

Департамент охраны здоровья населения Кемеровской области  
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение  
«Кемеровский областной медицинский колледж»  
Прокопьевский филиал  
(ПФ ГБПОУ «КОМК»)

**Тема:** Дифференцирование и интегрирование  
**Занятие 27:** Применение производной к исследованию  
функций и построению графиков  
**Дисциплина:** Математика

**Специальность:** 34.02.01 Сестринское дело,  
31.02.02 Акушерское дело

**Тип занятия:** практическое

**Разработал:** преподаватель

Чернявская Алина Геннадьевна

Прокопьевск, 2020

# Точки

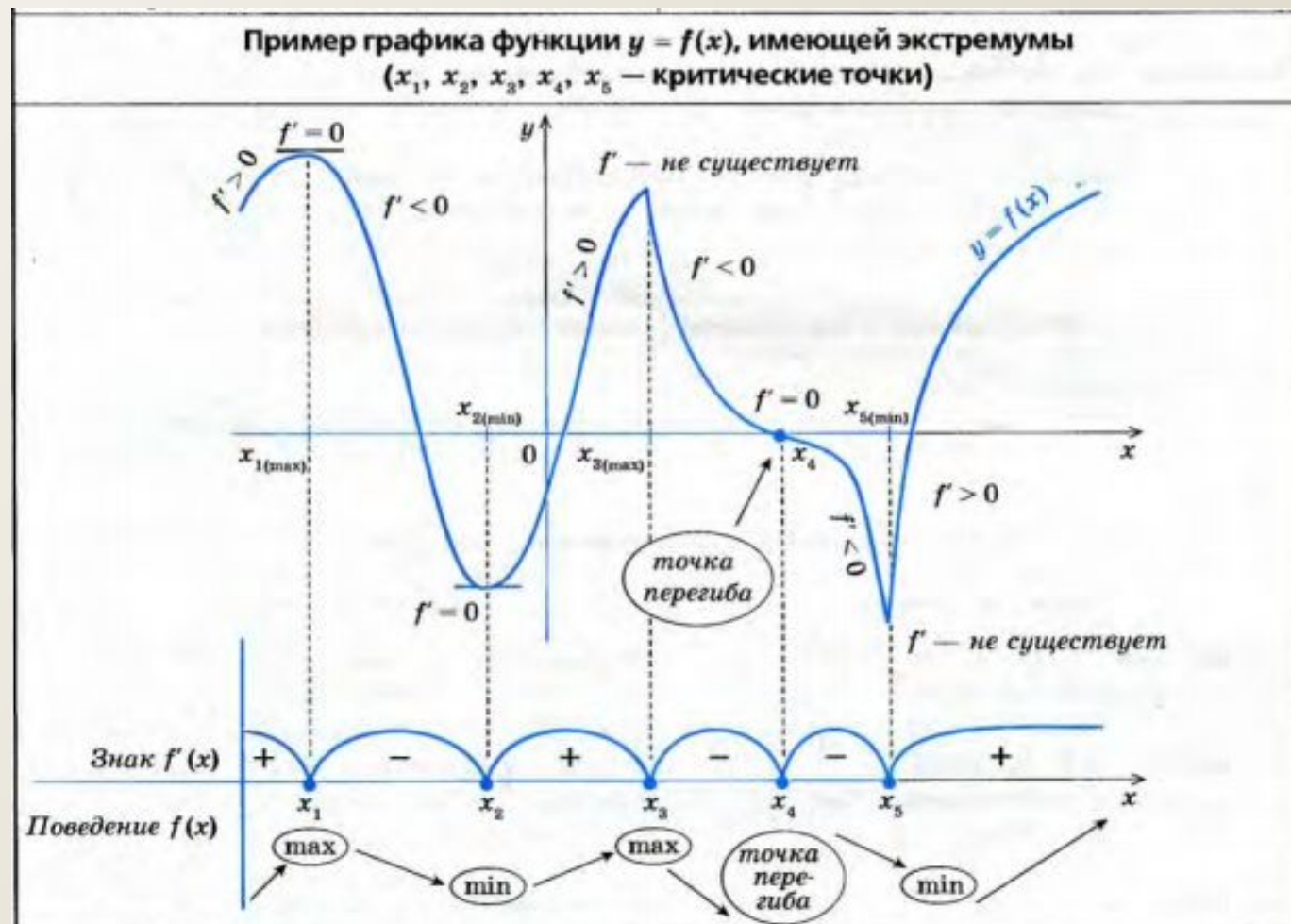
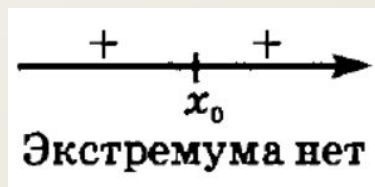
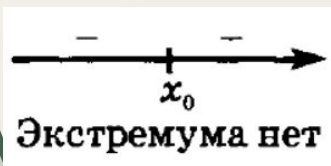
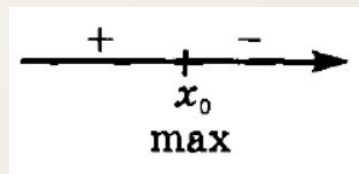
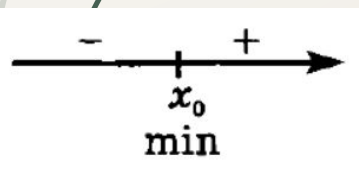
**Стационарные точки** – внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю

**Критические точки** – внутренние точки области определения функции, в которых функция непрерывна, но производная не существует

**Точки перегиба** – точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла вниз и вверх

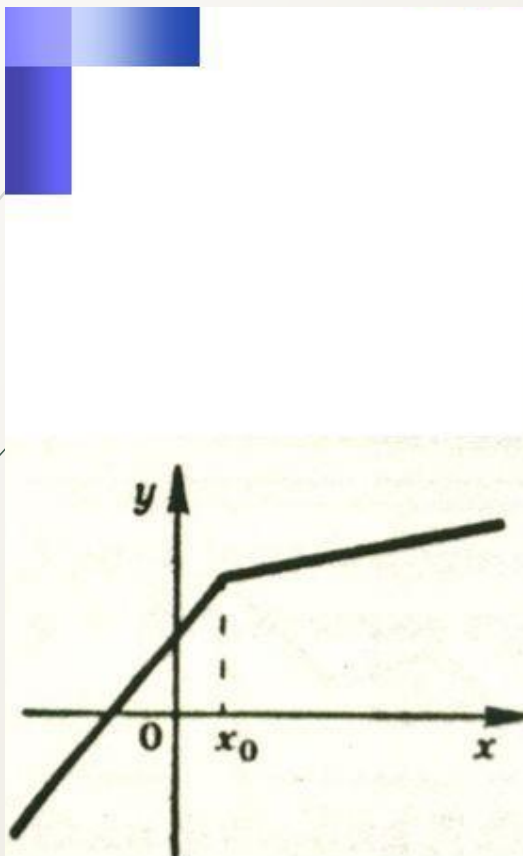
**Точка экстремума** – точка минимума и максимума функции

(лат. Extremum – «крайний»)

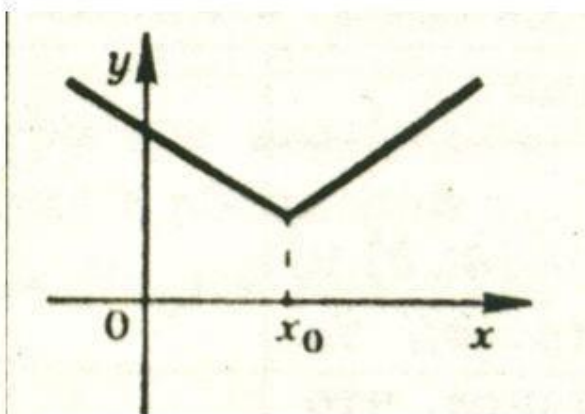


**Критические точки** – внутренние точки области определения функции, в которых

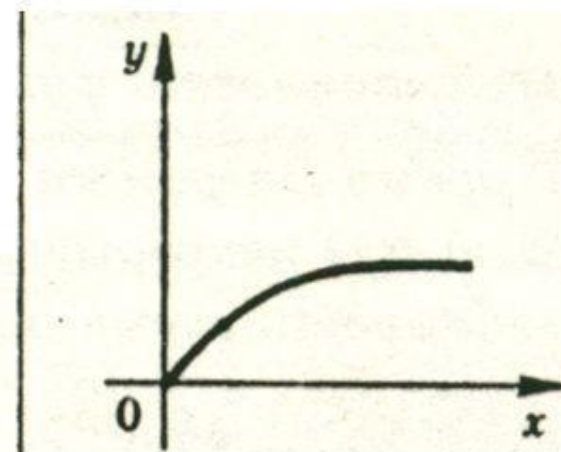
функция непрерывна, но производная не существует



$f'(x_0)$  не существует;  
 $x_0$  – крит. точка;  
 $f(x_0)$  не является  
экстремумом.



$f'(x_0)$  не существует;  
 $x_0$  – крит. точка;  
 $f(x_0) = f_{\min}$ .

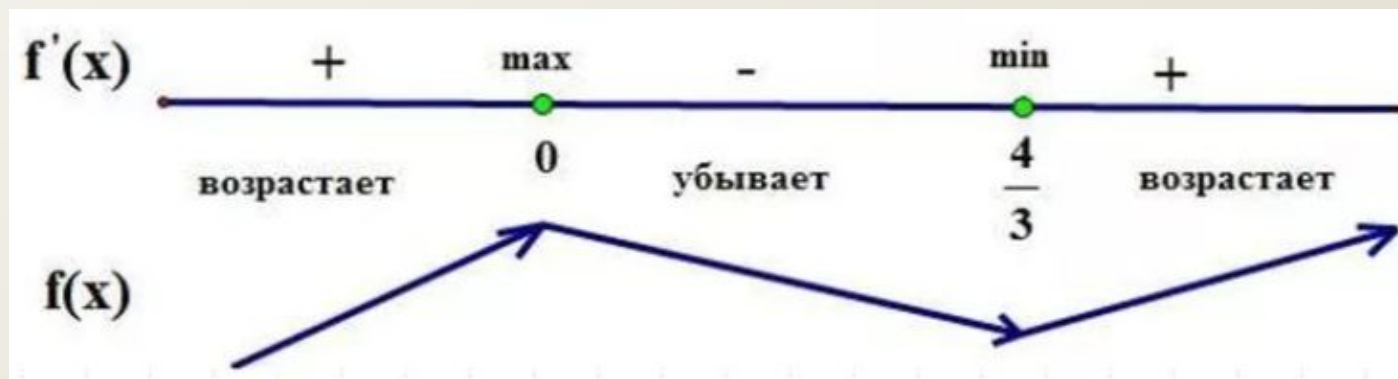


Нет критических точек;  
 $x_0 = 0$  не является  
внутренней точкой  
области определения.

# Исследование функции на монотонность

Исследовать функцию на монотонность, значит найти промежутки возрастания и убывания функции

1. Найдем производную данной функции
2. Из условия  $y'=0$  найдем стационарные точки
3. Отметим найденные точки на числовой прямой
4. На полученных промежутках найдем знаки производной
5. Сделаем вывод о монотонности функции



# Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции

1. Найдем производную данной функции
2. Из условия  $y' = 0$  найдем стационарные точки
3. Составим таблицу значений функции, где значение  $x$  – это концы отрезка и стационарные точки
4. Выберем из значений функции максимальное и минимальное значение

**Пример** Исследовать функцию  $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$  на монотонность и экстремумы.

**Решение.** Заметим, что функция всюду непрерывна, кроме точки  $x = 0$ . Воспользуемся указанным выше алгоритмом.

1) Найдем производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^4 + 16)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot (x^4 + 16)}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4 + 16)}{x^4} = \\ &= \frac{2x^5 - 32x}{x^4} = \frac{2x(x^4 - 16)}{x^4} = \frac{2(x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)}{x^3}. \end{aligned}$$

2) Производная обращается в нуль в точках  $x = 2$  и  $x = -2$  — это стационарные точки. Производная не существует в точке  $x = 0$ , но это не критическая точка, это точка разрыва функции (полюс).

3) Отметим точки  $-2$ ,  $0$  и  $2$  на числовой прямой и расставим знаки производной на получившихся промежутках (рис. 197).

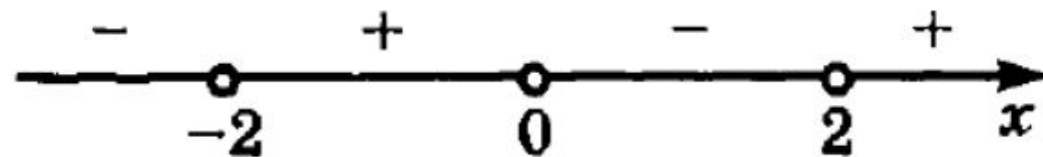


Рис. 197

4) Делаем выводы: на луче  $(-\infty; -2]$  функция убывает, на полуинтервале  $[-2; 0)$  функция возрастает, на полуинтервале  $(0; 2]$  функция убывает, на луче  $[2; +\infty)$  функция возрастает.

Далее,  $x = -2$  — точка минимума, причем  $y_{\min} = 8$  (подставили значение  $x = -2$  в формулу  $y = \frac{x^4 + 16}{x^2}$ ).

Аналогично устанавливаем, что и  $x = 2$  — точка минимума, причем  $y_{\min} = 8$ .

# 1. Самостоятельная работа

30.3. По графику производной, изображенному на заданном рисунке, определите, на каких промежутках функция  $y = f(x)$  возрастает, а на каких — убывает:

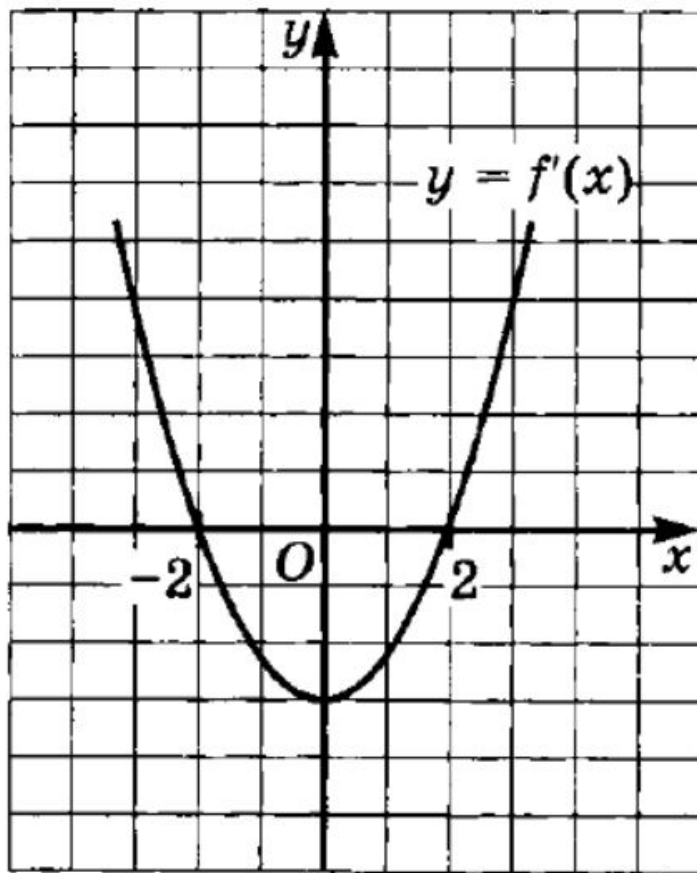


Рис. 2

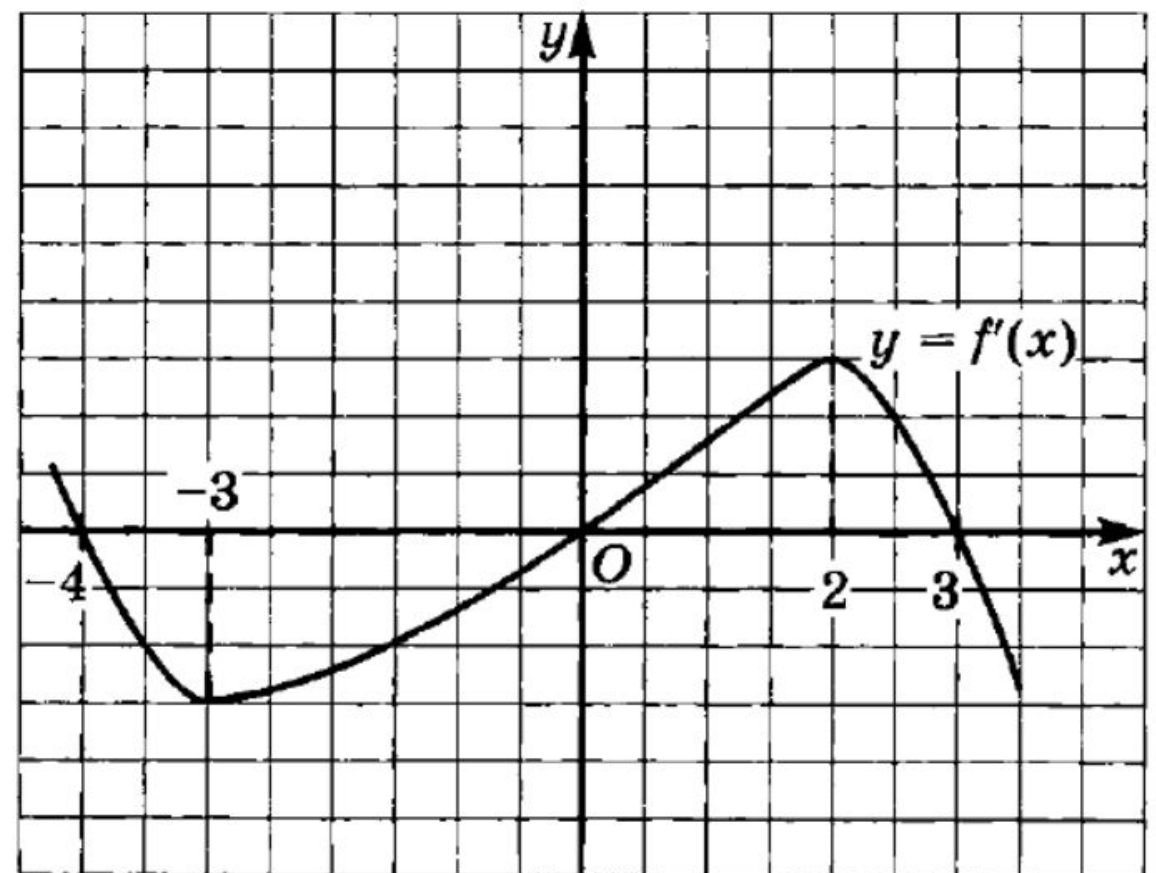


Рис. 1



2.

О30.10. Докажите, что заданная функция убывает:

$$y = \sin 2x - 3x;$$

3.

Определите промежутки монотонности функции:

О30.12. а)  $y = x^2 - 5x + 4;$                       в)  $y = -x^2 + 8x - 7;$

4.

Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер:

О30.27. а)  $y = 2x + \frac{8}{x};$

б)  $y = \sqrt{2x - 1};$

Департамент охраны здоровья населения Кемеровской области  
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение  
«Кемеровский областной медицинский колледж»  
Прокопьевский филиал  
(ПФ ГБПОУ «КОМК»)

**Тема:** Дифференцирование и интегрирование  
**Занятие 27:** Применение производной к исследованию  
функций и построению графиков  
**Дисциплина:** Математика

**Специальность:** 34.02.01 Сестринское дело,  
31.02.02 Акушерское дело

**Тип занятия:** практическое

**Разработал:** преподаватель

Чернявская Алина Геннадьевна

Прокопьевск, 2020