Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Формула

итоговой (экзаменационной) оценки по действительному анализу

Итог. оценка = $\frac{1}{3}$ (Т1 + Т2 + П),

где Т1 – оценка за 1-й коллоквиум (по теории),

Т2 – оценка за 2-й коллоквиум (по теории),

П – оценка по практике

Примечание. «Область значений» каждой из оценок – от 2 до 5 баллов.

Введение

Одним из основных понятий математического анализа является понятие интеграла. Классическое определение интеграла, завершенное в прошлом веке Коши и Риманом, достаточно для разрешения многих задач математики, механики и физики. Но для ряда существенных областей математики и физики, возникших в недавнее время, оно оказывается недостаточным.

Во-первых, оно применимо лишь к функциям одного или нескольких переменных, тогда как в настоящее время необходимо иметь возможность интегрирования на многообразиях, не описываемых никаким конечным числом вещественных параметров. Это требуется, в частности, в теории вероятностей, в теории уравнений с частными производными, а также в гидродинамике и в квантовой физике.

Во-вторых, даже в случае одного или нескольких переменных классическое определение Римана дает возможность интегрировать сравнительно узкий класс функций — непрерывных, кусочно непрерывных и некоторых других. Но можно построить последовательность функций, такую, что она будет удовлетворять «в среднем» условию сходимости Коши, а никакой предельной функции среди интегрируемых по Риману не окажется. Класс функций, интегрируемых по Риману, является, таким образом, неполным.

А требование полноты класса интегрируемых функций представляется необходимым чуть ли не в каждой области, имеющей дело с современным анализом. Общая концепция интеграла, развитая в работах крупнейших математиков нашего века (от Лебега до наших дней), свободна от указанных трудностей; она не нуждается в конечномерности области интегрирования и в ее однородности и приводит к достаточно широкой совокупности интегрируемых функций (полной относительно сходимости в среднем).

(Из книги : Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная)

Существуют два основных подхода к изложению общей теории интеграла; один из них начинается с аксиоматической теории меры (схема Лебега), другой — с понятия элементарного интеграла на совокупности элементарных функций (схема Рисса–Даниэля). В конечном счете оба подхода эквивалентны.

Наше изложение основано на схеме Рисса–Даниэля, в которой теория начинается с понятия интеграла на элементарных (ступенчатых) функциях и быстро, по сравнению со схемой Лебега, вводит в курс дела.

Анри Леон Лебе́г *(фр. Henri Léon Lebesgue; 28 июня 1875 — 26 июля 1941) — французский математик, член Парижской АН (1922), член–корреспондент АН СССР (1929). Наиболее известен как автор теории интегрирования, обобщающей обычное определение интеграла на более широкий класс функций. В 1976 г. имя Анри Лебега присвоено кратеру на видимой стороне Луны.*

Фридьеш Рис *(венг. Riesz Frigyes, в русскоязычных источниках его фамилия часто пишется «Рисс»; 22 января 1880 — 28 февраля 1956) —* ***венгерский математик, один из основателей современного функционального анализа.***

Даниэль Перси Джон *(Born 1889-01-09, Died 1946-05-25) – английский математик. Работы посвящены математическому анализу и функциональному анализу. Развил (1918—1919) принцип пренебрежения множествами меры нуль в общем понимании, ввел понятие бесконечного произведения мер в общую теорию интегрирования.*

Глава 1.
Интеграл Лебега

1. Ограниченные множества меры нуль

Определение множества меры нуль

Множество $A \subset [a, b] \subset \mathbb{R}^1$ называется *множеством меры нуль* (сокращенно ММН), если

$(\forall \varepsilon > 0)$ $(\exists \{\triangle_i\}$–конечная или счетная система интервалов)

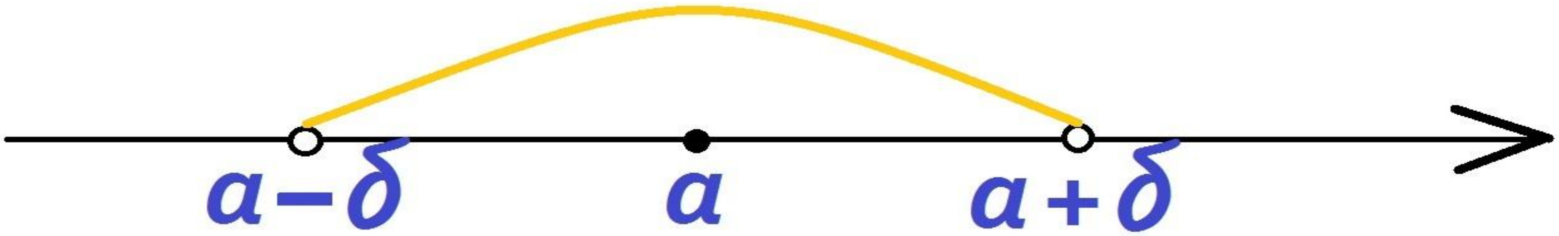
$$\left[\left(A \subset \bigcup_i \triangle_i\right) \wedge \left(\sum_i |\triangle_i| < \varepsilon\right)\right],$$

где для интервала $\triangle = (\alpha,\, \beta)$ его длину обозначаем $|\triangle| = \beta - \alpha$.

Примеры множеств меры нуль

1. Одноточечное множество $A=\{a\}$.

Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4}$. Открытое покрытие множества $A=\{a\}$ состоит из одного интервала $\Delta = (a-\delta, a+\delta)$, причем $|\Delta| = 2\delta = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.



2. Конечное множество $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$.

Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4n}$. Открытое покрытие множества A – это конечная система интервалов $\Delta_k = (a_k - \delta, a_k + \delta)$, причем сумма длин этих интервалов $\sum\limits_{k=1}^{n} |\Delta_k| = 2\delta n = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

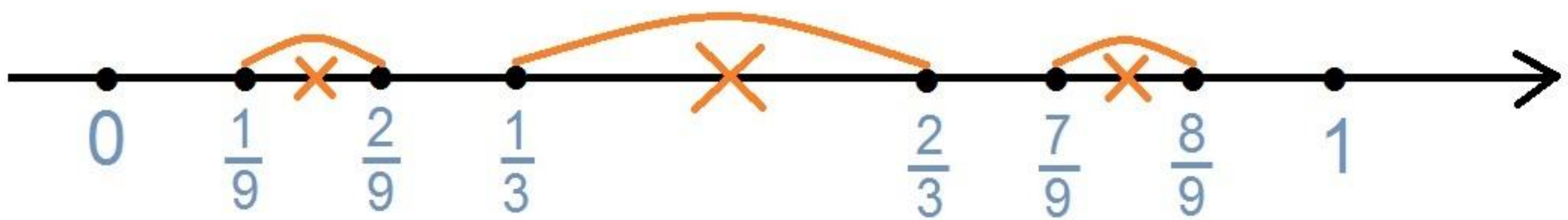
3. Счетное множество $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$.

Фиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Пусть $\delta_k = \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}$. Открытое покрытие множества A – это счетная система интервалов $\Delta_k = (a_k - \delta_k, a_k + \delta_k)$, причем сумма длин этих интервалов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\Delta_k| = 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k = 2 \cdot \dfrac{\varepsilon}{4} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

(здесь используется формула для вычисления суммы геометрической прогрессии: $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k = \dfrac{q}{1-q}$, $q = \dfrac{1}{2}$).

4. Множество Кантора – ММН, которое является множеством мощности континуум.

Это множество строится на $[0,1]$ следующим образом. Из отрезка $[0,1]$ исключается интервал $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$; затем из оставшихся двух отрезков $[0, \frac{1}{3}]$ и $[\frac{2}{3}, 1]$ (*отрезков первого ранга*) исключаются интервалы длины 3^{-2} с центрами в серединах указанных отрезков, то есть интервалы $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ и $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$; затем из оставшихся четырех отрезков (*отрезков второго ранга*) исключаются интервалы длины 3^{-3} с центрами в серединах этих отрезков, и так далее до бесконечности.



Множество D, оставшееся в $[0,1]$ после исключения всех интервалов, и есть *множество Кантора.*

Сумма длин удаленных из $[0,1]$ интервалов равна единице :

$\frac{1}{3}+2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{27}+... = \frac{1}{3}(1+\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+...) = \frac{1}{3}(1+\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}) = 1.$

Воспользовавшись задачей 1.6, получим, что D – ММН.

Множество $A \subset [a,b]$ называется *множеством полной меры*, если множество $[a,b] \setminus A$ является ММН.

Если некоторое свойство выполняется на множестве полной меры отрезка $[a,b]$, то говорят, что это свойство выполняется *почти всюду* (п.в.) на $[a,b]$.

Так, например, для функций $x(t)$ и $y(t)$, заданных на $[a,b]$, обозначение $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ означает, что множество $\{t \in [a,b] \mid x(t) \neq y(t)\}$ — ММН.

Пример. $$x(t) = \begin{cases} \cos t, & t \in [0,1] \setminus D, \\ \sin t, & t \in D \end{cases} \overset{\substack{\textit{почти}\\ \textit{всюду}}}{=} \cos t,$$

так как $[0,1] \setminus D$ — множество полной меры

отрезка $[0,1]$ (D — множество Кантора).

Лемма 1. *Объединение конечного или счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.*

Доказательство. Пусть $A = \cup_i A_i$, где все A_i ММН. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Каждое множество A_i покроем конечной или счетной системой интервалов $\{\triangle_j^i\}_j$ с суммой длин, меньшей $\varepsilon/2^i$. Тогда множество A окажется покрытым конечной или счетной системой интервалов $\{\triangle_j^i\}_{i,j}$:

$$A = \bigcup_i A_i \subset \bigcup_i \Big(\bigcup_j \triangle_j^i \Big) = \bigcup_{i,j} \triangle_j^i,$$

причем

$$\sum_{i,j} |\triangle_j^i| = \sum_i \sum_j |\triangle_j^i| < \sum_i \varepsilon/2^i \leq \varepsilon.$$

Итак, A – ММН. Лемма доказана.