



# **Физико-технические основы электроэнергетики**

Лекция 7

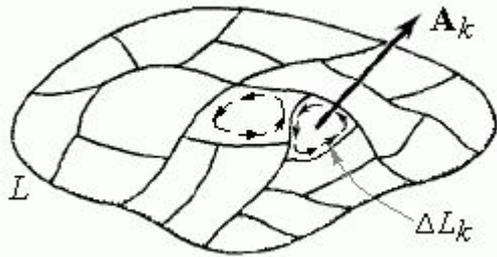
Профессор Е.Ю.Клименко

## Расчет коэффициента самоиндукции (продолжение)

На прошлой лекции мы получили:

$$L_{aa} = \iint \frac{dl_a dl'_a}{R} \quad (R \neq 0)$$

Двойное интегрирование по одному контуру и по площади вызывает недоумение. Рассмотрим физический смысл этого действия. На прошлой лекции мы получили выражение для собственной энергии линейного (тонкого) проводника:

$$W_{aa} = \frac{I_a}{2} \oint \mathbf{A}_a d\mathbf{l} = \frac{L_{aa} I_a^2}{2} \quad \text{откуда: } \oint \mathbf{A}_a d\mathbf{l} = L_{aa} I_a$$


Теорема Стокса (напоминание)

$$\iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{A} dS = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{A} dS = \iint_S \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dS = \Phi_a = L_{aa} I_a$$

$\Phi_a$  - поток магнитной индукции (магнитный поток).

Таким образом, первый (внутренний) интеграл соответствует определению векторного потенциала от единичного тока, а второй – расчету магнитного потока, через контур, равному при единичном токе коэффициенту самоиндукции.

# Расчет коэффициента самоиндукции

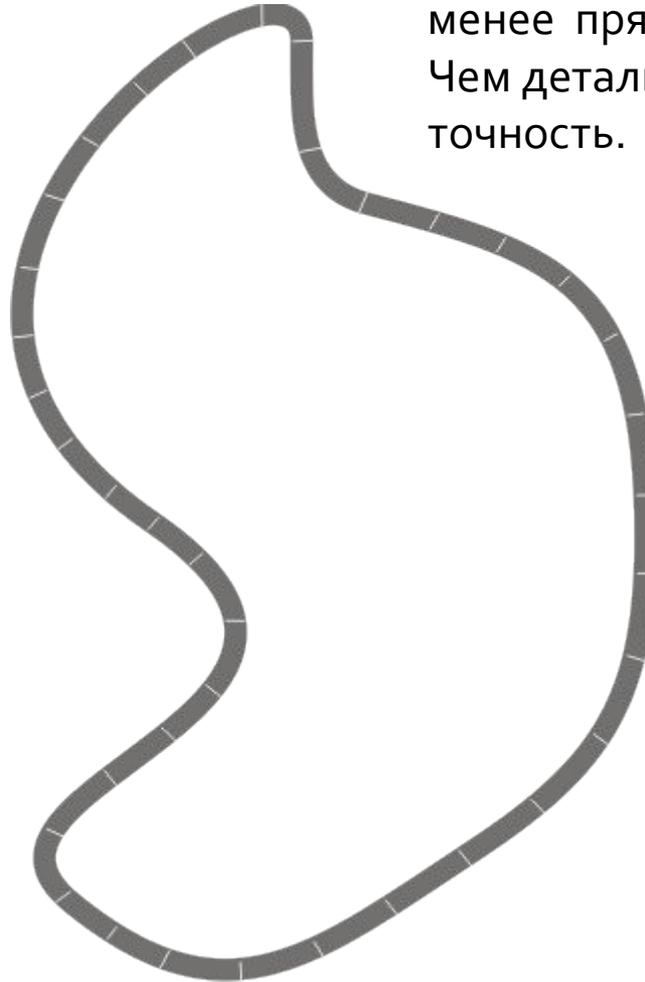
Чтобы проверить, действительно ли Вы понимаете, что означает та или иная формула, запрограммируйте вычисления с ее помощью.



Рассчитать коэффициент самоиндукции  $L_{aa}$  для произвольного контура. Этот коэффициент численно равен потоку, создаваемому в контуре единичным током

## Расчет коэффициента самоиндукции

Разбиваем контур на более или менее прямолинейные участки.  
Чем детальнее разбиение, тем выше точность.



# Расчет коэффициента самоиндукции

Каждому участку сопоставляем свой вектор  $d\vec{l}$



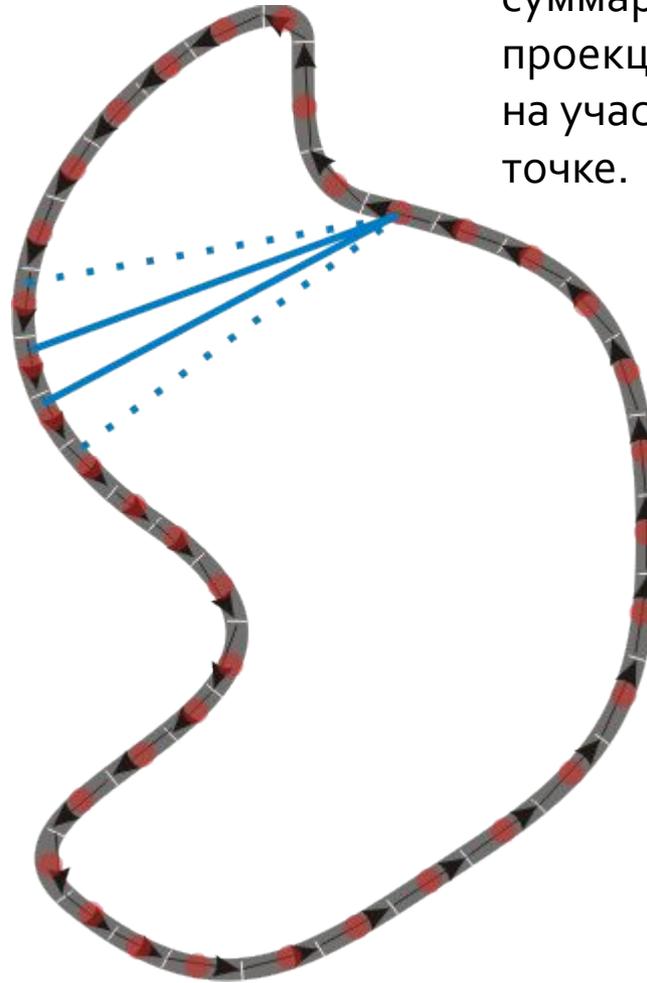
## Расчет коэффициента самоиндукции

Посередине каждого участка  
Размещаем точки, в которых будем  
считать проекцию векторного  
потенциала (под интегралом стоит  
скалярное произведение элементов)



## Расчет коэффициента самоиндукции

Для каждой точки рассчитываем суммарную (от всех отрезков) проекцию векторного потенциала на участок, соответствующей этой точке.



$$dA_k = \frac{\mu_0}{4\pi l_a^k} \sum_{i \neq k} \frac{dl_a^k \cdot dl_a^i}{R_{ik}}$$

Считаем, что в пределах участка векторный потенциал постоянен.

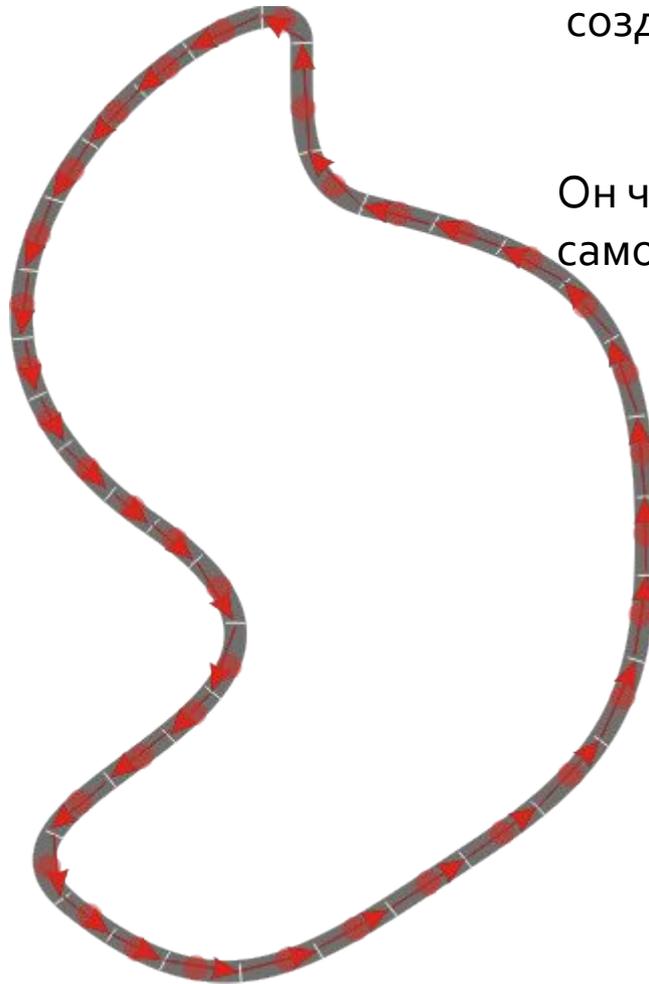
# Расчет коэффициента самоиндукции

Находим поток через контур,  
создаваемый собственным током

$$\Phi = \sum_k dA_k l_a^k$$

Он численно равен коэффициенту  
самоиндукции

$$\Phi = L_{aa} I$$



## Самоиндукция соленоида

На прошлой лекции мы получили для длинного соленоида  $B = \mu_0 n I$ .  
 Если пренебречь краевыми эффектами, энергия заключенная в магнитном поле соленоида

$$W = \frac{\mu_0 (nI)^2}{2} l \pi r^2 = \frac{LI^2}{2}$$

Индуктивность соленоида:  $L = \mu_0 n^2 l \pi r^2 = \frac{\mu_0 n l r}{2} \mathcal{L}$ .

Здесь  $\mathcal{L}$  - длина провода в соленоиде.

Точнее индуктивность соленоида можно рассчитать, вычислив векторный потенциал в точке на каждом  $i$ -том витке (в пределах одного витка он постоянен) от всех других ( $j$ -тых) витков.

$$A_{\varphi}^i = \sum_{j \neq i} \frac{\mu_0}{\pi k} \left(\frac{a_i}{r_j}\right)^{0.5} \left[ \left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K - E \right] \quad k^2 = \frac{4a \cdot r}{(a+r)^2 + z^2}$$

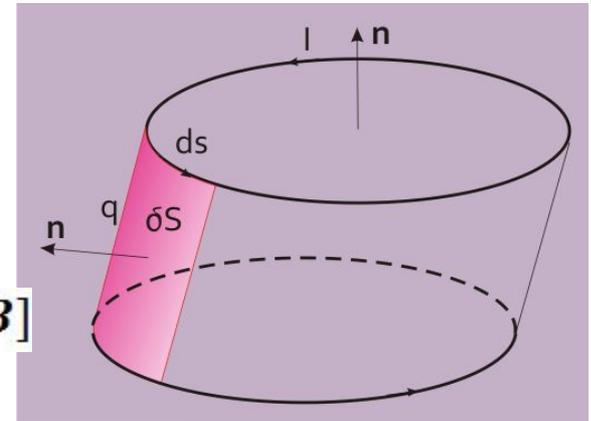
Затем векторный потенциал на каждом витке нужно умножить на его длину и полученные результаты просуммировать.

(поскольку  $K(1)$  стремится к бесконечности, членом суммы при  $j=i$  можно пренебречь, если витков много)

$$L = \sum_{k=1}^N A_{\varphi}^k 2\pi r_k$$

## Силы, действующие на контур в магнитном поле.

Пусть каждый элемент контура под действием поля испытал малое перемещение  $q$  при неизменной силе тока. Работа, совершенная над элементом  $ds$   $\mathbf{qF} = I\mathbf{q}[ds \times \mathbf{B}]$ . Работа, совершенная над контуром:



$$\delta A = \oint \mathbf{qF} ds = I \oint \mathbf{q}[ds \times \mathbf{B}] = I \oint \mathbf{B}[\mathbf{q} \times ds] = I \oint \mathbf{B} \delta S$$

$\delta A = I \int_{\Delta} \mathbf{B} \delta S = I \int_{\Delta} B_n \delta S = I \delta \Phi$  — работа, совершенная над контуром при перемещении.  $\delta A$  — работа, совершенная над элементом контура при перемещении на  $q$  по поверхности, описанная всеми элементами контура при перемещении.

**Работа сил магнитного поля равна изменению магнитного потока через контур, умноженному на ток.**

Если при перемещении не меняется магнитный поток через контур, то поле не совершает работы.

## «Потенциальная» функция

Введем обозначение  $U = -I\Phi$  тогда  $\delta A = -(\delta U)_{I=const}$  Работа сил магнитного поля равна убыли функции  $U$ , которая играет роль потенциальной или силовой функции тока в магнитном поле. К ней можно применять правила аналитической механики: Если  $U$  зависит от каких-либо обобщенных координат  $q_i$ , характеризующих положение контура, то обобщенная сила  $\theta_i$ , действующая на ток в направлении  $q_i$ , равна  $\theta_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$ . Однако, нельзя отождествлять  $U$  с потенциальной энергией магнитного поля, поскольку она не принимает во внимание работу электродвижущих сил, индуцируемых магнитным полем в движущемся проводнике.

**Устойчивое равновесие контура постоянного тока соответствует минимуму потенциальной функции, т.е. максимуму магнитного потока  $\Phi$ .**

Поскольку мы рассматривали работу при неизменном токе в контуре, то изменение потока может быть связано лишь с другими контурами. Пусть есть один внешний контур. Его поток через первый контур:  $\Phi_{21} = L_{21}I_2$

$$U_{21} = -L_{21}I_2I_1 \quad \delta A = -(U_{21})_I = I_1I_2\delta L_{21} \quad \theta_i = -\frac{(\partial U_{21})_I}{\partial q_i} = I_1I_2 \frac{\partial L_{21}}{\partial q_i}$$

Видно, что механическое взаимодействие замкнутых токов удовлетворяет третьему закону Ньютона, так как  $L_{12} = L_{21}$ .

## Пример: «Рамка в однородном поле»

Рамка площадью  $S$  обтекается током  $I$ . Закреплена так, что может вращаться вокруг оси, перпендикулярной  $B$ .

Магнитный поток через рамку  $\Phi = BS \cos \theta$ .

Потенциальная функция:  $U = -IBS \cos \theta$ .

Обобщенная координата:  $\theta$  ей соответствует обобщенная сила : момент  $N$ .

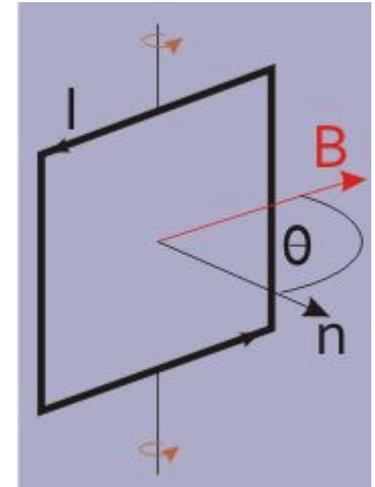
$$N = - \frac{\partial U}{\partial \theta} = -IBS \sin \theta$$

Положениям равновесия рамки соответствуют  $N=0$  т.е.

$$\theta = 0 \quad \text{и} \quad \theta = \pi$$

Первое соответствует минимуму потенциальной функции, а второе максимуму.

Поле стремится повернуть рамку так, чтобы нормаль совпала с направлением поля.

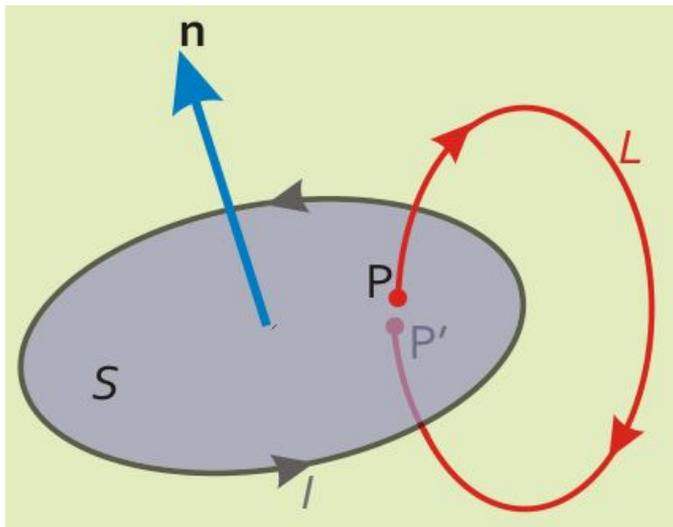


## Скалярный потенциал магнитного поля

Электродинамика позволяет решать возникающие задачи несколькими способами. Одним из таких способов является введение скалярного магнитного потенциала, удобного при описании поля на некотором расстоянии от контуров с током, хотя это и не необходимое требование.

Скалярный потенциал электростатического поля удалось ввести, поскольку  $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ . Векторный потенциал магнитного поля нам пришлось ввести, поскольку  $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$  не равен нулю. Но в области, где нет токов ничто не мешает использовать скалярный потенциал, который будем обозначать буквой  $\psi$ , причем  $\Delta \psi = 0$ .

Однако, необходимо договориться, как в этом случае описывать токи.



Введем перегородку  $S$ . Рассмотрим циркуляцию вектора  $\mathbf{B}$  на пути  $L$  от точки  $P$  до  $P'$ . Поскольку эти точки близки, то для скалярного потенциала циркуляция должна быть равна нулю, но по закону полного тока она равна  $\mu_0 I$ . Оба требования могут быть удовлетворены, если допустить, что на перегородке происходит скачок потенциала  $\psi - \psi' = \mu_0 I$ . Воображаемая перегородка является поверхностью разрыва потенциала.

В лекции 3 было введено понятие электрического диполя. (напоминание)

## Потенциал диполя

Потенциал диполя равен разности потенциалов зарядов.  $R'_i$

Найдем  $R'_i = R_0 - R_i$        $R_i'^2 = R_0^2 - 2R_0R_i + R_i^2$

$$\frac{1}{R'_i} = \frac{1}{R_0} \left( 1 - \frac{2R_0R_i}{R_0^2} + \frac{R_i^2}{R_0^2} \right)^{-0.5} = \frac{1}{R_0} \left( 1 + \frac{R_0R_i}{R_0^2} \right)$$

$$\varphi = \frac{1}{R_0} (e^+ + e^-) + \frac{pR_0}{R_0^3} = \frac{pR_0}{R_0^3}$$

Определим:  $\mathbf{P} = \mathbf{D} - \varepsilon_0 \mathbf{E}$       тогда

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \operatorname{div} \mathbf{P}) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho')$$

$\rho'$  - связанный объемный заряд.

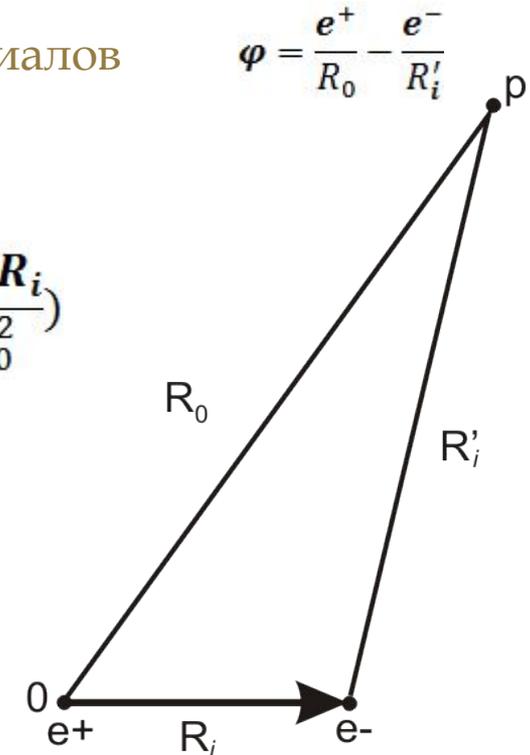
Уравнение Пуассона для диэлектрика

$$\Delta \varphi = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho')$$

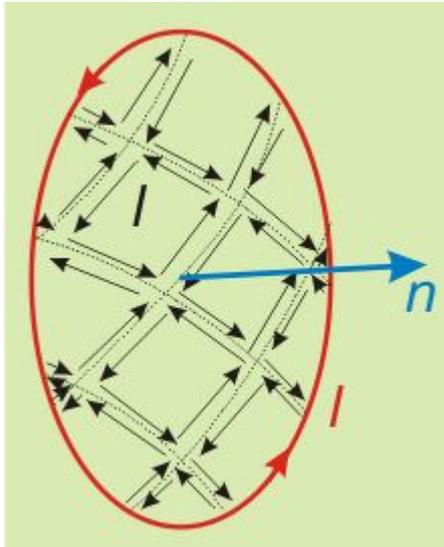
Граничные условия для диэлектрика

$$n(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0} n(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) - \frac{1}{\varepsilon_0} n(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) = \frac{1}{\varepsilon_0} (\varpi - \varpi')$$

$\varpi'$  - связанный поверхностный заряд

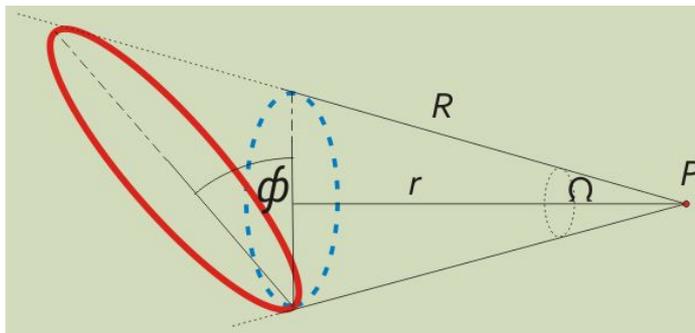


# Скалярный потенциал магнитного поля



Если введенную перегородку мысленно разбить на ячейки с токами, текущими по границам и равными току в контуре, то, с одной стороны, поле контура не изменится, так как токи в соседних ячейках компенсируют друг друга, а с другой стороны, каждую ячейку можно рассматривать как элементарный диполь с моментом  $d\mathbf{m} = I ds \mathbf{n} = I ds \mathbf{n}$ . По аналогии с электрическим моментом

$$\psi = \frac{dm \mathbf{nR}}{4\pi R^3} = \frac{I ds}{4\pi R^2} \frac{nR \cos\phi}{R} = \frac{I d\Omega}{4\pi}$$



**Телесный угол** — часть пространства, которая является объединением всех лучей, выходящих из данной точки  $P$  (вершины угла) и пересекающих некоторую поверхность (которая называется поверхностью, стягивающей данный телесный угол).

Телесный угол измеряется отношением площади той части сферы с центром в вершине угла, которая вырезается этим телесным углом, к квадрату радиуса сферы:

# Примеры (1)

Определить магнитное поле на оси кругового тока радиуса  $a$  на расстоянии  $r$  от него

Из точки наблюдения А контур тока виден под углом где площадь сегмента сферы радиуса ограниченного контуром тока.

$$\Omega = 2\pi \int_0^{\vartheta_0} \sin\vartheta d\vartheta = 2\pi(1 - \cos\vartheta_0) = 2\pi\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)$$

Поэтому магнитный потенциал в точке наблюдения равен

$$\psi = \frac{2\pi\mu_0 I}{4\pi} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)$$

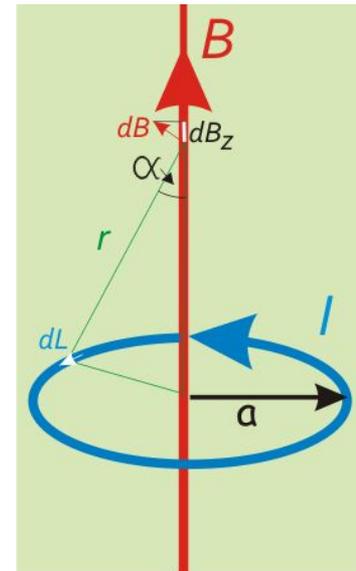
Магнитное поле

$$B_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\mu_0}{2} \frac{m}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

Здесь  $m = \pi a^2 I$  - магнитный момент витка с током.

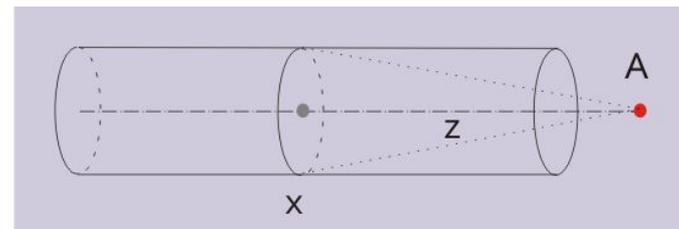
Полученное выражение совпадает с полученным в лекции 6

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$



## Примеры (2)

Поле на оси однослойного соленоида.



Из точки A сечение  $x$  видно под углом

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right)$$

Скалярный потенциал:

$$\psi = \frac{2\pi\mu_0 I n}{4\pi} \int_{l+z}^z \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right) = \frac{2\pi\mu_0 I}{4\pi} [\sqrt{a^2 + (l+z)^2} - \sqrt{a^2 + z^2} - l]$$

Магнитное поле:

$$B = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\mu_0 I n}{2} \left[ \frac{l+z}{\sqrt{a^2 + (l+z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]$$

Этот результат совпадает с  $B = \frac{\mu_0 N I}{2L} (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$ , полученным в Лекции 6.

## Магнитный момент тока

Магнитный момент контура:  $\mathbf{M} = \int dm = I \int d\mathbf{S} = I\mathbf{S}$   
Знак момента совпадает с нормалью к плоскости .

Скалярный потенциал момент<sup>а</sup>  
$$\psi = \frac{\mathbf{M}\mathbf{R}}{4\pi R^3}$$

Магнитное поле: 
$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad} \left( \frac{\mathbf{M}\mathbf{R}}{R^3} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{M}\mathbf{R})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{M}}{R^3} \right)$$

Если точка наблюдения находится далеко от контура, то поле зависит только от момента (дипольного, квадрупольного или высших порядков).

Потенциальная энергия диполя во внешнем поле:  $U = -\mathbf{M}\mathbf{B}$ .

Сила, действующая на диполь:  $\mathbf{F} = -\text{grad}U = \text{grad}(\mathbf{M}\mathbf{B})$ .

Момент приложенных к нему сил:  $\mathbf{N} = [\mathbf{M} \times \mathbf{B}]$ .



**Спасибо за внимание**



Линейные цепи с синусоидальными токами  
и напряжениями

- 2.1. Расчет простейших цепей . .
- 2.2. Двухполюсник в цепи синусоидального тока . .
- 2.3. Расчет разветвленных цепей синусоидального тока
- 2.4. Резонанс и согласование . . . . .
- 2.5. Электрические цепи с индуктивно связанными  
элементами .

## Самоиндукция двухпроводной линии

Воспользуемся выражением  $R = \frac{1}{2} \int A_j dV$   
Оно удобно тем, что интеграл берется только по объему, где протекают токи.

