Числовые ряды

1. Понятие положительного числового ряда

В общем виде числовой ряд можно записать так: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Здесь:
$\sum$ – математический значок суммы;
a_n – ***общий член ряда*** (запомните этот простой термин);
n – переменная-«счётчик».

Запись $\sum_{n=1}^{\infty}$ **означает**, что проводится *суммирование* от 1 до «плюс бесконечности», то есть, сначала у нас $n=1$, затем $n=2$, потом $n=3$, и так далее – до бесконечности. Вместо n иногда используют букву k или m.

Суммирование не обязательно начинается с единицы, в ряде случаев оно может начинаться с нуля $\sum_{n=0}^{\infty}$, двойки $\sum_{n=2}^{\infty}$, либо с произвольного *натурального числа*.

В соответствии с переменной-«счётчиком» любой ряд можно расписать развёрнуто – в виде суммы его ***членов***:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots$ – и так далее, до бесконечности.

Слагаемые $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots$ – это **положительные** *(для начала ☺)* **ЧИСЛА**, среди которых могут быть нули. Отсюда и название – ***положительный числовой ряд***.

Задача

Записать сумму ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)$

2. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(4n-3)5^n}$

Записать сумму с общим членом ряда:

4. $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{3}{27}+\frac{4}{81}+\cdots$

5. $\frac{2}{\sqrt[5]{7}}+\frac{4}{\sqrt[5]{14}}+\frac{8}{\sqrt[5]{21}}+\cdots$

2. Сходимость и расходимость числовых рядов

Любой *(не только положительный)* числовой ряд либо ***сходится***, либо ***расходится***. Что это значит?

1) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **сходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна некоторому *конечному числу* S: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... = S$. Пожалуйста: $\sum_{n=1}^{\infty} 0^n = 0 + 0 + 0 + ... = 0$ – этот ряд сходится и его сумма равна нулю. В качестве более содержательного и известного примера сходящегося ряда можно привести *бесконечно убывающую геометрическую прогрессию*, известную нам ещё со школы, например: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + ...$. Сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии можно вычислить по формуле: $S = \frac{b_1}{1-q}$, где b_1 – первый член прогрессии, а $-1 < q < 1$ – *основание* прогрессии.

В данном случае: $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{4}$. Таким образом:

Получено конечное число, значит, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ сходится, что и требовалось проверить.

2) **Ряд** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **расходится**. Это значит, что бесконечная сумма равна бесконечности: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... = \infty$ либо её вообще *не существует*, как, например, у ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$ – вот, кстати, и пример с отрицательными членами.

Хороший образец расходящегося числового ряда встретился в Примере 1: $\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) = 3 + 5 + 7 + ...$. Здесь совершенно понятно, что каждый следующий член ряда – больше, чем предыдущий, поэтому $3 + 5 + 7 + ... = \infty$, следовательно, ряд расходится. Ещё более тривиальный пример: $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = 1 + 1 + 1 + ...$

Одной из главных задач темы является исследование ряда на сходимость

Если в результате вычисления суммы ряда будет получено конечное число, то ряд сходится, если ∞, либо суммы не существует, то ряд расходится.

3. Как найти сумму ряда?

Частный пример с геометрической прогрессией мы рассмотрели, разберем еще один пример, заодно введем простейшие свойства положительных рядов

Пример 1:

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 * 3^n + 4^n}{6^n}$$

Представим наш ряд в виде суммы двух рядов и вынесем постоянный множитель за скобки:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2*3^n+4^n}{6^n} = 2 * \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{6^n}$

Выполнение данных действий основано на двух простейших свойствах положительных рядов

1) Если сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2$, то будут сходиться и ряды, составленные из их сумм / разностей: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S_1 + S_2$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = S_1 - S_2$. При этом существенно то обстоятельство, что речь идёт о **сходящихся** рядах. В нашём примере мы **заранее знаем**, что обе геометрические прогрессии сойдутся, а значит, без всяких сомнений раскладываем исходный ряд в сумму двух рядов.

2) Второе свойство ещё очевиднее. Константу k можно вынести за пределы ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, и это **не повлияет** на его сходимость или расходимость. Зачем выносить?

Решение можно оформить следующим образом:

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\cdot 3^n+4^n}{6^n}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)+\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\frac{2^3}{3^3}+\ldots+\frac{2^n}{3^n}+\ldots=2\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\ldots\quad =4$$

[Пример 2]()

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8^n-3^{n+1}}{10^n}$$

Строгое определение сходимости и расходимости ряда дается через определение частичных сумм ряда

Распишем частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

...

и особую роль играет частичная сумма «эн» членов ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Если предел частичных сумм произвольного числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ равен конечному числу $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд сходится, если же $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, либо его не существует, то ряд расходится. Значение S конечное или бесконечное называют суммой ряда.

Таким образом, чтобы найти сумму ряда, нужно составить его частичную сумму S_n и вычислить $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

Пример 1:*(Подробное решение можно найти в файле 1.pdf)*

Найти сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$

Пример 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$$

Пример 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{9n^2+12n-5}$$

$S=\frac{7}{10}$

Сумму не всех рядов бывает достаточно легко вычислить. И часто задачи сводятся к исследованию ряда на сходимость. Для этого используют специальные признаки, которые доказаны теоретически. Это ***необходимый признак сходимости ряда, признаки сравнения, признак Даламбера, признак Коши*** *и некоторые другие. Когда какой признак применять зависит от общего члена ряда* a_n.

4. Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд сходится, то его общий член стремится к 0, то есть $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Обратное в общем случае неверно, т.е., если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд может как сходиться, так и расходиться. И поэтому этот признак используют для обоснования расходимости ряда:

если общий член ряда не стремится к нулю $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$**, то ряд расходится**.

В частности, возможна ситуация, когда предела не существует вообще, как, например, предела $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$. Вот сразу и доказали расходимость одного ряда!

Вернёмся к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ из Примера 1, и вычислим предел:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(2n+1) = \infty \neq 0$$

Вывод: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)$ расходится, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пример 1:

Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7n+3}$ на сходимость

Типовая формулировка задачи. В числителе и знаменателе у нас находятся многочлены **одного порядка роста**, и это «прямое показание» к вычислению предела $\lim_{n\to\infty} a_n$, поскольку он заведомо равен конечному числу, отличному от нуля:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{7n+3} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Для устранения неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на n:

$$(*) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{7n+3}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{7+\frac{3}{n}^{\to 0}} = \frac{1}{7} \neq 0$$

Исследуемый ряд **расходится**, так как не выполнен необходимый признак сходимости ряда.

Пример 2:

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 - 3n + 1}{n^2 + 4}$

Итак, **когда нам дан ЛЮБОЙ ряд**, **то в первую очередь проверяем** (мысленно или на черновике): а стремится ли его общий член к нулю? Если не стремится – оформляем решение по образцу рассмотренных примеров.

Какие типы очевидно расходящихся рядов мы рассмотрели? Сразу понятно, что расходятся ряды вроде $\sum_{n=1}^{\infty} n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$. Также расходятся ряды, у которых порядок роста числителя *больше либо равен*, чем порядок роста знаменателя

Что делать, если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$? В этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться. И поэтому необходимого признака бывает не достаточно.

5. Гармонический ряд

Знакомьтесь: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Этот ряд называется ***гармоническим рядом***. Легко видеть, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

НО. В теории математического анализа доказано, что **гармонический ряд расходится**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = +\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$ ***обобщенный гармонический ряд***

1) Данный ряд **расходится** при $\alpha \le 1$.

Например, расходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

2) Данный ряд **сходится** при $\alpha > 1$.

Например, сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Еще раз подчеркиваю, что почти во всех практических заданиях нам совершенно не важно, чему равна сумма, например, ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, важен сам факт, что он сходится

6. Признак сравнения

Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Если известно, что ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, и, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство* $a_n \leq b_n$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *тоже сходится.*

Другими словами, из сходимости ряда с большими членами следует сходимость ряда с меньшими членами.

Пример:

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 2}$

Но, обратите внимание, что во всех случаях в знаменателях у нас находятся «плюсы». Если есть минусы, то признак с неравенством **может и не дать результата**. Например, рассмотрим ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n}$. Попробуйте аналогично сравнить его со сходящимся рядом $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ – выпишите несколько неравенств для первых членов. Вы увидите, что неравенство $a_n \le b_n$ не выполняется *и признак не дает нам ответа*. Придется использовать другой признак, чтобы выяснить, сходится этот ряд или нет.

Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится, и, начиная с некоторого номера n, выполняется неравенство $a_n \geq b_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже расходится.

Другими словами, из расходимости ряда с меньшими членами следует расходимость ряда с большими членами.

Пример:

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

7. Предельный признак сравнения

Рассмотрим два положительных числовых ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Если предел отношения общих членов этого ряда равен конечному, отличному от 0 числу, то есть $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k$, то оба ряда либо сходятся, либо расходятся одновременно.

Пример 1:

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$

Сравним данный ряд с $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходящийся

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2-n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right) = 1$$

Следовательно, $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$ сходится вместе с $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

Пример 2 *(самостоятельно):*

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$

Предельный признак сравнения чаще всего применим, когда общий член ряда представлен многочленом.

Пример 3:

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}$

Мы видим, что и в числителе и в знаменателе у нас многочлены, причем, в знаменателе многочлен находится под корнем. Как подобрать подходящий «эталон» $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^?}$ для сравнения?

1) Сначала нужно найти *старшую степень знаменателя*. Если бы не было корня, то, понятно, что старшая степень знаменателя равнялась бы четырем. Что делать, когда есть корень? Мысленно или на черновике отбрасываем все члены, кроме старшего: $\sqrt{2n^4}$. Если есть константа, её тоже отбрасываем: $\sqrt{n^4}$. Теперь извлекаем корень: $\sqrt{n^4}=n^2$. Таким образом, старшая степень знаменателя равна **двум**.

2) Выясняем старшую степень числителя. Очевидно, она равна **единице**.

3) Из старшей степени знаменателя вычитаем старшую степень числителя: **2 – 1 = 1**

Таким образом, наш ряд нужно сравнить с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, то есть, с расходящимся гармоническим рядом.

Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n-1}{\sqrt{2n^4-n+5}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{\sqrt{2n^4-n+5}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{\sqrt{2n^4-n+5}} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2-n}{n^2}}{\frac{\sqrt{2n^4-n+5}}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{2n^4}{n^4}-\frac{n}{n^4}+\frac{5}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0}}{\sqrt{2-\underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{5}{n^4}}_{\to 0}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ряд расходится

Пример 4:

Исследовать ряд на сходимость (самостоятельно) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{3n^4+2n^2+7}$

8. Признак Даламбера

Признак Даламбера чаще всего применяется в следующих случаях:

1. В общий член ряда входи показательная функция
2. В общий член ряда входит факториал

Рассмотрим положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *. Если существует предел отношения последующего члена к предыдущему* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{an} = D$ *, то при*

D<1 ряд сходится

D>1 ряд расходится (в частности при D=∞)

D=1 признак ответа не дает

Пример 1:

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n-1}{4^n}$

Мы видим, что в общем члене ряда у нас есть 4^n, а это верная предпосылка того, что нужно использовать признак Даламбера.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^2+(n+1)-1}{4^{n+1}}}{\frac{n^2+n-1}{4^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot((n+1)^2+(n+1)-1)}{4^{n+1}\cdot(n^2+n-1)}=$$

$$=\ldots=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+3n+1}{n^2+n-1}\right)=\frac{\infty}{\infty}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{n^2+3n+1}{n^2}}{\frac{n^2+n-1}{n^2}}\right)=\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\frac{3}{n}^{\to 0}+\frac{1}{n^2}^{\to 0}}{1+\frac{1}{n}^{\to 0}-\frac{1}{n^2}^{\to 0}}\right)=\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{4}<1$$, значит, исследуемый ряд **сходится.**

Пример 2:

Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{\sqrt{3n+5}}$

Пример 3:

Исследовать ряд на сходимость$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{(n+5)*7^{n}}$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{(n+1+1)!}{(n+1+5)\cdot 7^{n+1}}}{\dfrac{(n+1)!}{(n+5)\cdot 7^{n}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7^n\cdot(n+5)\cdot(n+2)!}{7^{n+1}\cdot(n+6)\cdot(n+1)!}=$$

$$=\ldots=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+5)\cdot(n+2)}{7\cdot(n+6)}=$$

$$=\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+7n+10}{n+6}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{n^2+7n+10}{n^2}}{\dfrac{n+6}{n^2}}=\frac{1}{7}\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{7}{n}^{\to 0}+\dfrac{10}{n^2}^{\to 0}}{\dfrac{1}{n}^{\to 0}+\dfrac{6}{n^2}^{\to 0}}=$$

$=\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{0}=\frac{1}{7}\cdot\infty=\infty>1$, значит, исследуемый ряд **расходится**.

9. Признак Коши

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *- ряд с положительными членами, и существует конечный предел* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$*,*
тогда, если
l<1, то данный ряд сходится
l>1, то ряд расходится
l=1, то признак ответа не дает

Данный признак используется, когда общий член полностью находится в степени

Пример:

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}$ – исследовать ряд на сходимость.

Мы видим, что общий член ряда полностью находится под степенью, зависящей от n, а значит, нужно использовать радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\overset{(1)}{=}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{7n+1}{6n+5}\right)^{3n+2}}\overset{(2)}{=}\ldots=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{3}\overset{(4)}{=}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\frac{7n+1}{n}}{\frac{6n+5}{n}}\right)^{3}\overset{(5)}{=}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7+\overset{\to 0}{\frac{1}{n}}}{6+\overset{\to 0}{\frac{5}{n}}}\right)^{3}=\left(\frac{7}{6}\right)^{3}=\frac{343}{216}>1$$, значит, исследуемый ряд **расходится**.