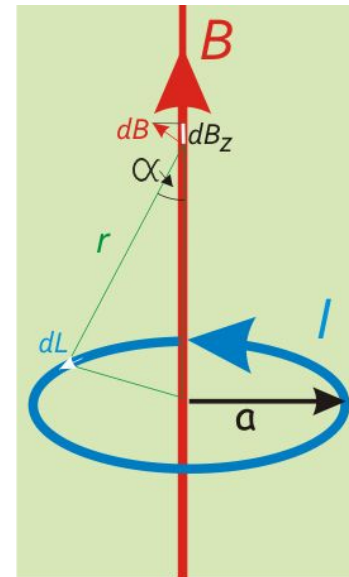
Магнитное поле

$$B_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\mu_0}{2} \frac{m}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Здесь $m = \pi a^2 I$ - магнитный момент витка с током.

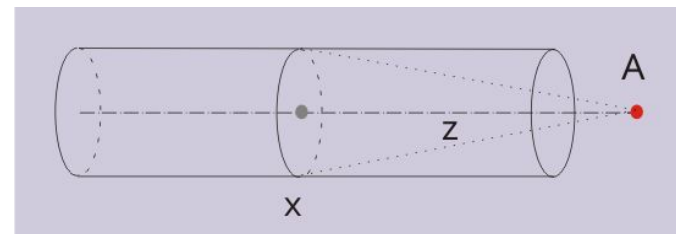
Полученное выражение совпадает с полученным в лекции 6

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



Примеры (2)

Поле на оси однослойного соленоида.



Из точки A сечение x видно под углом

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)$$

Скалярный потенциал:

$$\psi = \frac{2\pi\mu_0 I n}{4\pi} \int_{l+z}^z \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right) = \frac{2\pi\mu_0 I}{4\pi} [\sqrt{a^2 + (l+z)^2} - \sqrt{a^2 + z^2} - l]$$

Магнитное поле:

$$B = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\mu_0 I n}{2} \left[\frac{l+z}{\sqrt{a^2 + (l+z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]$$

Этот результат совпадает с $B = \frac{\mu_0 N I}{2L} (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$, полученным в Лекции 6.

Магнитный момент тока

Магнитный момент контура: $\mathbf{M} = \int dm = I \int d\mathbf{S} = I\mathbf{S}$
Знак момента совпадает с нормалью к плоскости .

Скалярный потенциал момент^а

$$\psi = \frac{\mathbf{M}\mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

Магнитное поле: $\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \left(\frac{\mathbf{M}\mathbf{R}}{R^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{3(\mathbf{M}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{M}}{R^3} \right)$

Если точка наблюдения находится далеко от контура, то поле зависит только от момента (дипольного, квадрупольного или высших порядков).


Потенциальная энергия диполя во внешнем поле: $U = -\mathbf{M}\mathbf{B}$.

Сила, действующая на диполь: $\mathbf{F} = -\text{grad}U = \text{grad}(\mathbf{M}\mathbf{B})$.

Момент приложенных к нему сил: $\mathbf{N} = [\mathbf{M} \times \mathbf{B}]$.



Спасибо за внимание



Линейные цепи с синусоидальными токами
и напряжениями

- 2.1. Расчет простейших цепей . .
- 2.2. Двухполюсник в цепи синусоидального тока . .
- 2.3. Расчет разветвленных цепей синусоидального тока
- 2.4. Резонанс и согласование
- 2.5. Электрические цепи с индуктивно связанными
элементами .

Самоиндукция двухпроводной линии

Воспользуемся выражением $R = \frac{1}{2} \int A j dV$
Оно удобно тем, что интеграл берется только по объему, где протекают токи.

