Исследование функций и построение графиков

Задание

1. Записать план исследования функции
2. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ и построить ее график.

Область определения функции

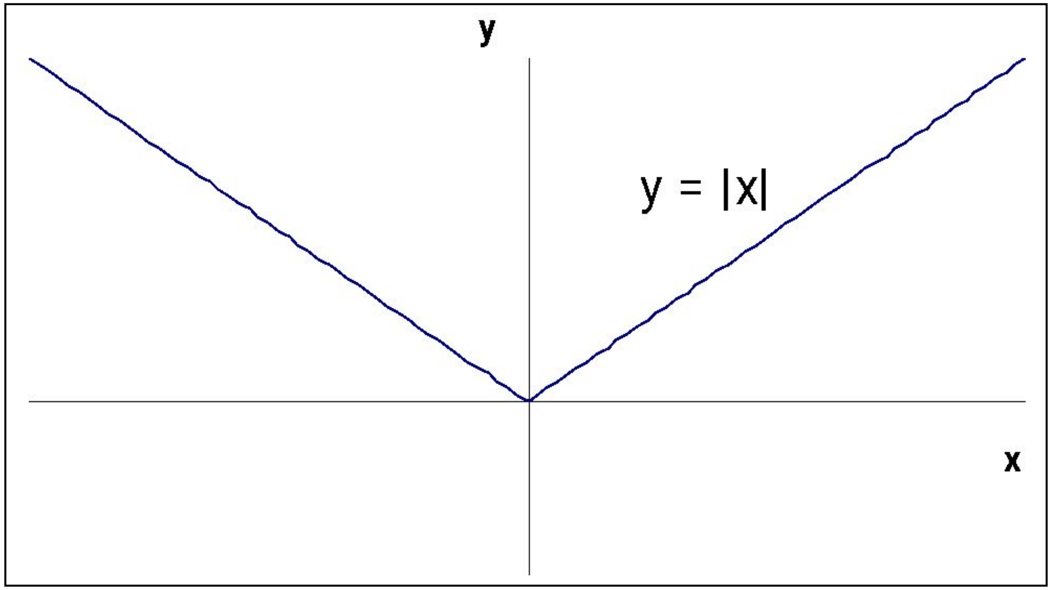
Определение. Областью определения функции называется множество значений независимой переменной, при которых функция определена.

Примеры:

$y = ln(x+1)$ $\qquad D_f = (-1, +\infty)$

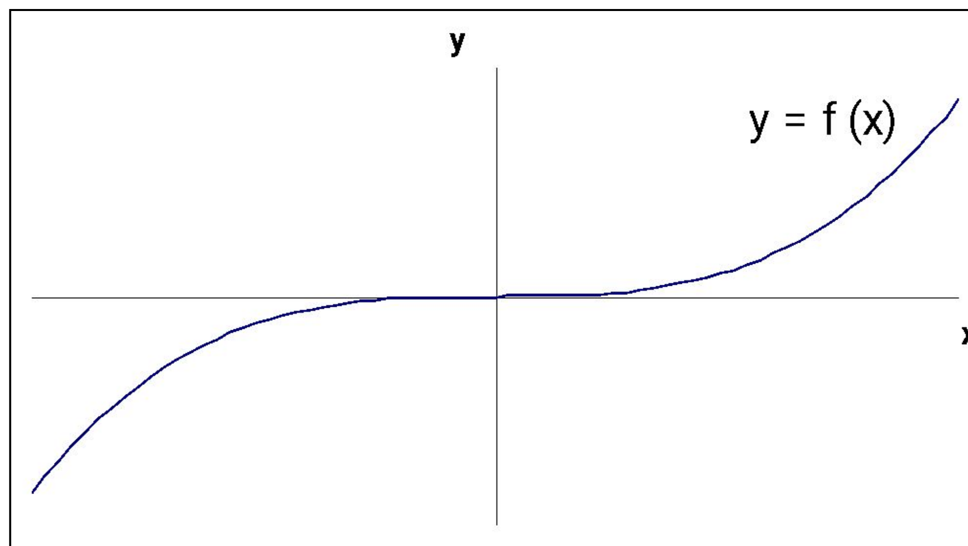
$$y = \frac{2}{(x-3)^2} \qquad D_f = R \setminus \{3\}$$

Четные и нечетные функции



Функция $y=f(x)$ называется <u>четной</u>, если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = f(x)$$

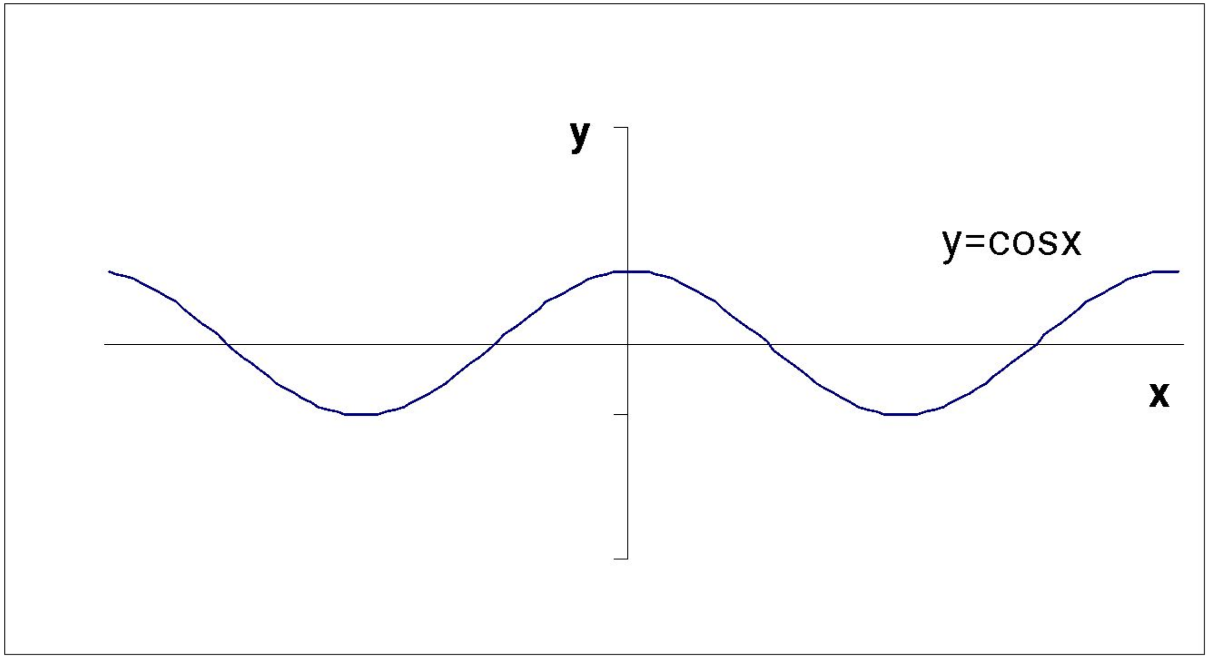


Функция $y=f(x)$ называется <u>нечетной</u>, если

$$\forall x \in D_f \quad f(-x) = -f(x)$$

Периодичные функции

Определение. Функция $y=f(\mathrm{x})$ называется <u>периодической</u>, если существует такое положительное число T, что если x принадлежит D_f, то $x\pm\mathrm{T}$ также принадлежит D_f и $f(x+\mathrm{T})=f(\mathrm{T})$.



Точки пересечения с осями координат

При исследовании функции необходимо найти координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

Абсциссы точек пересечения графика функции с осью Ох находятся из системы уравнений $y=f(x)$ и $y=0$, а ординаты точек пересечения графика функции с осью Оу находятся из системы уравнений $y=f(x)$ и $x=0$.

Непрерывность. Характер точек разрыва

Функция *y=f(x)* называется ***непрерывной в точке*** $\boldsymbol{x_0}$, если функция определена в точке x_0 и предел функции в точке x_0 равен значению функции в точке x_0.

$$x_0 \in D_f \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Функции, непрерывные в каждой точке из области определения функции, называются ***непрерывными функциями***.

Примеры непрерывных функций: $y=\cos x$, $y=\sin x$, $y=e^x$, $y=P_n(x)$ (многочлен степени n).

Точки разрыва функции

Определение. **Точкой разрыва функции** называется точка из области определения функции, в которой функция не является непрерывной.

Пример. Функция

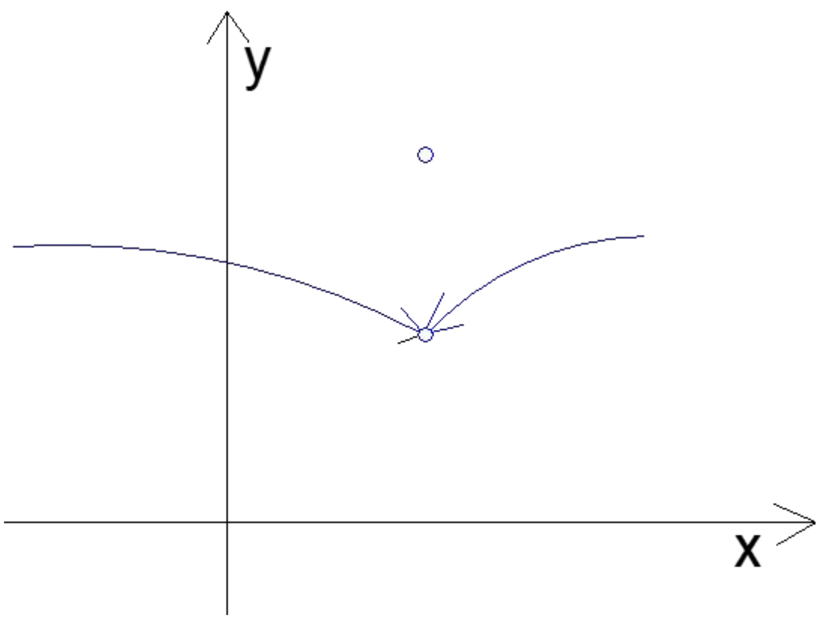
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \ если \ \ x \neq 0; \\ 0, \ если \ \ x = 0 \end{cases}$$

разрывна в 0, так как $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1, \ f(0) = 0$

Классификация точек разрыва

Точки устранимого разрыва

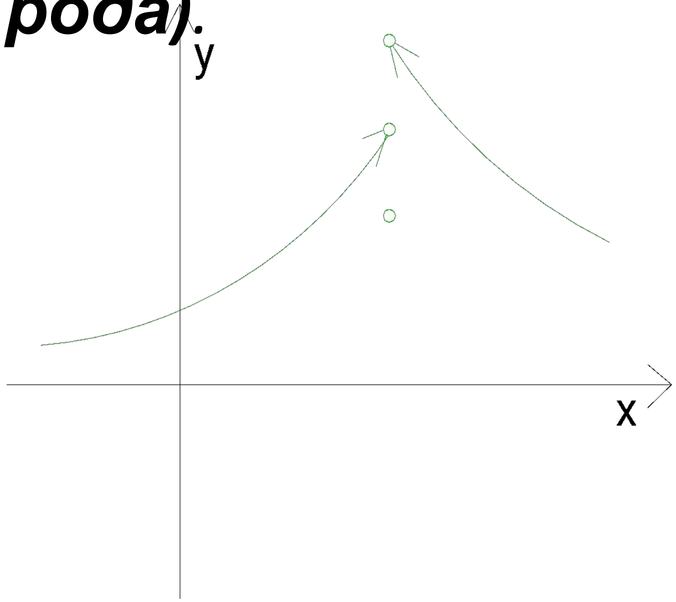
Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы функции, равные между собой, но не равные значению функции в точке x_0, то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***.



$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) \neq f(x_0)$$

Классификация точек разрыва
Точки скачка

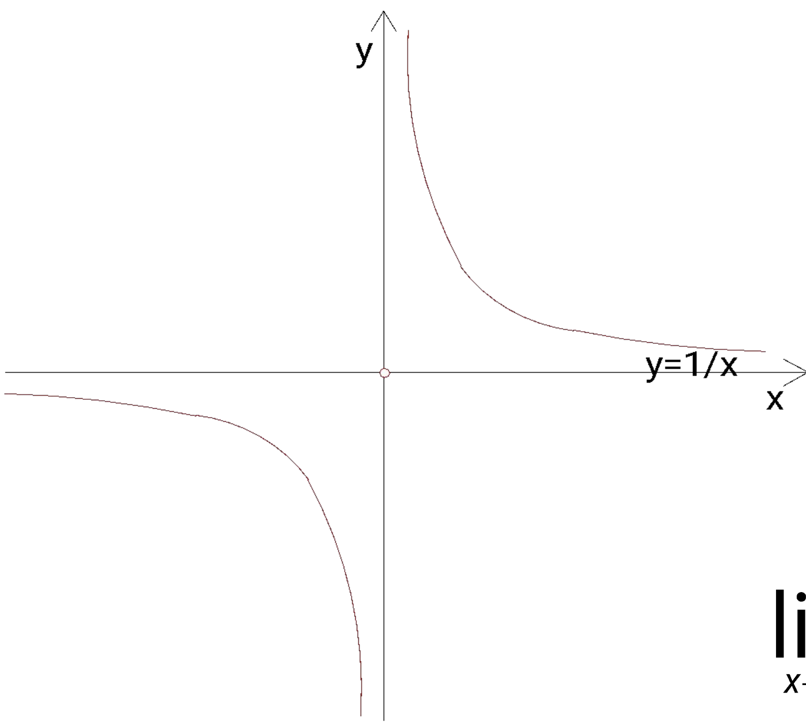
Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы функции, не равные между собой, то точка x_0 называется ***точкой скачка (точкой разрыва I рода).***



$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 +} f(x)$$

Классификация точек разрыва
Точки разрыва II рода

Если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 не существует или бесконечен, то точка называется ***точкой разрыва* II *рода***.



$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x \neq 0; \\ 0, \text{ если } x = 0. \end{cases}$$

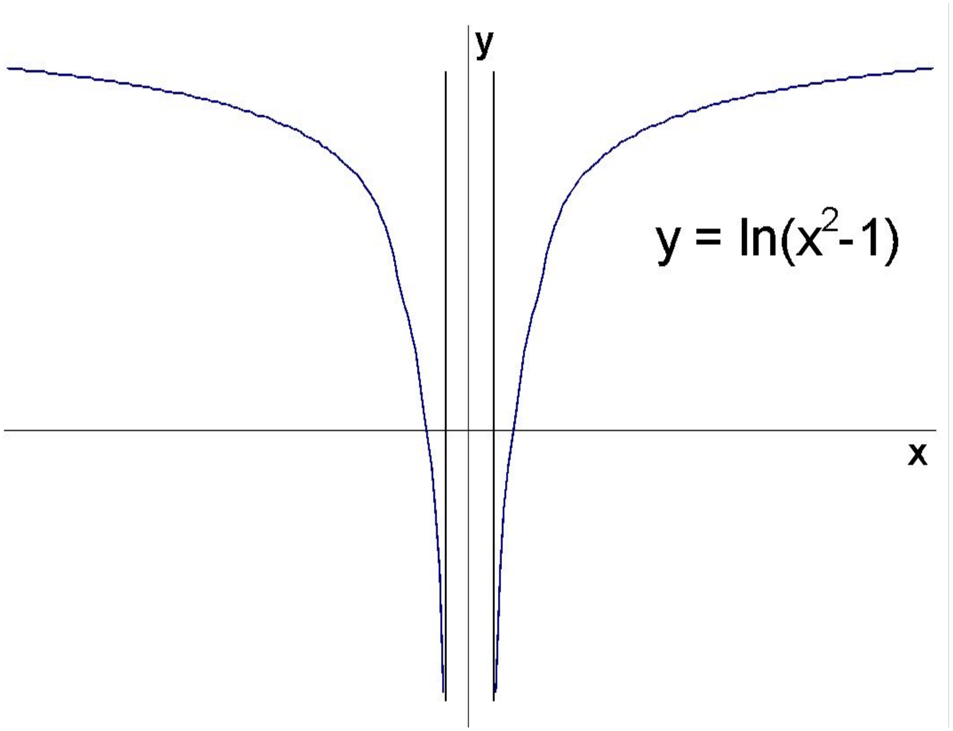
$$\lim_{x \to 0-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 0+} f(x) = +\infty$$

Вертикальные асимптоты

Прямая $x=x_0$ называется <u>вертикальной асимптотой</u> графика функции при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = \infty$$ или

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = \infty$$



Наклонные асимптоты

Если существует прямая *y=kx+b* такая, что

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$, то эта прямая называется

<u>асимптотой графика функции f</u> при $x\to+\infty$.

Для того чтобы прямая $y=kx+b$ была

асимптотой, необходимо и достаточно,

чтобы выполнялись следующие условия:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k, \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=b.$$

Экстремумы функции

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (a, b). Точка x_0 интервала (a, b) называется <u>точкой строгого максимума (минимума)</u> функции $f(x)$, если в некоторой проколотой окрестности точки x_0 $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки минимума и точки максимума функции называются ***точками экстремума*** функции.

Необходимое условие экстремума. Пусть точка x_0 - точка экстремума функции. Тогда либо производная функции в этой точке равна 0, либо не существует.

Исследование функции на монотонность

Известно, что если $f\,'(x)>0$ ($f\,'(x)>0$) в (a, b), то функция $f\,(x)$ строго возрастает (строго убывает) в (a, b).

Рассмотрим функцию $f(x) = x + 1/x$

$$f\,'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

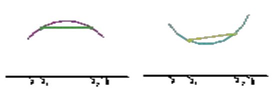
Критические точки функции $x=\pm 1$. $f\,'(x)>0$ при $x<-1$ и при $x>1$; $f\,'(x)<0$ при $-1<x<0$ и при $0<x<1$.

$x \in (-\infty, -1]; [1, +\infty)$ функция возрастает

$x \in (-\infty, -1]; [1, +\infty)$ функция убывает

Выпуклость функции

Функция $y=f(x)$, определенная на интервале (a, b), называется ***выпуклой вверх*** (***вниз***) в интервале (a, b), если для любых x_1 и x_2 из интервала (a, b) из того, что $x_1<x_2$, следует, что часть графика функции между точками $(x_1,f(x_1))$ и $(x_2,f(x_2))$ лежит выше (ниже) хорды, соединяющей эти точки.



Выпуклость функции.

Точки перегиба

Также говорят, что график функции $f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость, направленную вниз (вверх), если график этой функции в пределах (a, b) лежит не ниже (не выше) любой своей касательной.

Если график функции в точке $(x_0, f(x_0))$ переходит с одной стороны касательной на другую, то точка x_0 называется ***точкой перегиба функции*** $f(x)$.

Достаточные условия выпуклости функции и существования точек перегиба

Достаточное условие строгой выпуклости функции

Если на интервале (a,b) $f''(x)>0$, то на интервале (a,b) функция выпукла вниз, и если на интервале $f''(x)<0$, то

на интервале (a,b) функция выпукла вверх.

Достаточное условие строгой выпуклости функции

Если в левой и правой полуокрестностях некоторой точки x_0 $f''(x)$ имеет противоположные знаки, то точка x_0 – точка перегиба функции.

Пример. Исследуем функцию $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$ и построим её график.

1) $D(f) = R$, поскольку оба сомножителя в выражении $f(x)$ определены при любом . Область значений $E(f)$ найдём после того, как отыщем локальные экстремумы функции.
2) Функция не является ни чётной, ни нечётной; не является она и периодической.
3) Область определения не имеет граничных точек, значит, нет и вертикальных асимптот графика.

4) Будем искать наклонные асимптоты в виде

y = kx + b. Коэффициент *k* найдём по формуле:

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ при $x \to +\infty$ имеем

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x-2)e^x = +\infty,$$

так что при $x \to +\infty$ асимптоты нет, причём

функция *f(x)* стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$.

При $x \to -\infty$ имеем:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x^2 - 2x)e^x}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x-2}{e^{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Теперь найдём значение *b* по формуле $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - kx \right]$.

Имеем: $b = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[f(x) - 0x \right] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 2x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x-2}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2}{e^{-x}} = 0$

Таким образом, $k=0$ и $b=0$, так что при $x \to -\infty$ асимптота имеет уравнение $y=0$, то есть совпадает с осью *Ox*.

5) Точка пересечения с осью *Oy* равна $f(0)=0$. Заодно нашли одну точку пересечения с осью *Ox*.

Чтобы найти все точки пересечения графика с осью *Ox*, решаем уравнение $(x^2 - 2x)e^x = 0$.

Поскольку $e^x \neq 0$, решаем уравнение $x^2 - 2x = x(x-2) = 0$, откуда получаем два корня: $x=0$ и $x=2$.

Так как точек разрыва нет, то имеем три интервала знакопостоянства функции: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$.

Знак функции определяется множителем $x^2 - 2x$, поскольку $e^x > 0$ при всех x. Значит, f(x)>0 при $x \in (2; +\infty)$ и при $x \in (-\infty; 0)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (0; 2)$.

6) Вычислим производную: $f'(x) = (x^2 - 2x)e^x + (2x - 2)e^x = (x^2 - 2)e^x$.

Интервалы возрастания задаются неравенством $f'(x) > 0$, то есть, с учётом того, что $e^x > 0$, неравенством $x^2 - 2x > 0$.

Решением этого неравенства служит множество $(-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

На этих двух интервалах функция возрастает.

Легко видеть, что на интервале $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, следовательно, это интервал убывания функции. В точке -√2 возрастание сменяется убыванием, значит, точка -√2 - точка локального максимума.

Значение функции в этой точке равно

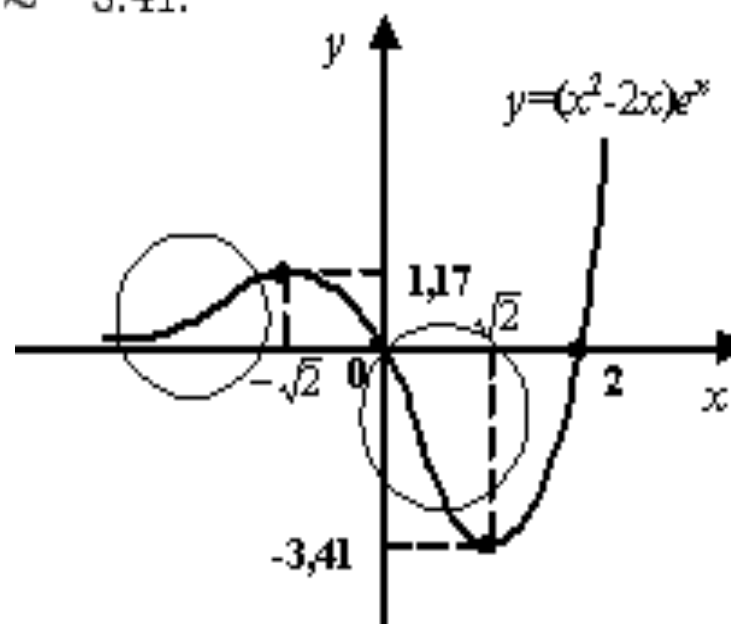
$$f_{\max} = f(-\sqrt{2}) = (2 + 2\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 1.17.$$

В точке √2 убывание сменяется возрастанием, значит, точка √2 - точка локального минимума функции. Значение функции в точке минимума таково:

Теперь мы можем примерно представить, как идёт график функции:

$$f_{\min} = f(\sqrt{2}) = (2 - 2\sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -3.41.$$

Эскиз графика функции *f(x)*



Становится очевидно, что область значений функции -- это

$$\mathcal{E}(f) = [f_{\min}; +\infty) \approx [-3.41; +\infty).$$

7) По эскизу графика видно, что где-то в местах, обведённых кружочками, должно смениться направление выпуклости, то есть должны быть точки перегиба. Для исследования этого найдём вторую производную:

$$f''(x) = (x^2 - 2)e^x + 2x\,e^x = (x^2 + 2x - 2)e^x.$$

Решим неравенство $f''(x) > 0$, эквивалентное неравенству $x^2+2x-2>0$.

Решением этого квадратного неравенства служит объединение интервалов $(-1+\sqrt{3}; +\infty) \approx (0.7; +\infty)$ и $(-\infty; -1-\sqrt{3}) \approx (-\infty; -2.7)$. На этих интервалах функция выпукла.

Ясно, что на интервале $(-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}) \approx (-2.7; 0.7)$ функция будет вогнутой. Тем самым точки $x_1 = -1-\sqrt{3} \approx -2.7$ и $x_2 = -1+\sqrt{3} \approx 0.7$ это точки перегиба. Значения функции в точках перегиба такие:

$$f(x_1) = (6+4\sqrt{3})e^{-1-\sqrt{3}} \approx 0.84; \qquad f(x_2) = (6-4\sqrt{3})e^{-1+\sqrt{3}} \approx -1.93.$$

8) Осталось построить окончательный чертёж:

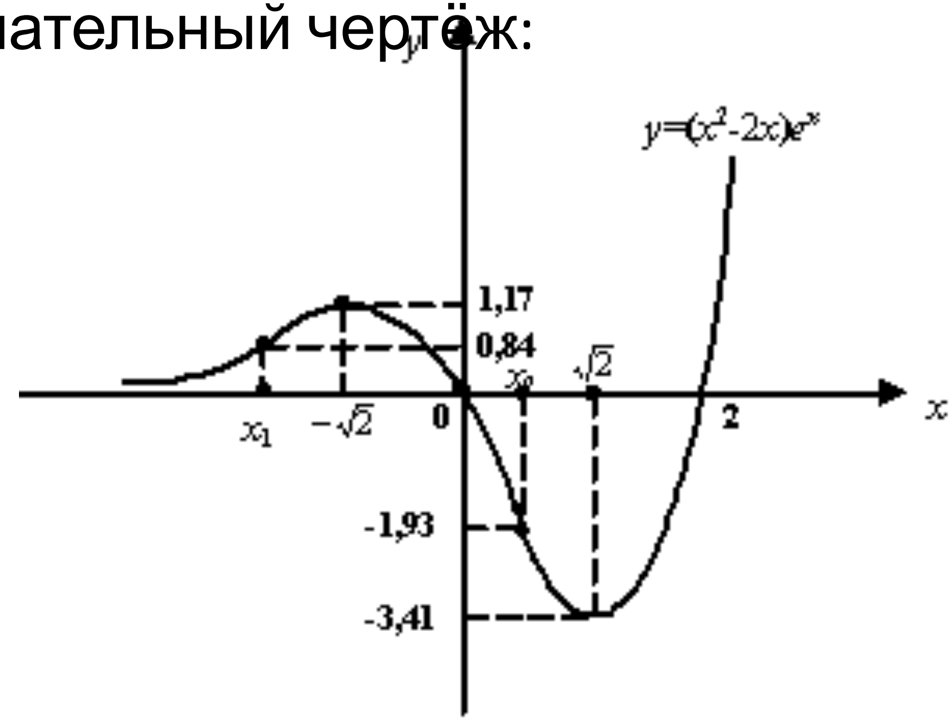


График функции *$(x^2 - 2x)e^x$* .