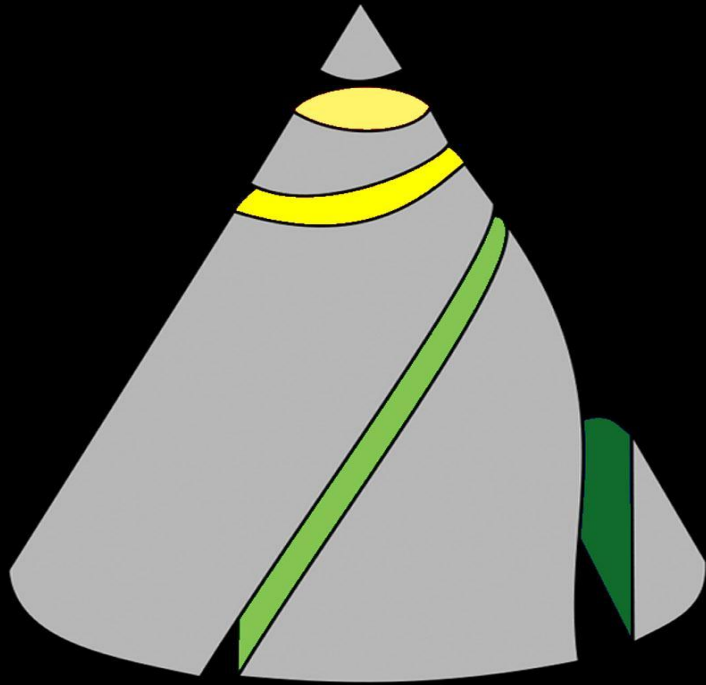


# Конические сечения

Выполнила Барсукова В. С.  
под руководством Ардашировой Е. В.

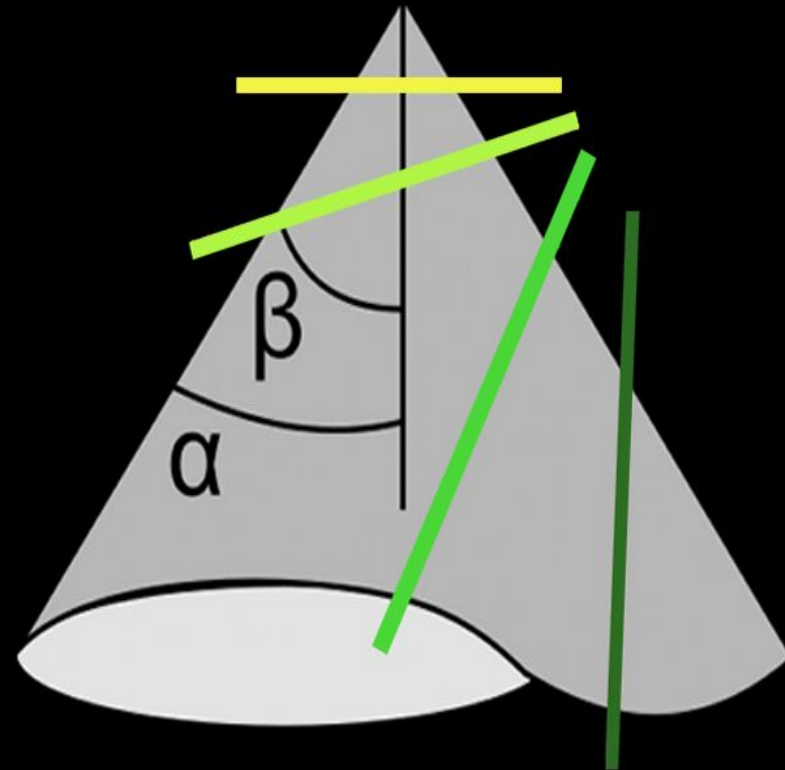
# Содержание



- История исследования (19 столетий ожидания)
- Коника
- Экспериментальное доказательство
- Вездесущий эллипс/применение конических сечений
- Словарь

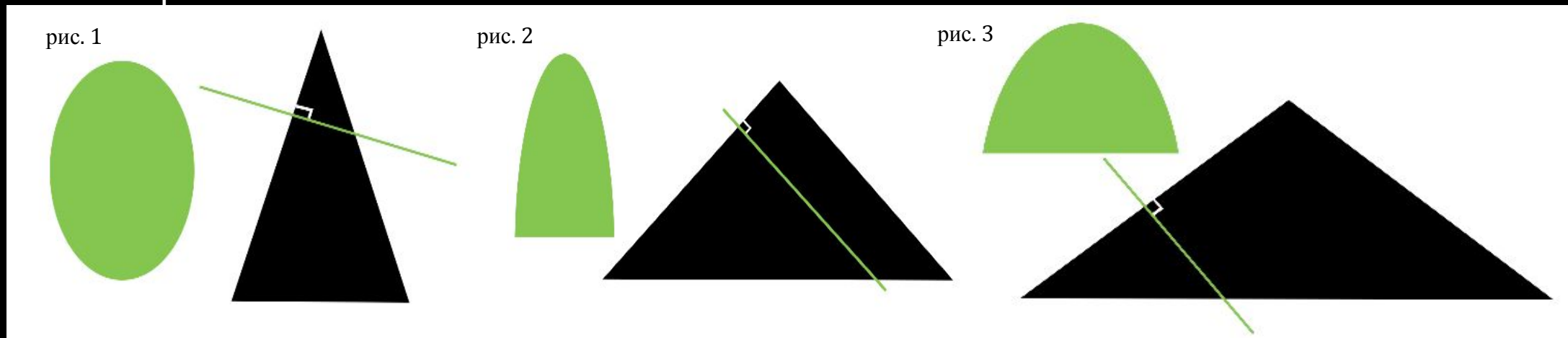
# История исследования (19 столетий молчания)

- Менехм
- Евклид
- Архимед
- Аполлоний Пергский
- Ферма
- Декарт
- Эйлер



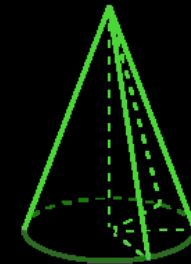
# Менехм (IV в. до н. э.)

- Впервые конические сечения (10) появились у Менехма (IV в. до н. э.).
- Он рассматривал остроугольный, прямоугольный и тупоугольный конусы (11) и каждый из них пересекал плоскостью, перпендикулярной одной из образующих (13).
- В первом случае в сечении с поверхностью конуса получался эллипс (35) (рис. 1), во втором — парабола (17) (рис. 2), в третьем — гипербола (6), точнее, одна, ветвь гиперболы (рис. 3).
- Фактически он пользовался прямоугольными координатами на плоскости: за начало координат принимал вершину кривой второго порядка (12), за одну из координатных осей — главный диаметр, а другую ось проводил перпендикулярно первой в плоскости, в которой лежит кривая.



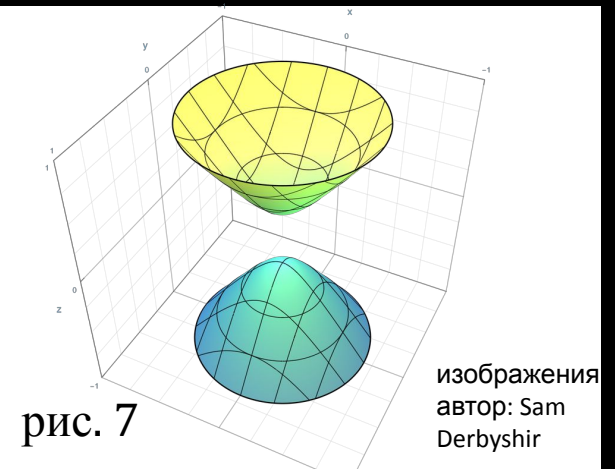
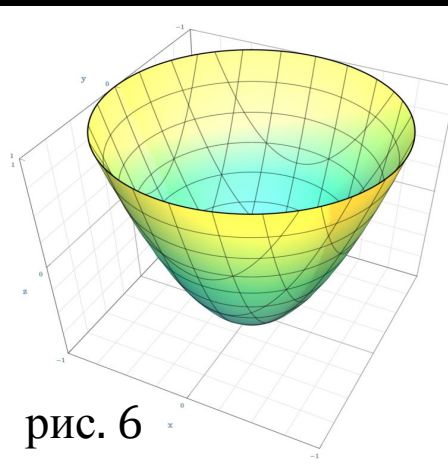
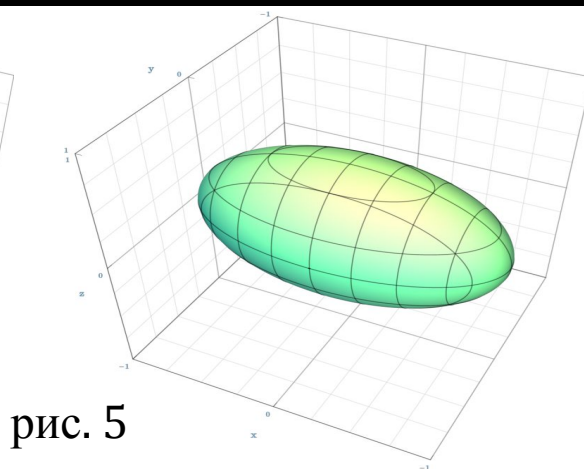
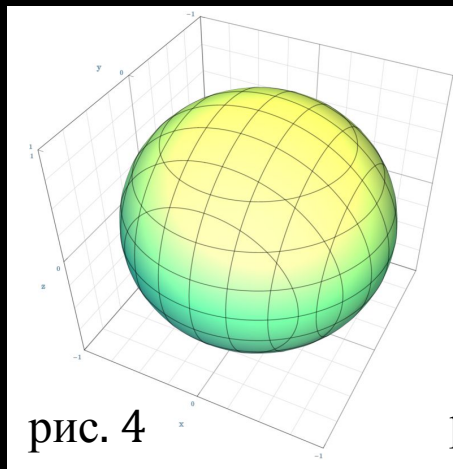
# Евклид (III в. до н. э.)

- С именем Евклида связывают становление александрийской математики (геометрической алгебры) как науки.
- В XI книге «Начал» дается следующее определение: если вращающийся около одного из своих катетов прямоугольный треугольник, слева вернется в то же самое положение, из которого он начал двигаться, то описанная фигура будет конусом (11). Неподвижный катет, вокруг которого поворачивается треугольник, называется осью конуса (11), а круг, описываемый вращающимся катетом, называется основанием конуса.
- Евклид рассматривает только прямые конусы, т. е. такие, у которых ось перпендикулярна к основанию.



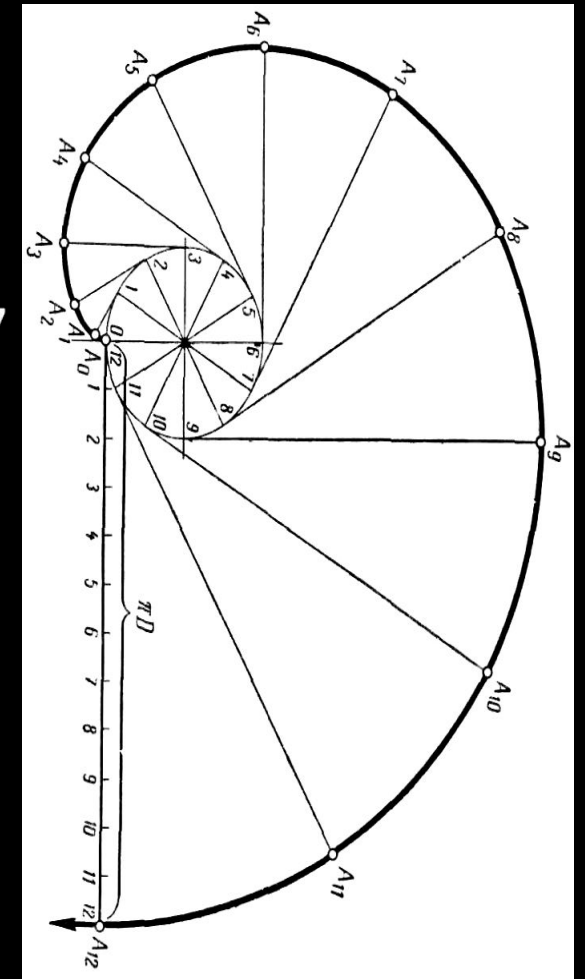
# Архимед (ок. 287–212)

- Разработал предвосхитившие интегральное исчисление методы нахождения площадей, поверхностей и объемов различных фигур и тел.
- В трактате «О коноидах и сфероидах» Архимед рассматривает шар (32) (рис. 4), эллипсоид (36) (рис. 5), параболоид (18) (рис. 6) и гиперболоид (7) (рис. 7), вращения и их сегменты и определяет их объемы.



# Архимед (ок. 287–212)

- В сочинении «О спиралях» исследует свойства кривой, получившей его имя (см. Архимедова спираль) (рис. 8) и касательной к ней.
- В трактате «Измерение круга» Архимед предлагает метод определения числа  $\pi$ , который использовался до конца 17 в., и указывает две удивительно точные границы числа  $\pi$ :  $3_{1071} < \pi < 3_{17}$ .
- Он доказал следующую теорему: «Поверхность всякого равнобедренного (т.е. прямого кругового) конуса, за вычетом основания, равна кругу, радиус которого есть средняя пропорциональная между стороной (т.е. образующих (13)) конуса и радиуса круга, являющегося основанием конуса».
- Площадь  $S$  боковой поверхности дается таким образом (в современных символах) формулой  $S = \pi r l$ , где  $l$  — длина образующей,  $r$  — радиус основания конуса.



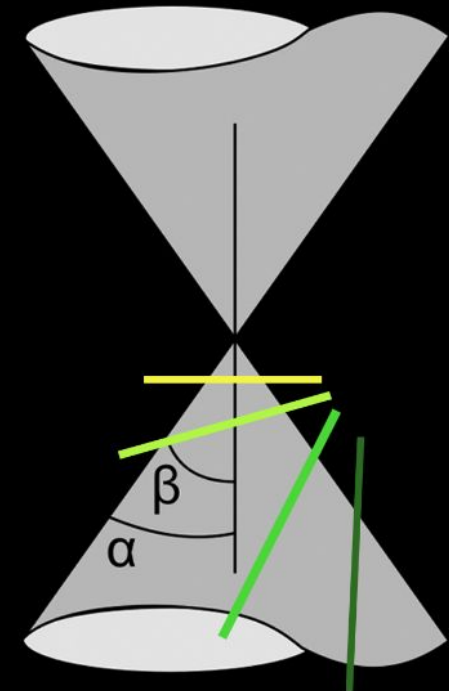
# Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

- Аполлоний прославился в первую очередь выдающейся работой «Конические сечения» (8 книг), в которой дал содержательную общую теорию эллипса (35), параболы (17) и гиперболы (6).
- Именно Аполлоний предложил общепринятые названия этих кривых; до него их называли просто «сечениями конуса».
- Он ввёл и другие математические термины, латинские аналоги которых навсегда вошли в науку, в частности: асимптота (2), абсцисса, ордината.



# Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

- В работе Аполлония «Конические сечения» восемь книг; до наших дней сохранилось семь.
- В сравнении с Менехмом он становится на более общую точку зрения: берет произвольный конус, причем рассматривает две его полости, и пересекает конус плоскостью под разными углами. В случае, если плоскость пересекает все образующие(13) конуса, в ее пересечении с поверхностью конуса образуется эллипс; если она параллельна одной из образующих конуса – парабола; если плоскость пересекает обе полости конуса – гипербола.
- Фактически Аполлоний пользуется косоугольной системой координат, принимая за начало координат любую точку  $P$  кривой и направляя координатные оси по диаметру и по касательной к кривой, проходящих через точку  $P$ .

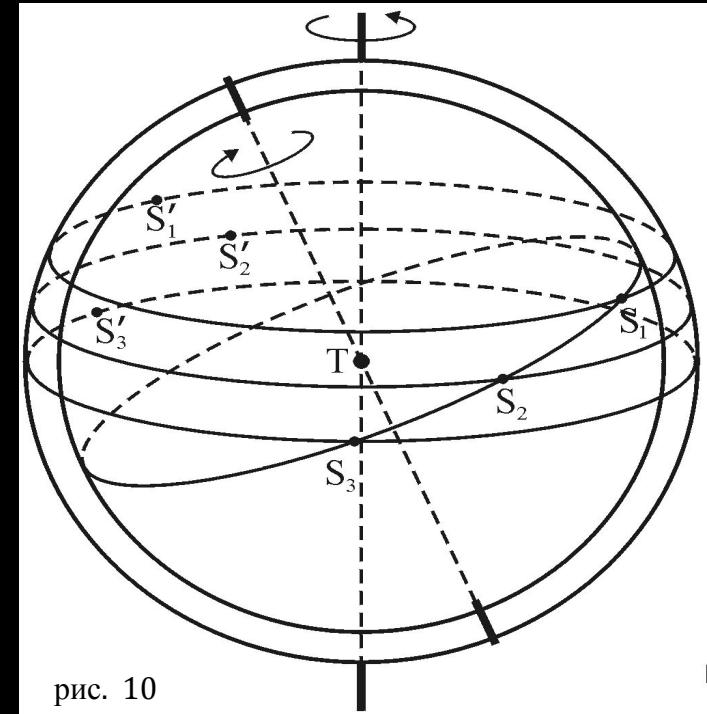


# Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

- Сами термины «парабола (17)», «эллипс (35)», «гипербола (6)» впервые встречаются у Аполлония.
- Слово «парабола» в переводе с греческого означает «приложение»: уравнение  $y^2 = 2px$  читается словесно в виде равенства квадрата  $y^2$  и прямоугольника  $2px$ .
- Слово «эллипс» переводится как «недостаток»: в правой части уравнения  $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$  не хватает слагаемого  $\frac{p}{a}x^2$  для того, чтобы получилось «приложение», как в уравнении  $y^2 = 2px$ .
- Слово «гипербола» — «избыток»: в правой части уравнения  $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$  нужно отбросить лишнее слагаемое  $\frac{p}{a}x^2$  для того, чтобы можно было оставить «приложение».
- Символики у Аполлония нет; доказательства проводятся словесно. При доказательствах регулярно применяется геометрическая алгебра, которой пользовался еще Евклид. Постоянные  $p, a$  в уравнениях конических сечений вводились, в частности, для того, чтобы уравнивать размерности левой и правой частей. Доказательства во многих случаях получались весьма непростыми.

# Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

- Из других заслуг Аполлония перед наукой стоит отметить, что он переработал астрономическую модель Евдокса (рис. 10), введя эпициклы (37) и эксцентрики (33) для объяснения неравномерности движения планет. Эту теорию позднее развили Гиппарх и Птолемей.
- Сочинения Аполлония не влияли на развитие науки до VIII века.
- С появлением аналитической геометрии, механики и новой теории движения планет Кеплера наступило возрождение идей Аполлония. Таким образом, от создания теории Аполлония до ее применения на практике потребовалось 19 столетий.



# Аполлоний Пергский (ок. 260–ок. 170)

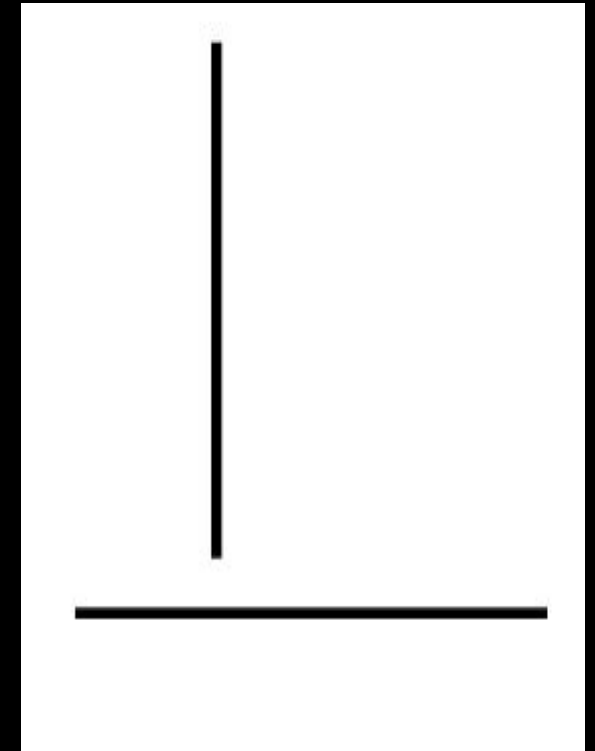
- Большой интерес представляют не только результаты Аполлония, но и методы, которыми он пользуется. В них можно найти многочисленные мотивы более поздних достижений математики — алгебры, аналитической, проективной геометрии и местами даже дифференциальной геометрии.
- Книга оказала огромное влияние на творчество последующих математиков, включая Ферма, Декарта, Ньютона, Лагранжа и многих других.
- Каким образом Аполлоний, не владея математическим анализом, сумел сделать свои открытия, неясно. Возможно, у него, как у Архимеда, был некий метод бесконечно малых, который он использовал в эвристических целях, чтобы затем передоказать результат каноническими средствами античной геометрии.
- Ван дер Варден пишет:
- «Аполлоний виртуозно владеет геометрической алгеброй, но не менее виртуозно умеет скрывать свой первоначальный ход мыслей. Из-за этого-то его книгу и трудно понимать; рассуждения его элегантны и кристально ясны, но что его привело именно к таким рассуждениям, а не к иным каким-нибудь, — об этом можно лишь догадываться».

# Пьер Ферма (1601–1665)

- Аналитической геометрии Ферма посвятил небольшое сочинение «Введение в теорию плоских и пространственных мест».
- У Ферма имеется только одна координатная ось – ось абсцисс, точнее, полуось, так как отрицательными координатами он не пользуется; для изображения значений другой переменной он из конца отрезка оси абсцисс проводил отрезки под некоторым постоянным углом к этой оси, вообще говоря, не прямым.
- Он выводит уравнение окружности с центром в начальной точке в виде  $b^2 - x^2 = y^2$ . Уравнение конических сечений он пишет, выражая их свойства из труда Аполлония на языке алгебры: для параболы  $-x^2 = dy$  или  $y^2 = dx$ , для эллипса  $\frac{-b^2 - x^2}{y^2} = C$  (где  $C$  — постоянная), для гиперболы  $\frac{-b^2 + x^2}{y^2} = C$  для равносторонней гиперболы  $-xy = C$ .

# Рене Декарт (1596–1650)

- «Геометрия» (аналитическая геометрия) получила наибольшую известность.
- «Геометрия» состоит из трех книг. Вопросы аналитической геометрии в ней разбросаны без особой системы по всем трем книгам.
- В основу «Геометрии» положены две идеи: решение геометрических задач с помощью алгебры и метода координат и понятие переменной величины. «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и тем самым диалектика (8)» — написал Ф. Энгельс в работе «Диалектика природы».
- Декарт подобно Ферма, чертил только одну координатную ось с начальной точкой, указывая направления других координат точек. Но иногда он проводил и две координатные оси, правда, располагая их необычным для нас образом. Кроме того, он, и Ферма, почти не употреблял отрицательных координат, что вынуждало его обрывать кривую точками, лежащими на координатных осях.

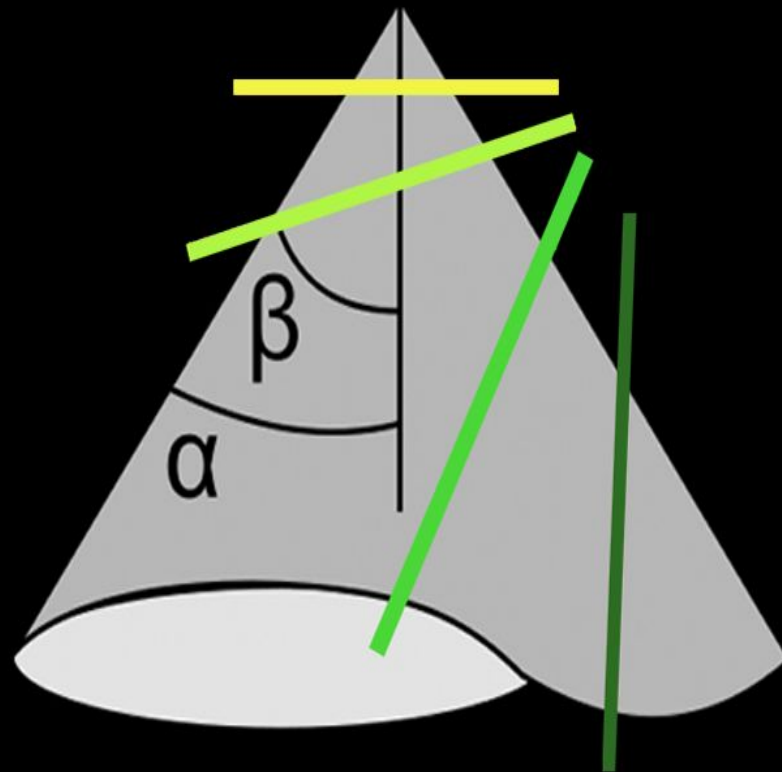


# Леонард Эйлер (1707–1783)

- В 1748 г. Эйлер опубликовал большое сочинение «Введение в анализ бесконечных» в двух томах, из которых первый том посвящен введению в анализ, а второй — аналитической геометрии.
- Рассматриваются прямоугольные и косоугольные координаты точки на плоскости
- Эйлер подробно излагает общую теорию кривых второго порядка, деля эти кривые на типы и приводя их уравнения к каноническим.
- Он изучает также кривые третьего порядка, деля их на 16 родов, и кривые четвертого порядка (146 родов).
- В основном Эйлер завершил работу систематизации аналитической геометрии.

# Коника

- Эллипс (+ частный случай окружность)
- Парабола
- Гипербола
- Свойства конических сечений





# Эллипс

- Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек  $F_1$  и  $F_2$  есть величина постоянная ( $2a$ ), бóльшая расстояния ( $2c$ ) между этими заданными точками (рис. 11, а).
- Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются фокусами эллипса, расстояние между ними  $2c = F_1F_2$  — фокусным расстоянием, середина отрезка  $F_1F_2$  — центром эллипса, число  $2a$  — длиной большой оси эллипса (соответственно, число  $a$  — большой полуосью эллипса). Отрезки  $F_1M$  и  $F_2M$ , соединяющие произвольную точку  $M$  эллипса с его фокусами, называются фокальными радиусами точки  $M$ . Отрезок, соединяющий две точки эллипса, называется хордой эллипса.

# Эллипс

- Отношение  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  называется эксцентриситетом эллипса. Из определения  $2c < 2a$  следует, что  $0 \leq \varepsilon < 1$ . При  $\varepsilon = 0$ , т. е. при  $c = 0$ , фокусы  $F_1$  и  $F_2$ , а также центр  $O$  совпадают, и эллипс является окружностью радиуса  $a$  (рис. 11, б).
- Каноническое уравнение эллипса:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- Если фокусы эллипса совпадают, то эллипс представляет собой окружность (рис. 11, б). В этом случае канонической будет любая прямоугольная система координат с началом в точке  $O \equiv F_1 \equiv F_2$ , а уравнение  $x^2 + y^2 = a^2$  является уравнением окружности с центром в точке  $O$  и радиусом, равным  $a$ .

# Парабола

- Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки  $F$  и заданной прямой  $d$ , не проходящей через заданную точку.
- Точка  $F$  называется фокусом параболы, прямая  $d$  — директрисой параболы, середина  $O$  перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису, — вершиной параболы, расстояние  $p$  от фокуса до директрисы — параметром параболы, а расстояние  $\frac{p}{2}$  от вершины параболы до её фокуса — фокусным расстоянием ( $\Leftarrow$ рис. 12). Прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус, называется осью параболы (фокальной осью параболы). Отрезок, соединяющий две точки параболы, называется хордой параболы.

# Парабола

- Для произвольной точки параболы отношение расстояния до фокуса к расстоянию до директрисы равно единице; эксцентриситет параболы по определению равен единице ( $\varepsilon = 1$ ).
- Каноническое уравнение параболы:  $y^2 = 2p \times x$ .

# Гипербола

- Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек  $F_1$  и  $F_2$  есть величина постоянная ( $2a$ ), меньшая расстояния ( $2c$ ), (↓рис. 13) между этими заданными точками.
- Точки  $F_1$  и  $F_2$  называются фокусами гиперболы, расстояние  $2c = F_1F_2$  между ними — фокусным расстоянием, середина  $O$  отрезка  $F_1F_2$  — центром гиперболы, число  $2a$  — длиной действительной оси гиперболы (соответственно,  $a$  — действительной полуосью гиперболы). Отрезки  $F_1M$  и  $F_2M$ , соединяющие произвольную точку  $M$  гиперболы с ее фокусами, называются фокальными радиусами точки  $M$ . Отрезок, соединяющий две точки гиперболы, называется хордой гиперболы.

# Гипербола

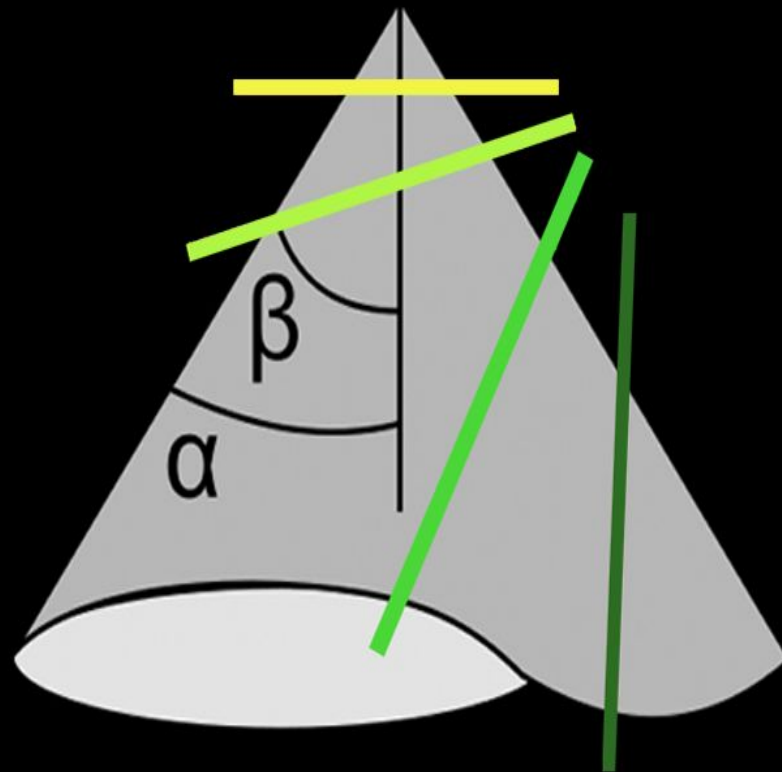
- Отношение  $\varepsilon = \frac{c}{a}$ , где  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ , называется эксцентриситетом гиперболы. Из определения ( $2a < 2c$ ) следует, что  $\varepsilon > 1$ .
- Каноническое уравнение гиперболы:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

# Свойства конических сечений

- Геометрическое место точек плоскости, для каждой из которых отношение расстояния до заданной точки  $F$  (фокуса) к расстоянию до заданной прямой  $d$  (директрисы), не проходящей через заданную точку, постоянно и равно эксцентриситету называется:
  - эллипсом, если  $0 \leq \varepsilon < 1$ ;
  - гиперболой, если  $\varepsilon > 1$ ;
  - параболой, если  $\varepsilon = 1$ .
- Эллипс, гипербола, парабола получаются в сечениях кругового конуса плоскостями и поэтому называются коническими сечениями. Это свойство также может служить геометрическим определением эллипса, гиперболы, параболы.

# Экспериментальное доказательство

- Опыт №1  
(с вафельным стаканчиком)
- Опыт №2  
(с карманным фонариком)
- Как начертить эллипс?





# Опыт № 1



# Опыт № 2



# Как начертить эллипс?



# Вездесущий эллипс



# Словарь

1. Аналитическая геометрия — раздел геометрии, в котором геометрические фигуры и их свойства исследуются средствами алгебры. В основе этого метода лежит так называемый метод координат, впервые применённый Декартом в 1637 году. Каждому геометрическому соотношению этот метод ставит в соответствие некоторое уравнение, связывающее координаты фигуры или тел.
2. Асимптота — прямая, обладающая тем свойством, что расстояние от точки кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль ветви в бесконечность.
3. Большая ось эллипса — сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек  $F_1$  и  $F_2$  величина постоянная.
4. Вершина параболы — середина перпендикуляра, опущенного из фокуса на директрису.
5. Геометрическое место точек — фигура речи в математике, употребляемая для определения геометрической фигуры как множества точек, обладающих некоторым свойством.
6. Гипербола — геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек есть величина постоянная и меньшая расстояния между этими заданными точками.
7. Гиперболоид — это вид поверхности второго порядка в трёхмерном пространстве.
8. Диалектика — метод аргументации в философии, а также форма и способ теоретического мышления.

# Словарь

9. Директриса параболы — заданная прямая, не проходящая через фокус параболы, расстояние от которой до произвольной точки параболы всегда равно расстоянию от этой точки до фокуса параболы.
10. Коническое сечение, или коника, — пересечение плоскости с поверхностью кругового конуса.
11. Конус — тело в евклидовом пространстве, полученное объединением всех лучей, исходящих из одной точки (вершины конуса) и проходящих через плоскую поверхность.
12. Кривая второго порядка — геометрическое место точек, прямоугольные координаты которых удовлетворяют уравнению вида  $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$  в которой один из коэффициентов  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  отличен от нуля.
13. Образующая конуса — это отрезок, соединяющий вершину конуса с любой точкой, лежащей на линии окружности основания.
14. Окружность — замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра), лежащей в той же плоскости, что и кривая.
15. Ось параболы — прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус.
16. Парабола — геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки и заданной прямой, не проходящей через заданную точку.
17. Парабола — геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки и заданной прямой, не проходящей через заданную точку.

# Словарь

18. Параболоид — тип поверхности второго порядка в трёхмерном евклидовом пространстве; может быть охарактеризован как незамкнутая нецентральная (то есть не имеющая центра симметрии) поверхность второго порядка.
19. Параметр параболы — расстояние от фокуса до директрисы.
20. Проективная геометрия — раздел геометрии, изучающий проективные плоскости и пространства. Главная особенность проективной геометрии состоит в принципе двойственности, который прибавляет изящную симметрию во многие конструкции.
21. Фокальные радиусы гиперболы — отрезки, соединяющие произвольную точку гиперболы с её фокусами.
22. Фокальный радиус точки параболы — отрезок, соединяющий произвольную точку параболы с её фокусом.
23. Фокальный радиус эллипса — отрезки  $F_1M$  и  $F_2M$ , соединяющие произвольную точку  $M$  эллипса с его фокусами.
24. Фокус параболы — заданная точка, расстояние от которой до произвольной точки параболы всегда равно расстоянию от этой точки до заданной прямой, не проходящей через фокус параболы.
25. Фокусное расстояние гиперболы — расстояние между фокусами гиперболы.
26. Фокусное расстояние параболы — расстояние от вершины параболы до её фокуса.
27. Фокусы гиперболы — заданные точки, до которых модуль разности расстояний от каждой точки плоскости гиперболы величина постоянная.

# Словарь

28. Фокусы эллипса — заданные точки  $F_1$  и  $F_2$ , до которых расстояние от каждой точки плоскости эллипса одинаковое.
29. Хорда гиперболы — отрезок, соединяющий две точки гиперболы.
30. Хорда эллипса — отрезок, соединяющий две точки эллипса.
31. Центр эллипса — середина отрезка между фокусами эллипса.
32. Шар — геометрическое тело; совокупность всех точек пространства, находящихся от центра на расстоянии, не больше заданного.
33. Эксцентрик — вспомогательная окружность в геоцентрической системе мира для представления годового обращения Солнца вокруг Земли с помощью движения по окружности с постоянной угловой скоростью.
34. Эксцентриситет — числовая характеристика конического сечения, показывающая степень его отклонения от окружности.
35. Эллипс — геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек  $F_1$  и  $F_2$  есть величина постоянная, бóльшая расстояния между этими заданными точками.
36. Эллипсоид — поверхность в трёхмерном пространстве, полученная деформацией сферы вдоль трёх взаимно перпендикулярных осей.
37. Эпицикл — это окружность, центр которой равномерно движется по другой окружности.



# СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Галкин Е. В. Краткая история математики. – М.: АСТ, 2003. – 229с.
2. Карпушина Н. Во власти сечений//Наука и жизнь, 2012. № 5.
3. Асимптота//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
4. Гипербола (математика)//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
5. Гипербола: определение, свойства, построение// Математический форум Math Help Planet: [<http://mathhelpplanet.com/static.php>]. – Режим доступа: <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=giperbola> (Дата обращения: 14.04.2019)
6. Гиперболоид//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
7. История изучения геометрического тела конус //UZTEST.RU: [<http://uztest.ru/>]. – Режим доступа: <http://uztest.ru/abstracts/?idabstract=523545> (Дата обращения: 14.04.2019)
8. Коническое сечение//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
9. Конус//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
10. Кривая второго порядка//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)

# СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

11. Окружность//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
12. Парабола//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
13. Парабола: определение, свойства, построение// Математический форум Math Help Planet: [<http://mathhelpplanet.com/static.php>]. – Режим доступа: <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=parabola> (Дата обращения: 14.04.2019)
14. Параболоид//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
15. Шар//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
16. Эксцентриситет//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
17. Эллипс//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)
18. Эллипс: определение, свойства, построение// Математический форум Math Help Planet: [<http://mathhelpplanet.com/static.php>]. – Режим доступа: <http://mathhelpplanet.com/static.php?p=ellips> (Дата обращения: 14.04.2019)
19. Эллипсоид//Википедия: [<https://ru.wikipedia.org>]. – Режим доступа: <https://ru.wikipedia.org> (Дата обращения: 14.04.2019)