

Числовые ряды

1. Понятие положительного числового ряда
2. Сходимость и расходимость числовых рядов
3. Как найти сумму ряда?
4. Необходимый признак сходимости ряда
5. Гармонический ряд
6. Признаки сравнения
7. Предельный признак сравнения
8. Признак Даламбера
9. Признак Коши

1. Понятие положительного числового ряда

В общем виде числовой ряд можно записать так: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Здесь:

\sum – математический значок суммы;

a_n – **общий член ряда** (запомните этот простой термин);

n – переменная-«счётчик».

Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ означает, что проводится *суммирование* от 1 до «плюс бесконечности»,

то есть, сначала у нас $n = 1$, затем $n = 2$, потом $n = 3$, и так далее – до бесконечности. Вместо n иногда используют букву k или m .

Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$, либо с произвольного *натурального числа*.

В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто – в виде суммы его **членов**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots \text{ – и так далее, до бесконечности.}$$

Слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ – это **положительные** (для начала ☺) **ЧИСЛА**, среди которых могут быть нули. Отсюда и название – **положительный числовой ряд**.

Задача

Записать сумму ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)5^n}$

Записать сумму с общим членом ряда:

4. $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots$

5. $\frac{2}{\sqrt[5]{7}} + \frac{4}{\sqrt[5]{14}} + \frac{8}{\sqrt[5]{21}} + \dots$

2. Сходимость и расходимость числовых рядов

Любой (не только положительный) числовой ряд либо *сходится*, либо *расходится*. Что это значит?

1) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому

конечному числу S : $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots = S$. Пожалуйста: $\sum_{n=1}^{\infty} 0^n = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$ –

этот ряд сходится и его сумма равна нулю. В качестве более содержательного и известного примера сходящегося ряда можно привести *бесконечно убывающую геометрическую прогрессию*, известную нам ещё со школы, например:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$. Сумму членов бесконечно убывающей геометрической

прогрессии можно вычислить по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, а

$-1 < q < 1$ – *основание* прогрессии.

В данном случае: $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{4}$. Таким образом:

Получено конечное число, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ сходится, что и требовалось

проверить.

2) **Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.** Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots = \infty$ либо её вообще *не существует*, как, например, у ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \text{ – вот, кстати, и пример с отрицательными членами.}$$

Хороший образец расходящегося числового ряда встретился в Примере 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1) = 3 + 5 + 7 + \dots \text{ . Здесь совершенно понятно, что каждый следующий член ряда –}$$

больше, чем предыдущий, поэтому $3 + 5 + 7 + \dots = \infty$, следовательно, ряд расходится. Ещё

более тривиальный пример: $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + \dots$

Одной из главных задач темы является исследование ряда на сходимость

Если в результате вычисления суммы ряда будет получено конечное число, то ряд сходится, если ∞ , либо суммы не существует, то ряд расходится.

3. Как найти сумму ряда?

Частный пример с геометрической прогрессией мы рассмотрели, разберем еще один пример, заодно введем простейшие свойства положительных рядов

Пример 1:

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 * 3^n + 4^n}{6^n}$$

Представим наш ряд в виде суммы двух рядов и вынесем постоянный множитель за скобки:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2*3^n+4^n}{6^n} = 2 * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{6^n}$$

Выполнение данных действий основано на двух простейших свойствах положительных рядов

1) Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, то будут сходитья и ряды,

составленные из их сумм / разностей: $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_1 + S_2$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = S_1 - S_2$. При этом

существенно то обстоятельство, что речь идёт о **сходящихся** рядах. В нашём примере мы **заранее знаем**, что обе геометрические прогрессии сойдутся, а значит, без всяких сомнений раскладываем исходный ряд в сумму двух рядов.

2) Второе свойство ещё очевиднее. Константу k можно вынести за пределы ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} k a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и это **не повлияет** на его сходимость или расходимость. Зачем выносить?

Решение можно оформить следующим образом:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2 \cdot 3^n + 4^n}{6^n} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right) + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^3} + \dots + \frac{2^n}{3^n} + \dots = 2 \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \dots = 4 \end{aligned}$$

Пример 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n - 3^{n+1}}{10^n}$$

Строгое определение сходимости и расходимости ряда дается через определение частичных сумм ряда

Распишем частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

и особую роль играет частичная сумма «эн» членов ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Если предел частичных сумм произвольного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равен конечному числу $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то **ряд сходится**, если же $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, либо его не существует, то **ряд расходится**. Значение S конечное или бесконечное называют **суммой ряда**.

Таким образом, чтобы найти сумму ряда, нужно составить его частичную сумму S_n и вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

Пример 1: (Подробное решение можно найти в файле 1.pdf)

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

Пример 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$$

Пример 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 12n - 5} \quad S = \frac{7}{10}$$

Сумму не всех рядов бывает достаточно легко вычислить. И часто задачи сводятся к исследованию ряда на сходимость. Для этого используют специальные признаки, которые доказаны теоретически. Это **необходимый признак сходимости ряда, признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши** и некоторые другие. Когда какой признак применять зависит от общего члена ряда a_n .

4. Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд сходится, то его общий член стремится к 0, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Обратное в общем случае неверно, т.е., если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться. И поэтому этот признак используют для обоснования расходимости ряда:

если общий член ряда не стремится к нулю $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

В частности, возможна ситуация, когда предела не существует вообще, как, например, предела $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$. Вот сразу и доказали расходимость одного ряда!

Вернёмся к ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)$ из Примера 1, и вычислим предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 1) = \infty \neq 0$$

Вывод: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (2n + 1)$ расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пример 1:

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7n+3}$ на сходимость

Типовая формулировка задачи. В числителе и знаменателе у нас находятся многочлены **одного порядка роста**, и это «прямое показание» к вычислению предела $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, поскольку он заведомо равен конечному числу, отличному от нуля:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{7n+3} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Для устранения неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на n :

$$(*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{7n+3}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{7} \neq 0$$

Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пример 2:

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 3n + 1}{n^2 + 4}$

Итак, когда нам дан **ЛЮБОЙ** ряд, **то в первую очередь проверяем** (мысленно или на черновике): а стремится ли его общий член к нулю? Если не стремится – оформляем решение по образцу рассмотренных примеров.

Какие типы очевидно расходящихся рядов мы рассмотрели? Сразу понятно, что расходятся ряды вроде $\sum_{n=1}^{\infty} n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$. Также расходятся ряды, у которых порядок роста числителя *больше либо равен*, чем порядок роста знаменателя

Что делать, если $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$? В этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться. И поэтому необходимого признака бывает не достаточно.

5. Гармонический ряд

Знакомьтесь: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Этот ряд называется *гармоническим рядом*. Легко видеть, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$,

НО. В теории математического анализа доказано, что **гармонический ряд расходится**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ *обобщенный гармонический ряд*

1) Данный ряд **расходится** при $\alpha \leq 1$.

Например, расходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2) Данный ряд **сходится** при $\alpha > 1$.

Например, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Еще раз подчеркиваю, что почти

во всех практических заданиях нам совершенно не важно, чему равна **сумма**, например,

ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, важен сам факт, что он сходится

6. Признак сравнения

Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, и, начиная с некоторого номера n , выполняется неравенство $a_n \leq b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.

Другими словами, из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами.

Пример:

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 2}$

Но, обратите внимание, что во всех случаях в знаменателях у нас находятся «плюсы». Если есть минусы, то признак с неравенством **может и не дать результата**.

Например, рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$. Попробуйте аналогично сравнить его со

сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – выпишите несколько неравенств для первых членов. Вы

увидите, что неравенство $a_n \leq b_n$ не выполняется *и признак не дает нам ответа*.

Придется использовать другой признак, чтобы выяснить, сходится этот ряд или нет.

Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, и, начиная с некоторого номера n , выполняется неравенство $a_n \geq b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходится.

Другими словами, из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.

Пример:

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

7. Предельный признак сравнения

Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел отношения общих членов этого ряда равен конечному, отличному от 0 числу, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k$, то оба ряда либо сходятся, либо расходятся одновременно.

Пример 1:

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$

Сравним данный ряд с $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходящийся

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

Следовательно, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-n}$ сходится вместе с $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Пример 2 (самостоятельно):

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

Предельный признак сравнения чаще всего применим, когда общий член ряда представлен многочленом.

Пример 3:

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}$

Мы видим, что и в числителе и в знаменателе у нас многочлены, причем, в знаменателе многочлен находится под корнем. Как подобрать подходящий «эталон»

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^?}$ для сравнения?

1) Сначала нужно найти *старшую степень знаменателя*. Если бы не было корня, то, понятно, что старшая степень знаменателя равнялась бы четырем. Что делать, когда есть корень? Мысленно или на черновике отбрасываем все члены, кроме старшего: $\sqrt{2n^4}$. Если есть константа, её тоже отбрасываем: $\sqrt{n^4}$. Теперь извлекаем корень: $\sqrt{n^4} = n^2$. Таким образом, старшая степень знаменателя равна **двум**.

2) Выясняем старшую степень числителя. Очевидно, она равна **единице**.

3) Из старшей степени знаменателя вычитаем старшую степень числителя: **2 – 1 = 1**

Таким образом, наш ряд нужно сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, то есть, с

расходящимся гармоническим рядом.

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}}{1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)}{\sqrt{2n^4-n+5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-n}{\sqrt{2n^4-n+5}} = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2-n}{n^2}}{\frac{\sqrt{2n^4-n+5}}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{2 - \frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{ряд расходится} \end{aligned}$$

Пример 4:

Исследовать ряд на сходимость (самостоятельно) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{3n^4+2n^2+7}$

8. Признак Даламбера

Признак Даламбера чаще всего применяется в следующих случаях:

1. В общий член ряда входит показательная функция
2. В общий член ряда входит факториал

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = D$, то при

$D < 1$ ряд сходится

$D > 1$ ряд расходится (в частности при $D = \infty$)

$D = 1$ признак ответа не дает

Пример 1:

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n - 1}{4^n}$

Мы видим, что в общем члене ряда у нас есть 4^n , а это верная предпосылка того, что нужно использовать признак Даламбера.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1)^2 + (n+1) - 1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2 + n - 1}{4^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \cdot ((n+1)^2 + (n+1) - 1)}{4^{n+1} \cdot (n^2 + n - 1)} = \\ &= \dots = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2 + n - 1} \right) = \frac{\infty}{\infty} = \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{n^2 + 3n + 1}{n^2}}{\frac{n^2 + n - 1}{n^2}} \right) = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} \right) = \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} < 1, \text{ значит, исследуемый}\end{aligned}$$

ряд **сходится**.

Пример 2:

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$

Пример 3:

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(n+5) \cdot 7^n}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{(n+1+1)!}{(n+1+5) \cdot 7^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{(n+5) \cdot 7^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7^n \cdot (n+5) \cdot (n+2)!}{7^{n+1} \cdot (n+6) \cdot (n+1)!} = \\
&= \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+5) \cdot (n+2)}{7 \cdot (n+6)} = \\
&= \frac{1}{7} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 7n + 10}{n+6} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{7} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n^2 + 7n + 10}{n^2}}{\frac{n+6}{n^2}} = \frac{1}{7} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{7}{n} + \frac{10}{n^2}}{\frac{1}{n} + \frac{6}{n^2}} = \\
&= \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{0} = \frac{1}{7} \cdot \infty = \infty > 1, \text{ значит, исследуемый ряд } \mathbf{\text{расходится}}.
\end{aligned}$$

9. Признак Коши

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - ряд с положительными членами, и существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, тогда, если

$l < 1$, то данный ряд сходится

$l > 1$, то ряд расходится

$l = 1$, то признак ответа не дает

Данный признак используется, когда общий член полностью находится в степени

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7n+1}{6n+5} \right)^{3n+2} - \text{исследовать ряд на сходимость.}$$

Мы видим, что общий член ряда полностью находится под степенью, зависящей от n , а значит, нужно использовать радикальный признак Коши:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{7n+1}{6n+5} \right)^{3n+2}} = \dots = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^3 = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\frac{7n+1}{n}}{\frac{6n+5}{n}} \right)^3 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{7 + \frac{1}{n}}{6 + \frac{5}{n}} \right)^3 = \left(\frac{7}{6} \right)^3 = \frac{343}{216} > 1, \text{ значит, исследуемый ряд} \end{aligned}$$

расходится.