Поиск оптимального плана – точки равновесия x*

- выпуск **заданного** количества продукции *q* с **наименьшими** переменными **издержками**

$$\boxed{G(x) = w \cdot x \to \min,}$$

при условии

$$\boxed{q(x) = const}$$

$$x \geq 0.$$

- выпуск **максимального** количества продукции при наличии бюджетного ограничения

$$\boxed{q(x) \to \max}$$

при условии

$$\boxed{G(x) = w \cdot x = const}$$

$$x \geq 0.$$

Точка равновесия *x**

- **касательная**
  - *x** - точка касания изокосты с изоквантой, причем задействованы все ресурсы

$$x_1^* > 0, \quad x_2^* > 0$$

- **угловая**
  - точка равновесия лежит на одной из осей

одна из координат точки равна 0

Изокоста

- множество планов производства с одинаковыми переменными издержками

- Уравнение изокосты

$$G(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = c$$

- Семейство изокост на плоскости – множество отрезков параллельных прямых с нормалью $w = (w_1, w_2)$

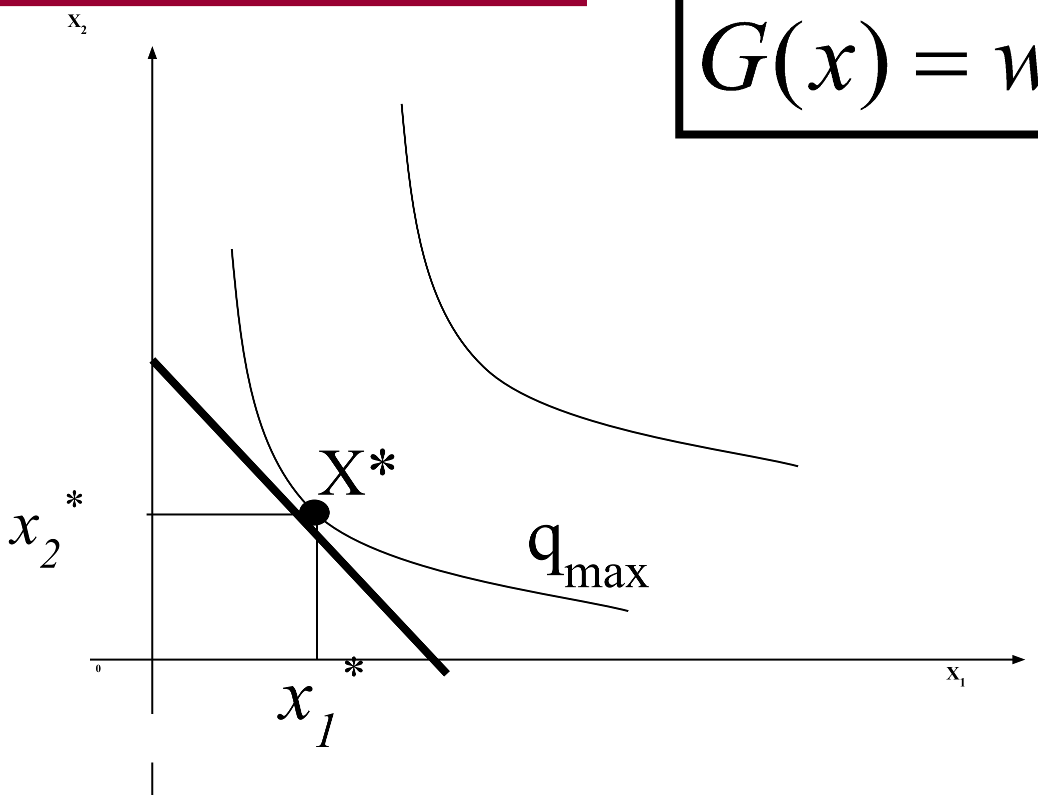
- Угол наклона изокосты к оси Ox_1 определяется отношением цен на ресурсы: $\mathrm{tg}\phi = -w_1 / w_2$.

Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия

$$\boxed{q(x) \to \max}$$

при условии

$$\boxed{G(x) = w \cdot x = const}$$



Необходимое условие касательной точки равновесия

- $x^*=(x_1^*, x_2^*)$ – касательная точка равновесия и
- ПФ дифференцируема в этой точке

$$\Downarrow$$

$$\boxed{MRTS_{12}(x^*) = \frac{w_1}{w_2}}$$

Правило равной производительности ресурсов на единицу затрат

$$\boxed{MRTS_{12} = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{w_1}{w_2}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{MP_1}{w_1} = \frac{MP_2}{w_2}}$$

- Производитель заменяет один ресурс другим, пока это выгодно.
- **Отдачи ресурсов в расчете на единицу затрат равны для всех используемых ресурсов.**
- Рубль затрат в любой ресурс приносит одинаковый эффект.
- В рыночной экономике происходит согласование способа производства с соотношением цен на факторы,
- производительность факторов (отдача ресурсов) должна соответствовать их стоимости,
- **в результате** ограниченные ресурсы используются самым эффективным способом.

Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия для ПФ Кобба-Дугласа

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 \to \min$$ при условии $$q = 4 x_1^{1/2} x_2^{1/4}$$

где x_1 – отработанные человеко-часы,

x_2 – отработанные машино-часы,

q – число изготовленных рам.

Поиск оптимального плана для ПФ Кобба-Дугласа.

ресурсы покупают по ценам **w_1** и **w_2** ден. ед.

Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия

Поиск оптимального плана для **линейной** ПФ

$$G(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 \to \min \qquad \boxed{a_1 x_1 + a_2 x_2 = q,}$$

- в одной системе координат построим изокванту и семейство изокост
- Для определенности предположим, что

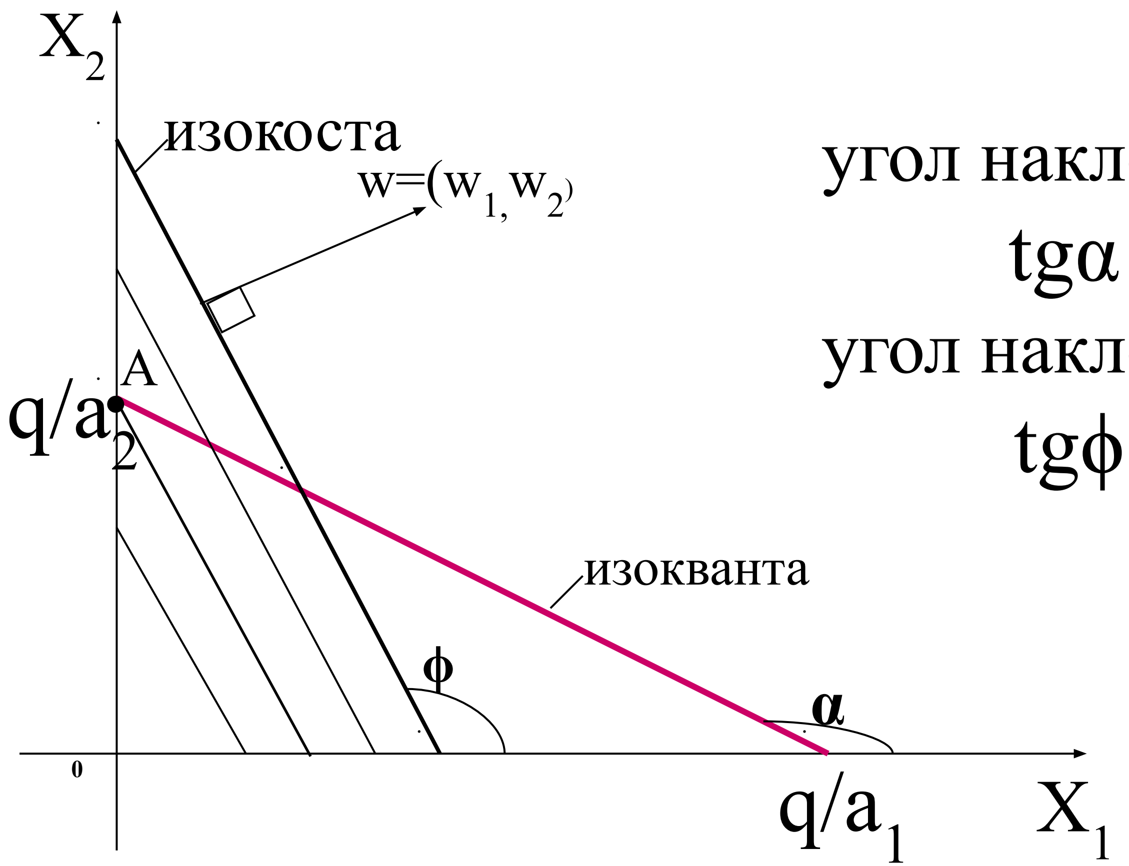
$$w_1/w_2 > a_1/a_2$$

- план x* – самый дешевый, обеспечивающий выпуск *q* единиц продукции.
- Получили угловую точку равновесия

$$\operatorname{argmin} G(x) = x^* = (0,\ q/a_2).$$

Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия

для **линейной** ПФ



угол наклона изокванты

$$\mathrm{tg}\alpha = -a_1/a_2\ ,$$

угол наклона изокосты

$$\mathrm{tg}\phi = -\ w_1/w_2$$

Необходимое условие угловой точки равновесия

- Если оптимальный план $\mathbf{x^*=(0,\ x_2^*)}$ (невыгодно использовать даже первую единицу первого ресурса), то

$$\boxed{MRTS_{12}(x^*) \le \frac{w_1}{w_2}}$$

- Если оптимальный план $\boldsymbol{x^*=(x_1^*,\ 0)}$, то

$$\boxed{MRTS_{12}(x^*) \ge \frac{w_1}{w_2}}$$

Функции издержек

Построение функции переменных издержек

$$G(x) = w \cdot x \to \min,$$

Пусть задача минимизации издержек имеет единственное решение: $x^*=(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ - план производства по ресурсам, обеспечивающий выпуск q единиц продукции = **оптимальный план по ресурсам** = **точка равновесия** производителя.

- **функция спроса на ресурсы:** $x^* = x^*(w,q)$
- стоимость этих ресурсов $w \cdot x^*(w,q)$ денежных единиц.
- **функция переменных издержек**

$$C_v(w,q) = w \cdot x^*(w,q)$$

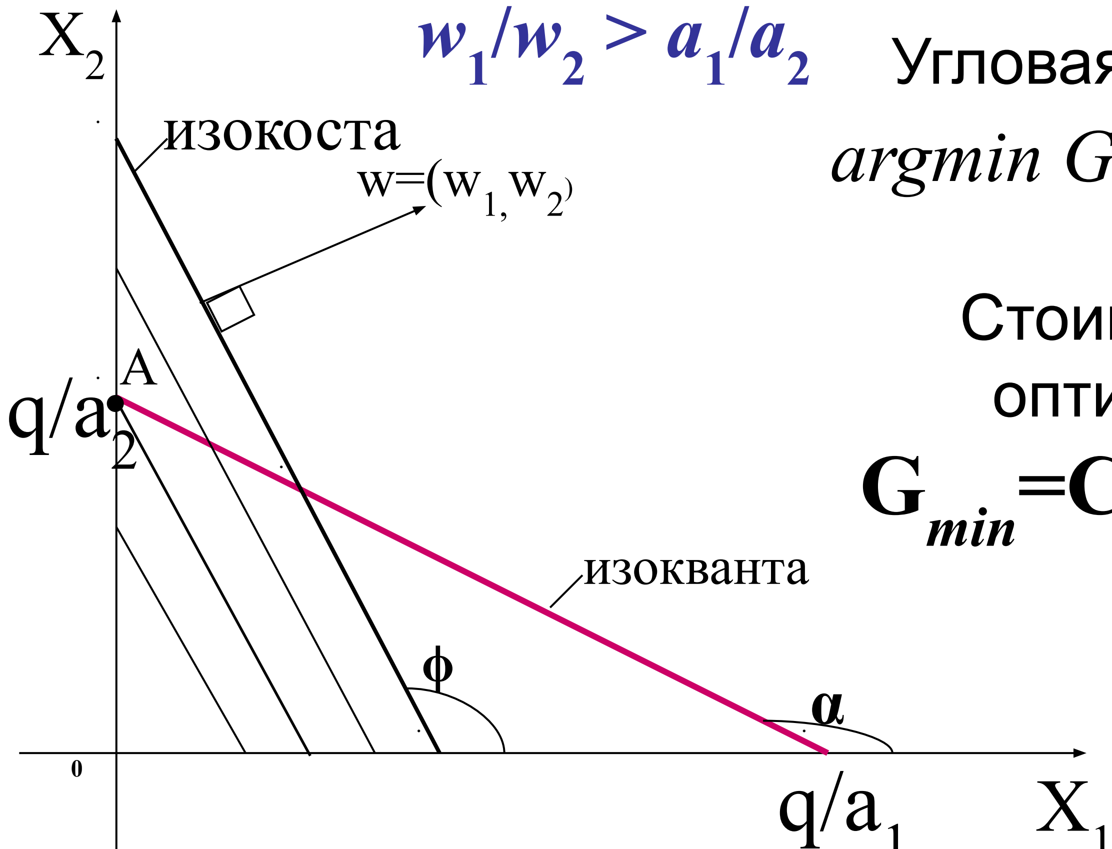
сопоставляет объему выпуска q и ценам ресурсов w

стоимость плана, обеспечивающего выпуск q единиц продукции с наименьшими переменными издержками,

- **функция общих издержек** $\boxed{C(q) = C_0 + C_v(q).}$

Функция переменных издержек для **линейной** ПФ

$w_1/w_2 > a_1/a_2$



Угловая точка равновесия:

$argmin\ G(x) = \boldsymbol{x^* = (0,\ q/a_2)}$.

Стоимость ресурсов в оптимальном плане

$\mathbf{G}_{min} = \mathbf{C}_v(q) = w_2\ q/a_2$ ден. ед.

В общем случае, для линейной ПФ функция переменных издержек $\mathbf{C}_v(q) = min\{w_1/a_1,\ w_2/a_2\}q$.

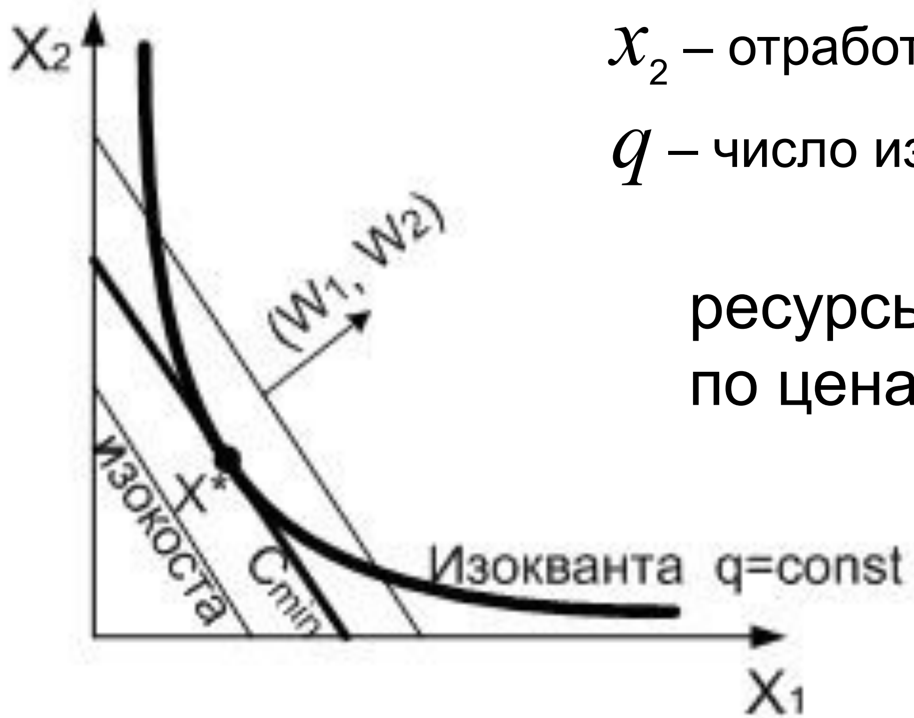
Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия для ПФ Кобба-Дугласа

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 \to \min$$ при условии $$q = 4x_1^{1/2} x_2^{1/4}$$

где x_1 – отработанные человеко-часы,

x_2 – отработанные машино-часы,

q – число изготовленных рам.



ресурсы покупают
по ценам **w_1** и **w_2** ден. ед.

Поиск оптимального плана для ПФ Кобба-Дугласа.

Однородные функции

- Функция нескольких переменных называется **однородной порядка *m***, если для всех *x* из некоторой области X

$$f(kx_1, kx_2, \ldots, kx_n) = k^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- Если ПФ является **однородной порядка *m***, то
- при ***m*=1** ПФ обладает **постоянным**;
- при ***m*>1** ПФ обладает **возрастающим**
- при ***m*<1** ПФ обладает **убывающим**

эффектом масштаба

Функция издержек однородной ПФ

Теорема. Если ПФ является **однородной порядка (степени) *m***, то

- функция спроса на ресурсы

$$\boxed{x(q) = x^1 q^{1/m}}$$

где x^1 – план по ресурсам, обеспечивающий выпуск **единицы** продукции с наименьшими переменными издержками

(стоимость плана x^1 есть $C_v(1)=C_1$),

- функция переменных издержек

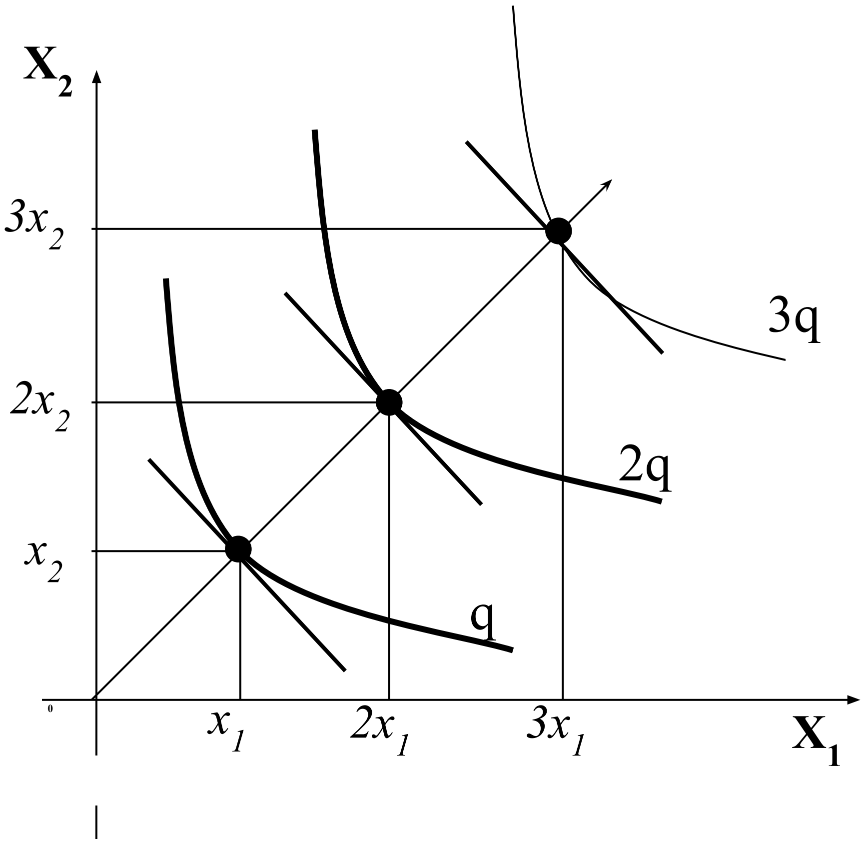
$$\boxed{C_v(q) = C_v(1) q^{1/m}.}$$

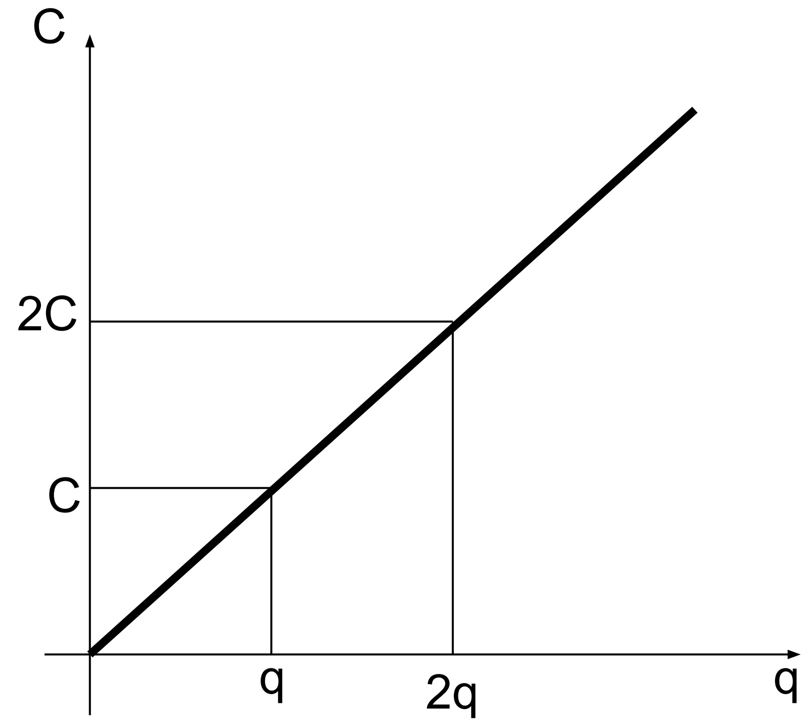
- **Следствие.** Если ПФ характеризуется **постоянным** эффектом масштаба (является однородной степени 1), то она порождает **линейную функцию издержек**

$$C(q) = C_0 + C_1 \cdot q$$

Влияние эффекта масштаба на вид кривой издержек

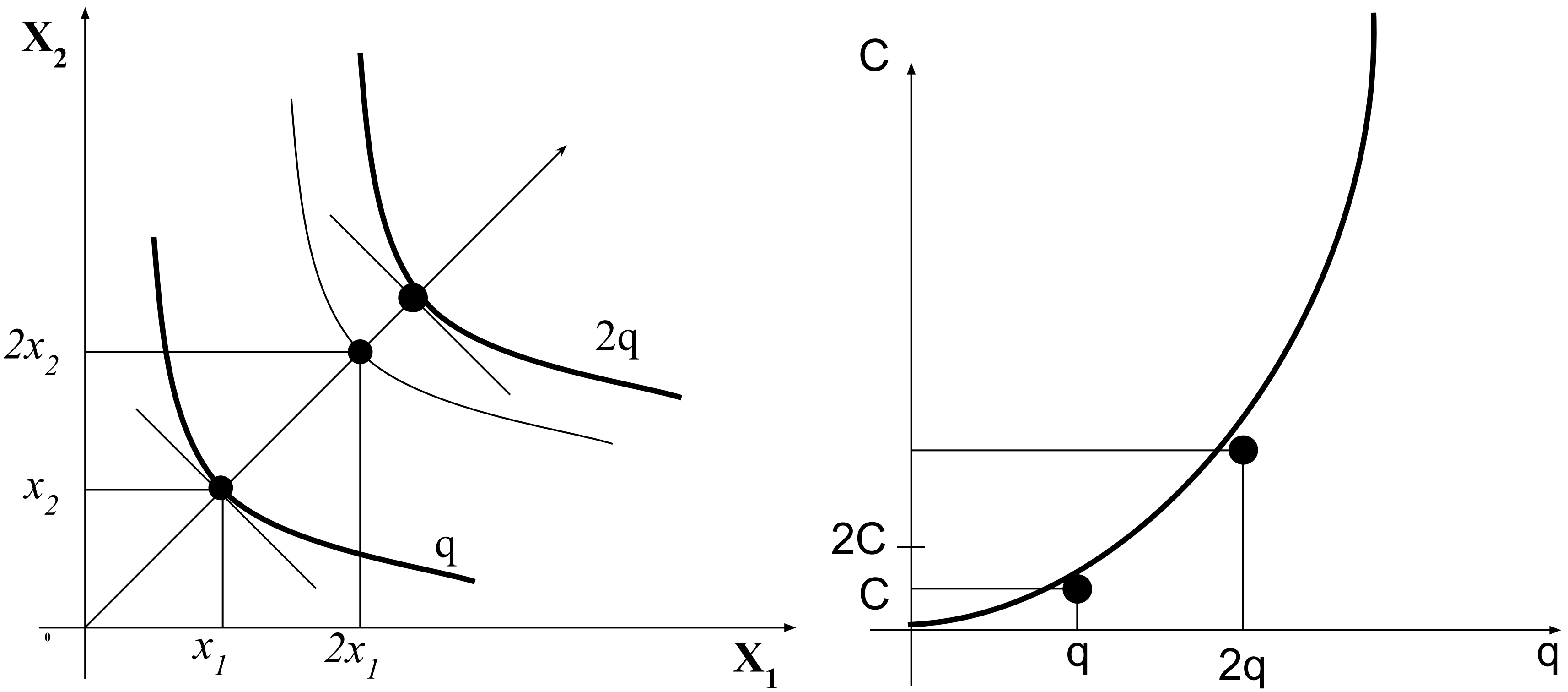
постоянный





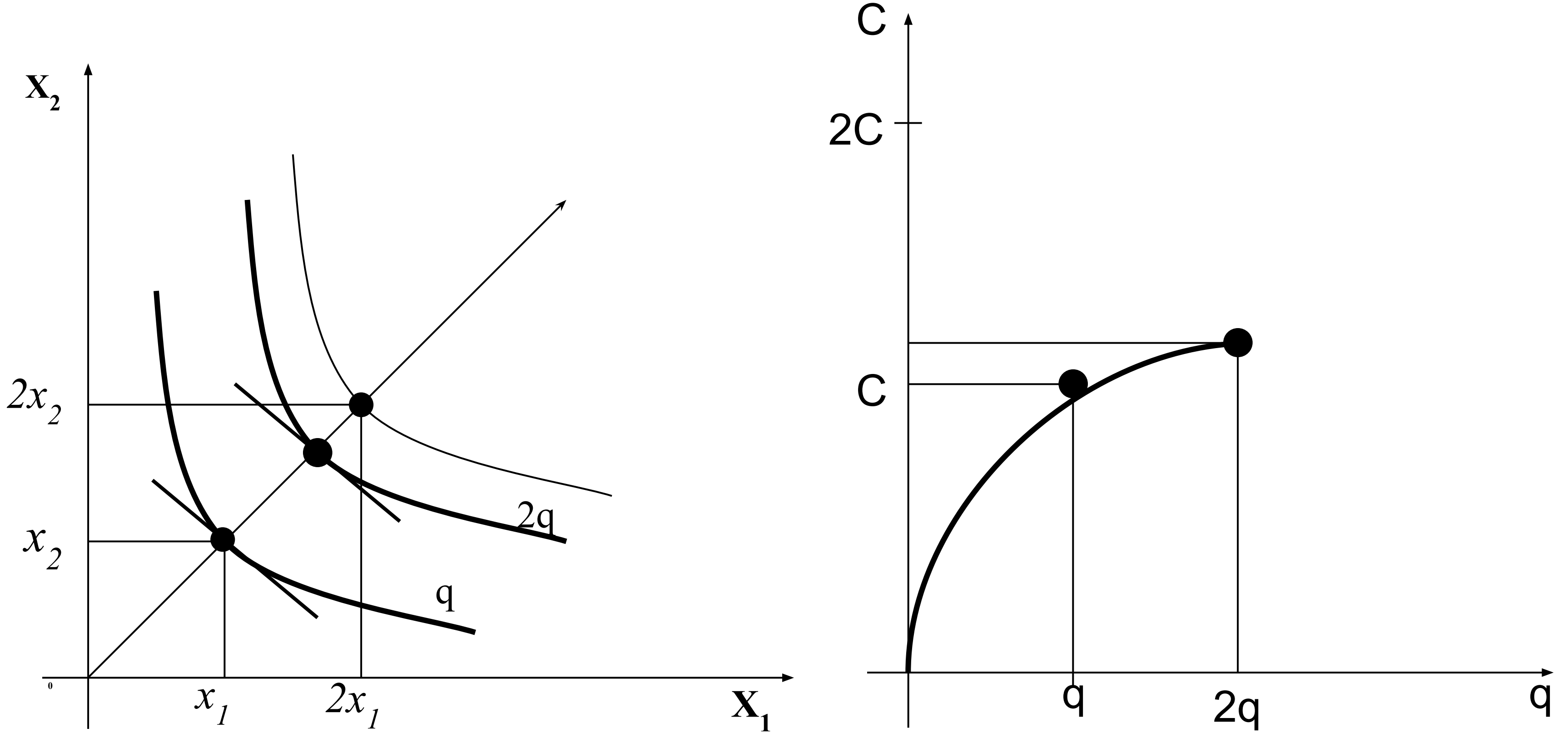
Влияние эффекта масштаба на вид кривой издержек

убывающий



Влияние эффекта масштаба на вид кривой издержек

возрастающий



Функции издержек

$$C(q) = C_V(q) + C_0$$

общие издержки **TC** (total cost)	=	переменные издержки **VC** (variable cost)	+	постоянные издержки **FC** (fixed cost).

- $AC(q) = \dfrac{C(q)}{q}$ **функция средних издержек** – **себестоимость** (ATC – average total cost) численно равна издержкам, которые приходятся на единицу продукции.

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{C_v(q)}{q} + \frac{C_0}{q} = AVC(q) + AFC(q).$$

функция **средних переменных издержек** (average variable cost)

функция **средних постоянных издержек** (average fixed cost)

Предельные издержки

- $C'(q)$ **- функция предельных издержек**.

$$C_v'(q) = C'(q) =$$

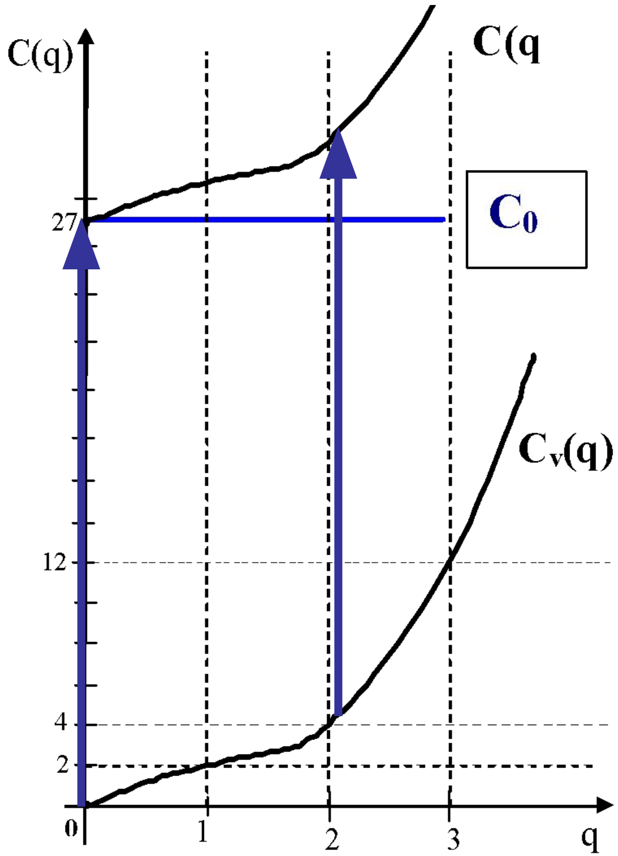
= ***MC(q)*** *(marginal cost).*

- **Экономическая интерпретация предельных издержек**: величина предельных издержек при данном объеме выпуска показывает, на сколько денежных единиц приблизительно возрастут издержки, если увеличить объем выпуска на единицу

$$C'(q) \approx C(q+1) - C(q)$$

$$\Delta q = 1 \quad \Rightarrow \quad MC(q) \approx \Delta C$$

свойства функций издержек 1



$$C(q) = q^3 - 3q^2 + 4q + 27$$

- $C(q) = C_V(q) + C_0$

Кривая **переменных** издержек

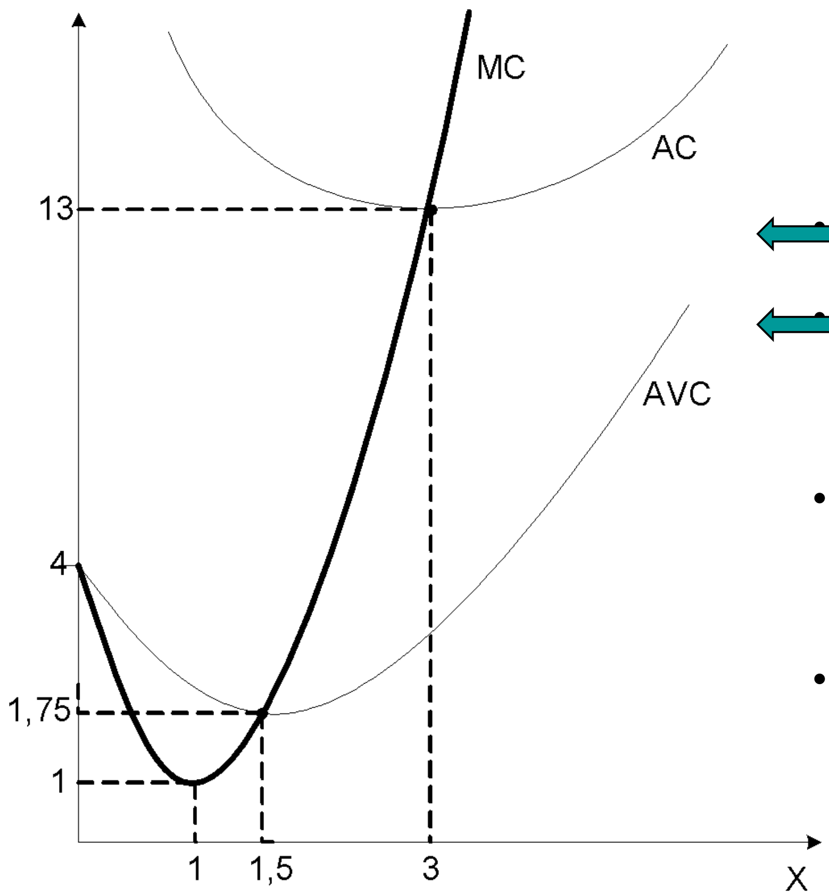
сдвиг вверх на C_0

Кривая **общих** издержек

- $C_V(0)=0$. График функции переменных издержек выходит из начала координат,
- графики функций общих и постоянных издержек начинаются в точке $(0, C_0)$.
- **А1**: функция переменных (общих) издержек является строго монотонно **возрастающей** функцией

$$C_v'(q) = C'(q) > 0$$

свойства функций издержек 2



- **A2**: начиная с некоторого объема выпуска (возможно, равного нулю), приращение переменных (общих) издержек, порожденное выпуском дополнительной единицы продукции, последовательно возрастает.
- предельные издержки MC(q)≈ C(q+1)–C(q) становятся все больше.
- функция переменных (общих) издержек является **выпуклой** либо при всех q ≥ 0, либо начиная с некоторого объема выпуска.

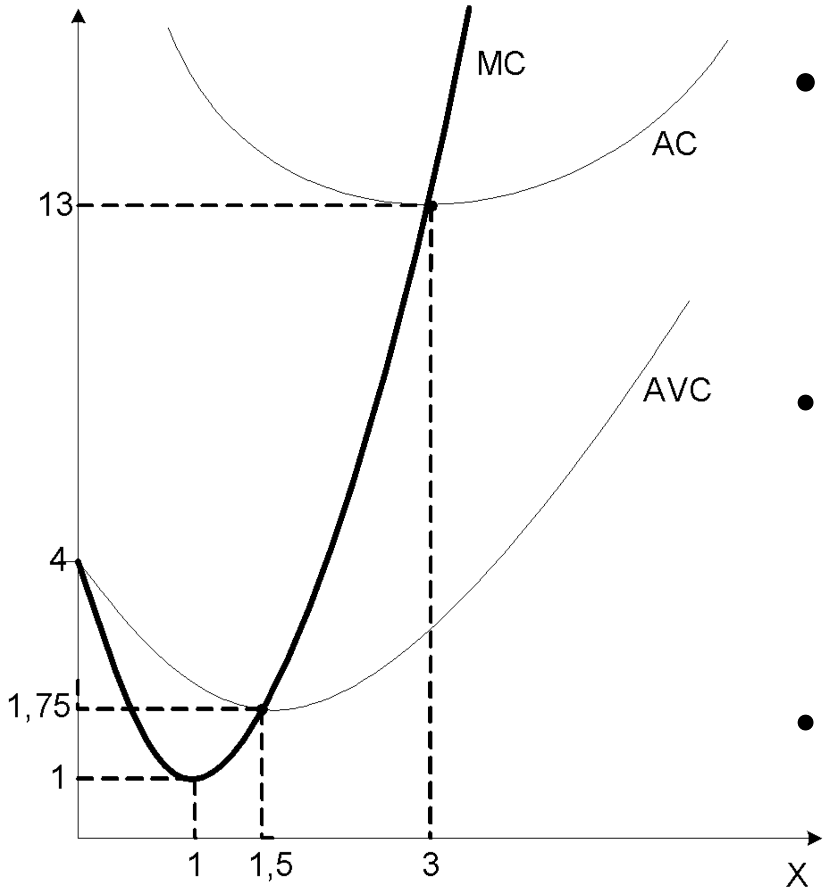
- графики функции предельных издержек и функции средних переменных издержек начинаются в одной точке. $AVC(0) = C'(0).$

- $AVC(q) < AC(q)$ ⟶ график функции средних переменных издержек AVC расположен ниже графика функции средних общих издержек AC,

- с ростом *q* кривые AC и AVC асимптотически сближаются.

$$\lim_{q\to\infty} (AC(q) - AVC(q)) = \lim_{q\to\infty} AFC(q) = 0$$

свойства функций издержек 3



- **A3**: С ростом объема выпуска средние издержки первоначально убывают, а, начиная с некоторого объема выпуска, начинают возрастать
- кривая предельных издержек MC пересекает кривую средних переменных издержек AVC в точке минимума средних переменных издержек
- кривая предельных издержек MC пересекает кривую средних общих издержек AC тоже в её точке минимума

$$AC'(q) = \left(\frac{C(q)}{q}\right)' = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2} = \frac{C'(q) - AC(q)}{q} = 0$$

На кривой общих затрат TC

- **предельные** затраты MC определяются тангенсом угла наклона **касательной**

- **средние** затраты AC определяются тангенсом угла наклона **луча**, проведенного из начала координат к кривой

Средние затраты достигают минимума при таком объёме выпуска, когда они равны предельным затратам

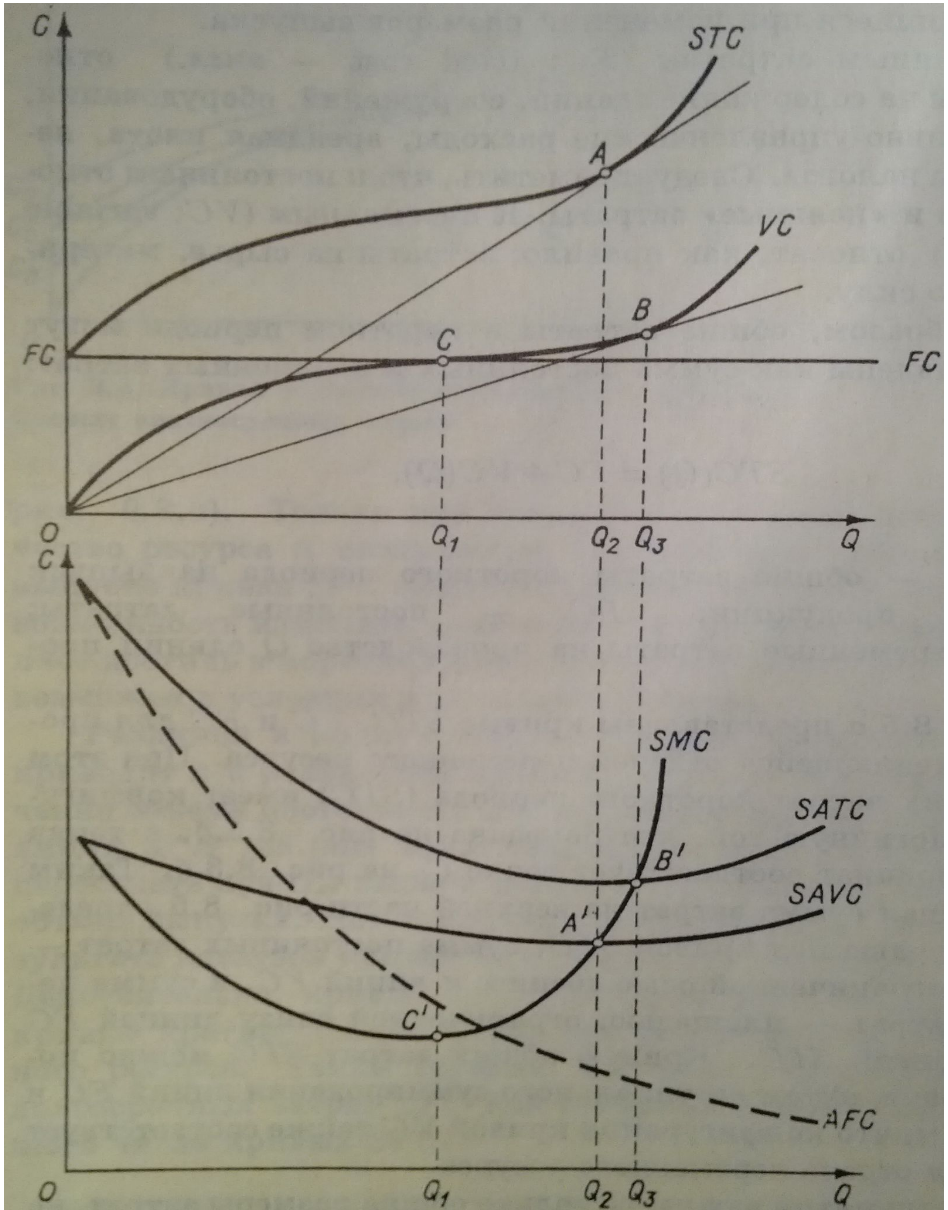


Рис. 8.5. Взаимосвязь общих, постоянных, переменных, средних и предельных затрат в коротком периоде.