Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лекция 5

1. *Основные понятия*

- Обыкновенным дифференциальным уравнением *n* - го порядка называется уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

где $y = y(x)$ – искомая функция.

Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение (1) в тождество, называется **решением** этого **уравнения,** а график этой функции называется **интегральной кривой.**

Если решение задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно называется **интегралом** дифференциального уравнения.

Если искомая функция зависит от одной переменной, то ДУ называется **обыкновенным**.

1. *Основные понятия*

- Наивысший порядок производной, входящей в ДУ, называется **порядком этого уравнения**.

Например, 1) $y''' - 3y'' + 2y = 0$ – ДУ 3-го порядка;

2) $x^2y' + 5xy = y^2$ – ДУ 1- го порядка.

Процесс нахождения решений ДУ называется **интегрированием ДУ**.

Функция $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, содержащая n независимых произвольных постоянных, называется **общим решением ДУ**, если она является его решением при любых значениях постоянных

$c_1, c_2, \ldots, c_n$.

2. Дифференциальное уравнение 1-го порядка

- Дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если уравнение можно разрешить относительно y', то его записывают

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x; y) \qquad (2)$$

и называют ***ДУ 1-го порядка, разрешённым относительно производной.***

Уравнение (2) устанавливает связь (зависимость) между координатами точки (x; y) и угловым коэффициентом $y' = k = tg\alpha$ касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку.

Говорят также, что уравнение (2) задает **поле направлений** в области *D*.

2. Дифференциальное уравнение 1-го порядка

- **Решить ДУ** – значит найти семейство интегральных кривых, отвечающих заданному полю направлений.

Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково, называется **изоклиной**.

ДУ 1-го порядка, разрешённое относительно производной можно записать в **дифференциальной форме**:

$$P(x;y)\,dx + Q(x;y)\,dy = 0,$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ - известные функции. Переменные x и y равноправные в уравнении.

Пример. С помощью изоклин начертить вид интегральных кривых уравнения $y' = 2x$.

Решение. $2x = c$

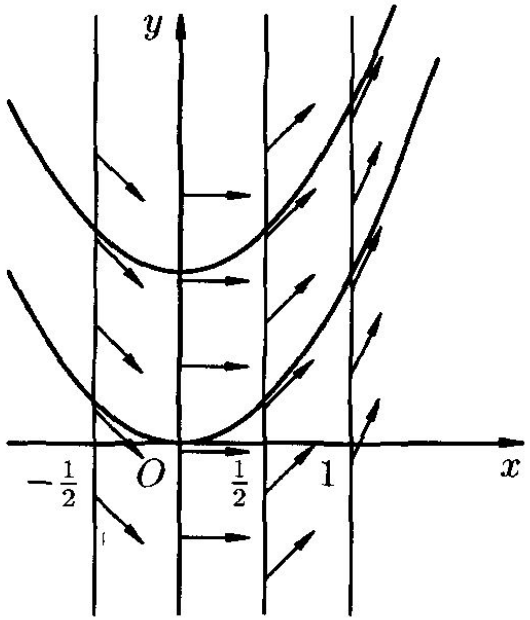
Пример

Так, при $c = 0$ имеем $x = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, поэтому $\alpha = 0$;

при $c = 1$ уравнение изоклины $x = \frac{1}{2}$, поэтому $\operatorname{tg}\alpha = 1$ и $\alpha = 45°$;

при $c = -1$: $x = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$, $\alpha = -45°$;

при $c = 2$: $x = 1$, $\operatorname{tg}\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2 \approx 63°$



2. Дифференциальное уравнение 1-го порядка

Общим решением ДУ 1 – го порядка $y' = f(x; y)$ в области *D называется функция* $y = \varphi(x, c)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1) она является решением данного уравнения при любых значениях произвольной постоянной c, принадлежащих некоторому множеству;

2) для любого начального условия $y(x_0) = y_0$ такого, что $(x_0; y_0) \in D$, существует единственное значение $c = c_0$, при котором решение $y = \varphi(x, c_0)$ удовлетворяет заданному начальному условию.

2. Дифференциальное уравнение 1-го порядка

- Всякое решение $y = \varphi(x, c_0)$, получающееся из общего решения $y = \varphi(x, c)$ при конкретном значении $c = c_0$, называется **частным решением ДУ.**

Задача отыскания решения ДУ 1-го порядка, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется **задачей Коши.**

Начальное условие записывается:

$$y(x_0) = y_0 \quad \text{или} \quad y\Big|_{x=x_0} = y_0.$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши

- Если в уравнении $y'=f(x;\ y)$ функция $f(x;\ y)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial f}{\partial y}$ в области *D,* то решение ДУ $y'=f(x;\ y)$ при начальном условии $y\ (x_0) = y_0$ существует и единственно, т.е. через точку $(x_0;\ y_0)$ проходит **единственная интегральная кривая** данного уравнения.

1. Уравнения с разделяющимися переменными

- Общий вид уравнения

$$P(x) \cdot dx + Q(y) \cdot dy = 0$$

Проинтегрировав почленно это уравнение, получим общий интеграл:

$$\int P(x) \cdot dx + \int Q(y) \cdot dy = c$$

Пример. Найти общий интеграл уравнения

$$x\,dx - dy = 0.$$

Решение. $\int x \cdot dx - \int y \cdot dy = c_1$ или $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = c_1$

Обозначим $\frac{c}{2} = c_1$.

Тогда $x^2 - y^2 = c$ *- общий интеграл.*

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Или более общий случай:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0.$$

Разделим почленно на произведение: $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$

.

Получим: $$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = 0,$$

Проинтегрируем уравнение:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)} \cdot dy = c$$

Замечание. Чтобы не потерять решения, надо отдельно решить уравнение $Q_1(y) \cdot P_2(x) = 0$ и установить те решения, которые не могут быть получены из общего решения, - **особые решения**.

Пример

- Найти частное решение ДУ (решить задачу Коши):

$$(1 + x^2)dy + ydx = 0$$

при начальных условиях $y(1) = 1$.

Решение

1) Разделим обе части уравнения на произведение $(1 + x^2)\cdot y$ при условии, что $(1 + x^2)\cdot y \neq 0$.

Получим: $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{(1 + x^2)} = 0.$

$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{(1 + x^2)} + C$. Тогда $\ln|y| = -arctgx + C$ или $y = e^{-arctgx + C}$ — **общее решение** ДУ.

2) Найдем частное решение: $1 = e^{-arctg1 + C}$.

Откуда $C = \frac{\pi}{4}$. Тогда $y = e^{-arctgx + \frac{\pi}{4}}$ — **частное решение** ДУ.

Решение

3) Решим уравнение: $(1 + x^2)\cdot y = 0$.

Откуда $1 + x^2 = 0$ или $y = 0$.

Первое уравнение не имеет решений.
Второе уравнение $y = 0$ является решением ДУ и не входит в общий интеграл ни при каких значениях C, значит, $\boldsymbol{y = 0}$ **– особое решение.**

Пример. $y' = -\frac{y}{x}$.

Пример

1. Решить уравнение $y' = 2x$.

Решение. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Откуда $dy = 2xdx$. Проинтегрируем уравнение $\int dy = \int 2xdx + C$ и получим $y = x^2 + C$ – *общее решение ДУ.*

2. Однородные дифференциальные уравнения

- К уравнению с разделяющимися переменными приводятся однородные уравнения 1-го порядка.

Опр. Функция $f(x;\ y)$ называется **однородной функцией *n* - го порядка** (измерения), если при умножении каждого её аргумента на произвольный множитель λ вся функция умножится на λ^n, т.е.

$$f(\lambda \cdot x; \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot f(x; y).$$

Например, функция $f(x; y) = 3xy + x^2$ есть однородная функция 2-го порядка, т. к.

$f(\lambda x;\lambda y) = 3(\lambda x)(\lambda y) + (\lambda x)^2 = \lambda^2(3xy + x^2) = \lambda^2\ f(x; y).$

Однородные дифференциальные уравнения

Опр. Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x; y)$$

называется **однородным**, если функция $f(x; y)$ есть однородная функция нулевого порядка.

Тогда по определению $f(x; y) = f(\lambda x; \lambda y)$.

Положив $\lambda = \frac{1}{x}$, получим:

$$f(x; y) = f\left(\frac{x}{x}; \frac{y}{x}\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

т.е. $\boxed{y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).}$ Произведем замену $\boxed{\frac{y}{x} = u}$ или $\boxed{y = u \cdot x.}$

Тогда $y' = u'x + u$ или $dy = xdu + udx$.

Пример

Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 - y^2) \cdot dx + 2xy \cdot dy = 0.$$

Решение.

Положим $y = u \cdot x$. Тогда $dy = x \cdot du + u \cdot dx$.

$$(x^2 - u^2x^2) \cdot dx + 2x \cdot ux \cdot x \cdot du + 2x \cdot ux \cdot u \cdot dx,$$

$$x^2(1 - u^2 + 2u^2) \cdot dx + 2ux^3 \cdot du = 0,$$

$$(1 + u^2) \cdot dx + 2ux \cdot du = 0,$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2u}{1 + u^2} \cdot du = 0$$

$$\ln|x| + \ln(1 + u^2) = c_1, \quad \ln\left(|x| \cdot (1 + u^2)\right) = c_1, \quad |x|(1 + u^2) = e^{c_1}.$$

Заменяя u на $\frac{y}{x}$, получаем: $x^2 + y^2 = cx$ — общий интеграл

3. Линейные ДУ первого порядка. Уравнения Бернулли.

Опр. Уравнение вида $y' + P(x)y = Q(x)$ называется **линейным**.

Если $Q(x) \neq 0$, то уравнение называется **линейным неоднородным**, а если $Q(x) = 0$, то линейным однородным.

Способы решения линейного неоднородного ДУ

1 - го порядка.

1. Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

Рассмотрим $y' + p(x) \cdot y = 0$. Разделим переменные $\frac{dy}{y} = -p(x) \cdot dx$ и $\ln|y| = -\int p(x) \cdot dx + \ln|c_1|$.

Линейные ДУ первого порядка.

Получим $\left|\frac{y}{c_1}\right| = e^{-\int p(x)\,dx}$, т.е. $y = \pm c_1 e^{-\int p(x)\,dx}$

или $y = c \cdot e^{-\int p(x)\,dx}$, где $c = \pm c_1$.

Полагаем $c = c(x)$. Тогда $y = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$.

Найдем производную y'. Подставим y и y' в исходное уравнение, откуда получим $c(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c_3$, где c_3 - *const*. Тогда искомое решение имеет вид:

$$\boldsymbol{y = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\,dx + c_3\right] \cdot e^{-\int P(x)dx}}.$$

Пример. Решить уравнение: $y' - 3\frac{y}{x} = x$.

Линейные ДУ первого порядка.

2. Метод Бернулли.

Применим подстановку $y = u \cdot v$,

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – неизвестные функции,

$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставим y и y' в исходное уравнение: $(u' \cdot v + u \cdot v') + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$.

Сгруппируем : $(v' + P(x) \cdot v) \cdot u + u' \cdot v = Q(x)$.

За v примем любое частное решение уравнения

$v' + P(x) \cdot v = 0$ (например, $v = e^{-\int P(x)dx}$), обращающее в нуль коэффициент при u в уравнении.

Тогда получим $u' \cdot v = Q(x)$, откуда $u' = \frac{Q(x)}{v}$

или $u' = Q(x) \cdot e^{-\int P(x)dx}$

Линейные ДУ первого порядка.

Откуда $u = C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx$. Тогда получим **общее решение:**

$$\boldsymbol{y = u \cdot v = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left[C + \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx}\, dx\right].}$$

Пример. Решить ДУ методом Бернулли:

$$y' - 3\frac{y}{x} = x.$$

4. Уравнение Бернулли.

Уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x)\cdot y^m ,$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$, называется **уравнением Бернулли.**

Оно приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-m}$. Но на практике обычно сразу применяют подстановку $y = u \cdot v$.

Пример. $x^2 \cdot y' = y^2 + xy$.

Линейные дифференциальные уравнения II-го порядка с постоянными коэффициентами

Опр. Уравнение вида $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$, где p и q – действительные числа, называется **линейным неоднородным ДУ II-го порядка с постоянными коэффициентами (ЛНДУ).**

Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ называется **линейным однородным ДУ II-го порядка с постоянными коэффициентами (ЛОДУ).**

Для нахождения общего решения уравнения достаточно найти два его частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, образующих фундаментальную систему решений уравнения (ФСР): любое произвольное решение может быть получено, как комбинация $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

ЛОДУ II-порядка с постоянными коэффициентами

- Будем искать частные решения в виде $y = e^{kx}$,

где k – некоторое число.

Продифференцируем функцию $y = e^{kx}$:

$y' = k \cdot e^{kx}$, $y'' = k^2 \cdot e^{kx}$. Подставим в уравнение:

$$k^2 \cdot e^{kx} + \mathrm{p} \cdot k \cdot e^{kx} + \mathrm{q} \cdot e^{kx} = 0.$$

$$e^{kx} \cdot (k^2 + \mathrm{p}k + \mathrm{q}) = 0 \quad (e^{kx} \neq 0).$$

$k^2 + \mathrm{p}k + \mathrm{q} = 0$ – характеристическое уравнение ДУ.

Тогда общее решение ДУ строится в зависимости от характера корней уравнения.

Теорема

1) Пусть характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$ имеет действительные корни k_1 и k_2, причем $k_1 \neq k_2$ ($D > 0$). Тогда **общее решение** уравнения

$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0$ имеет вид $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$,

где c_1 и c_2 - произвольные числа;

2) Если характеристическое уравнение имеет один действительный корень k (кратности 2) ($D = 0$), то общее решение уравнения имеет вид $y = e^{kx}(c_1 + c_2 x)$;

3) Если характеристическое уравнение не имеет действительных корней ($D < 0$) , т.е. корни комплексные $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, то общее решение уравнения имеет вид $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$.

Пример

Решить уравнения:

а) $\boldsymbol{y'' - 5y' + 6y = 0.}$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 5k + 6 = 0$ $(D>0)$. Корни $k_1 = 2$ и $k_2 = 3$. *Тогда получим общее решение* $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.

б) $\boldsymbol{y'' - 4y' + 4y = 0.}$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 4 = 0$ $(D = 0)$. Корни $k_1 = k_2 = 2$. *Тогда получим общее решение* $y = e^{2x}(c_1 + c_2 x)$.

в) $\boldsymbol{y'' - 6y' + 25y = 0.}$

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 25 = 0$ $(D < 0)$. Корни $k_{1,2} = 3 \pm 4i$. *Тогда получим общее решение* $y = e^{3x}(c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x)$.

Структура общего решения ЛНДУ II-порядка с постоянными коэффициентами

Теорема. Общим решением ДУ $y'' + \mathrm{p} \cdot y' + \mathrm{q} \cdot y = f(x)$ является сумма его произвольного частного решения $y_{\text{ч}}$ и общего решения $y_{\text{о.о.}} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ соответствующего однородного уравнения,

т.е. $y_{\text{о.н.}} = y_{\text{о.о.}} + y_{\text{ч}}$.

Рассмотрим частные случаи функции $f(x)$ в правой части уравнения.

I. $\boldsymbol{f(x) = e^{ax} P_n(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен n – й степени.

а) если a не является корнем характеристического уравнения $\varphi(k) = k^2 + \mathrm{p}k + \mathrm{q} = 0$, т.е. $\varphi(a) \neq 0$,

то $\boldsymbol{y_{\text{ч}} = e^{ax} Q_n(x)}$, где $Q_n(x)$ - многочлен n – й степени с неопределёнными коэффициентами.

ЛНДУ II-порядка с постоянными коэффициентами

б) если a - корень характеристического уравнения $\varphi(k) = k^2 + \mathrm{p}k + \mathrm{q} = 0$, т.е. $\varphi(a) = 0$, то $\boldsymbol{y_{\text{ч}} = x^r\, e^{ax}\, Q_n(x)}$, где $\boldsymbol{r}$ – кратность корня a ($r = 1$ или $r = 2$).

Пример. Решить ДУ: $y'' - 2y' + y = e^{2x}$.

ЛНДУ II-порядка с постоянными коэффициентами

II. $f(x) = e^{\alpha x}\,[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$

а) если $\varphi(\alpha+\beta i) \neq 0$, то полагают

$y_ч = e^{\alpha x}\,[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x]$,

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ – многочлены степени $N = \max\{n, m\}$.

б) если $\varphi(\alpha+\beta i) = 0$, то полагают

$y_ч = x^r e^{\alpha x}\,[S_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x]$, где r – кратность корней $\alpha \pm \beta i$ (для уравнений 2-го порядка $r = 1$).

Пример. Решить уравнение $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$.

ЛНДУ II-порядка с постоянными коэффициентами

III. Общий случай.

Применяют метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа).

1) Решаем уравнение $y'' + \mathrm{p} \cdot y' + \mathrm{q} \cdot y = 0$. Получаем $y_{\text{о.о.}} = \mathrm{c}_1 y_1 + \mathrm{c}_2 y_2$, где y_1 и y_2 - частные решения однородного уравнения, c_1 и c_2 - постоянные коэффициенты.
2) Пусть $\mathrm{c}_1(x)$ и $\mathrm{c}_2(x)$ – функции от x. Составим систему для нахождения $\mathrm{c}_1(x)$ и $\mathrm{c}_2(x)$:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0, \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

ЛНДУ II-порядка с постоянными коэффициентами

Или 2-й способ определения $c_1(x)$ и $c_2(x)$ по формулам:

$$c_1(x) = -\int \frac{y_2 f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx + c_3,$$

$$c_2(x) = \int \frac{y_1 f(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx + c_4,$$

где $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ - определитель Вронского.

Пример. Решить уравнение $y'' + y = tgx$.