

Поиск оптимального плана – точки равновесия x^*

- выпуск заданного количества продукции q с **наименьшими** переменными **издержками**

$$G(x) = w \cdot x \rightarrow \min,$$

при условии

$$q(x) = \text{const}$$

$$x \geq 0.$$

- выпуск **максимального** количества продукции при наличии бюджетного ограничения

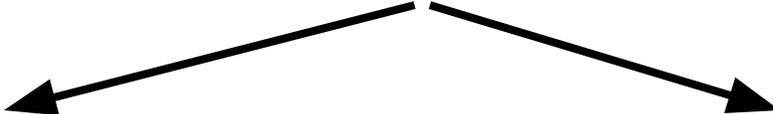
$$q(x) \rightarrow \max$$

при условии

$$G(x) = w \cdot x = \text{const}$$

$$x \geq 0.$$

Точка равновесия x^*



- **касательная**

- x^* - точка касания ИЗОКОСТЫ С ИЗОКВАНТОЙ, причем задействованы все ресурсы

$$x_1^* > 0, \quad x_2^* > 0$$

- **угловая**

- точка равновесия лежит на одной из осей

одна из

координат точки равна 0

Изокоста

- множество планов производства с одинаковыми переменными издержками
- Уравнение изокосты

$$G(x) = w_1 x_1 + w_2 x_2 = c$$

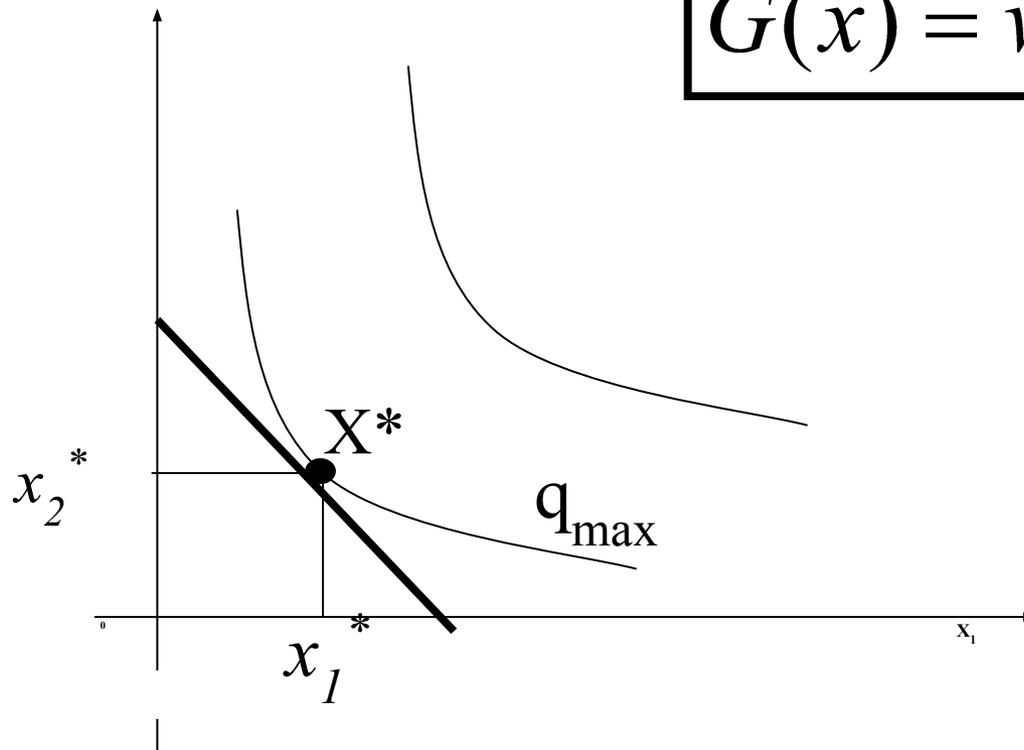
- Семейство изокост на плоскости – множество отрезков параллельных прямых с нормалью $w = (w_1, w_2)$
- Угол наклона изокосты к оси Ox_1 определяется отношением цен на ресурсы:
 $\text{tg} \phi = - w_1 / w_2$.

Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия

$$q(x) \rightarrow \max$$

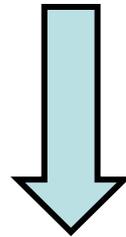
при условии

$$G(x) = w \cdot x = \text{const}$$



Необходимое условие касательной точки равновесия

- $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ – касательная точка равновесия и
- ПФ дифференцируема в этой точке



$$MRTS_{12}(x^*) = \frac{w_1}{w_2}$$

Правило равной производительности ресурсов на единицу затрат

$$\boxed{MRTS_{12} = \frac{MP_1}{MP_2} = \frac{w_1}{w_2}} \longleftrightarrow \boxed{\frac{MP_1}{w_1} = \frac{MP_2}{w_2}}$$

- Производитель заменяет один ресурс другим, пока это выгодно.
- **Отдачи ресурсов в расчете на единицу затрат равны для всех используемых ресурсов.**
- Рубль затрат в любой ресурс приносит одинаковый эффект.
- В рыночной экономике происходит согласование способа производства с соотношением цен на факторы,
- производительность факторов (отдача ресурсов) должна соответствовать их стоимости,
- **в результате** ограниченные ресурсы используются самым эффективным способом.

Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия для ПФ Кобба-Дугласа

$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 \rightarrow \min \quad \text{при условии} \quad q = 4x_1^{1/2} x_2^{1/4}$$

где x_1 – отработанные человеко-часы,

x_2 – отработанные машино-часы,

q – число изготовленных рам.

ресурсы покупают по ценам w_1 и w_2 ден. ед.



Поиск оптимального плана для ПФ Кобба-Дугласа.

Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия

Поиск оптимального плана для **линейной** ПФ

$$G(x) = w_1x_1 + w_2x_2 \rightarrow \min \quad \boxed{a_1x_1 + a_2x_2 = q,}$$

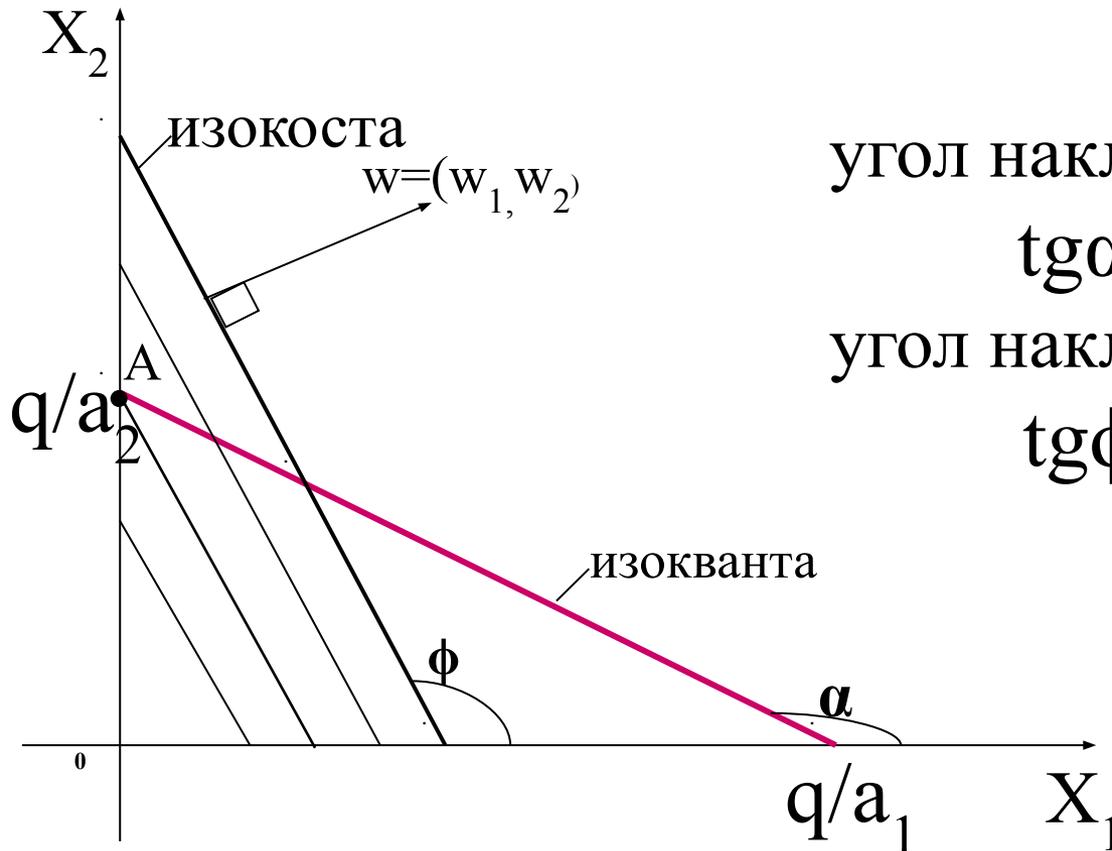
- в одной системе координат построим изокванту и семейство изокост
- Для определенности предположим, что

$$w_1/w_2 > a_1/a_2$$

- план x^* – самый дешевый, обеспечивающий выпуск q единиц продукции.
- Получили угловую точку равновесия

$$\mathit{argmin} G(x) = x^* = (0, q/a_2).$$

Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия для линейной ПФ



УГОЛ НАКЛОНА ИЗОКВАНТЫ

$$\operatorname{tg} \alpha = -a_1/a_2,$$

УГОЛ НАКЛОНА ИЗОКОСТЫ

$$\operatorname{tg} \phi = -w_1/w_2$$

Необходимое условие угловой точки равновесия

- Если оптимальный план $x^*=(0, x_2^*)$ (невыгодно использовать даже первую единицу первого ресурса), то

$$MRTS_{12}(x^*) \leq \frac{w_1}{w_2}$$

- Если оптимальный план $x^*=(x_1^*, 0)$, то

$$MRTS_{12}(x^*) \geq \frac{w_1}{w_2}$$

Функции издержек

Построение функции переменных издержек

$$G(x) = w \cdot x \rightarrow \min,$$

Пусть задача минимизации издержек имеет единственное решение:
 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ - план производства по ресурсам, обеспечивающий выпуск q единиц продукции = **оптимальный план по ресурсам** = **точка равновесия** производителя.

- функция спроса на ресурсы: $x^* = x^*(w, q)$
- стоимость этих ресурсов $w \cdot x^*(w, q)$ денежных единиц.
- **функция переменных издержек**

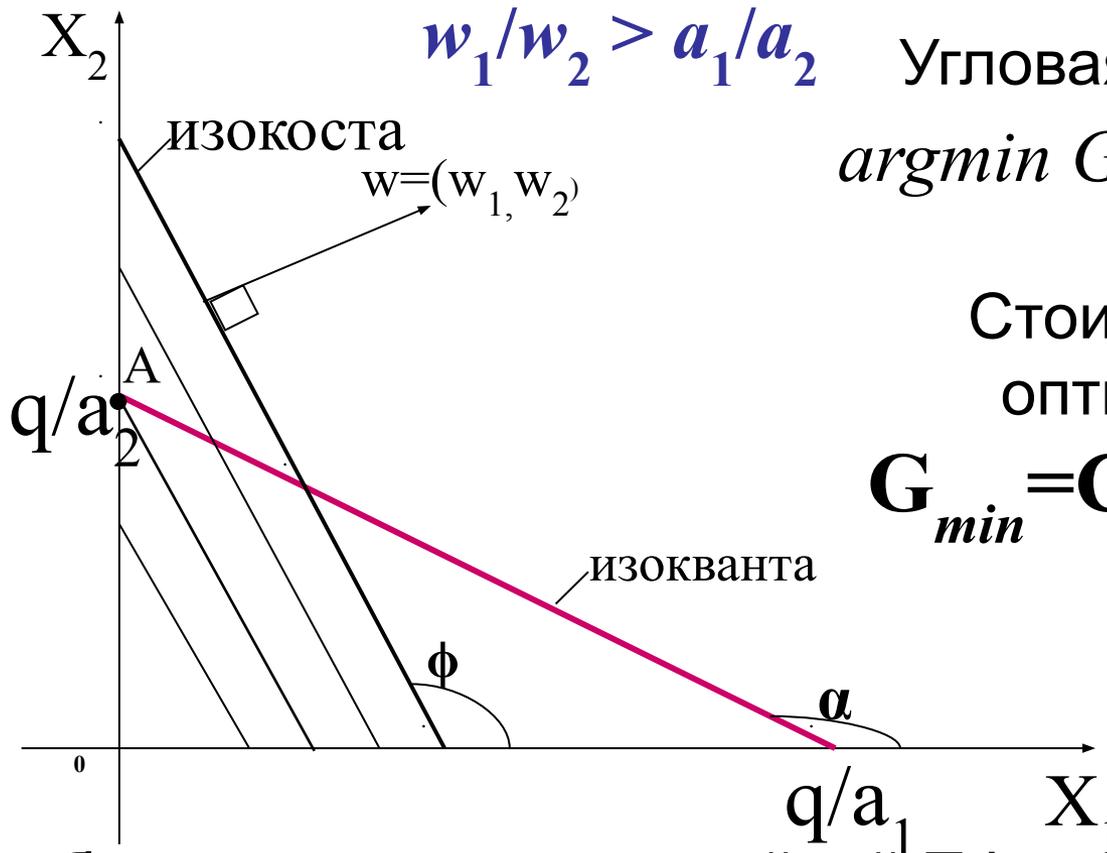
$$C_v(w, q) = w \cdot x^*(w, q)$$

сопоставляет объему выпуска q и ценам ресурсов w стоимость плана, обеспечивающего выпуск q единиц продукции с наименьшими переменными издержками,

- **функция общих издержек**

$$C(q) = C_0 + C_v(q).$$

Функция переменных издержек для линейной ПФ



Угловая точка равновесия:
 $\operatorname{argmin} G(x) = x^* = (0, q/a_2).$

Стоимость ресурсов в
оптимальном плане

$$G_{\min} = C_v(q) = w_2 q/a_2 \text{ ден. ед.}$$

В общем случае, для линейной ПФ

функция переменных издержек $C_v(q) = \min\{w_1/a_1, w_2/a_2\}q.$

Геометрическое решение задачи поиска точки равновесия для ПФ Кобба-Дугласа

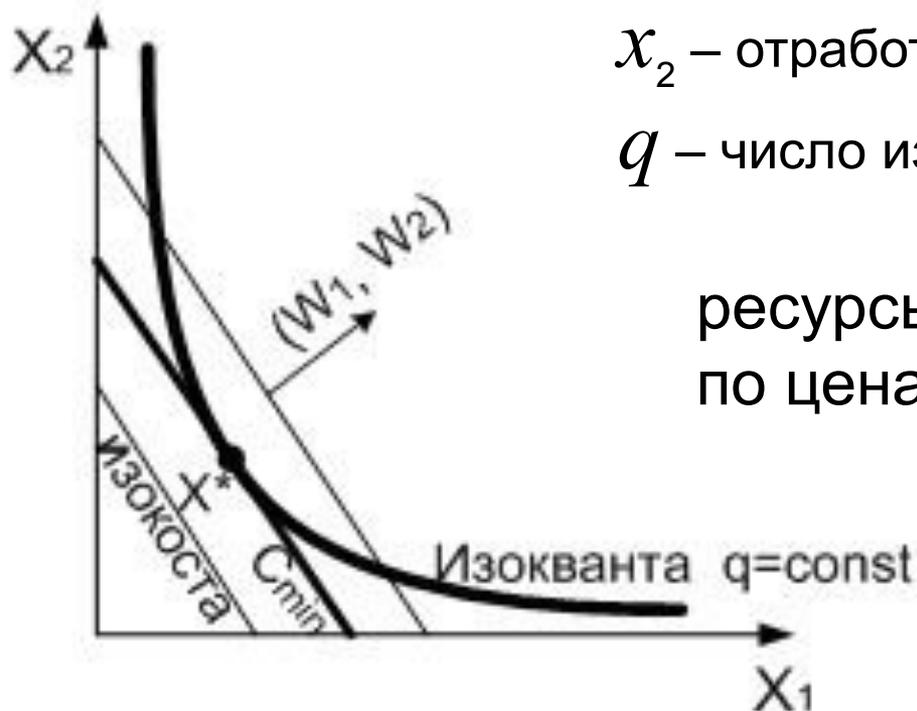
$$C = w_1 x_1 + w_2 x_2 \rightarrow \min \quad \text{при условии} \quad q = 4x_1^{1/2} x_2^{1/4}$$

где x_1 – отработанные человеко-часы,

x_2 – отработанные машино-часы,

q – число изготовленных рам.

ресурсы покупают по ценам w_1 и w_2 ден. ед.



Поиск оптимального плана для ПФ Кобба-Дугласа.

Однородные функции

- Функция нескольких переменных называется **однородной порядка m** , если для всех x из некоторой области X

$$f(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = k^m f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- Если ПФ является **однородной порядка m** , то
 - при **$m=1$** ПФ обладает **постоянным**;
 - при **$m>1$** ПФ обладает **возрастающим** эффектом масштаба
 - при **$m<1$** ПФ обладает **убывающим**

Функция издержек однородной ПФ

Теорема. Если ПФ является **однородной**
порядка (степени) m , то

- функция спроса на ресурсы

$$x(q) = x^1 q^{1/m}$$

где x^1 – план по ресурсам, обеспечивающий
выпуск **единицы** продукции с наименьшими
переменными издержками

(стоимость плана x^1 есть $C_v(1)=C_1$),

- функция переменных издержек

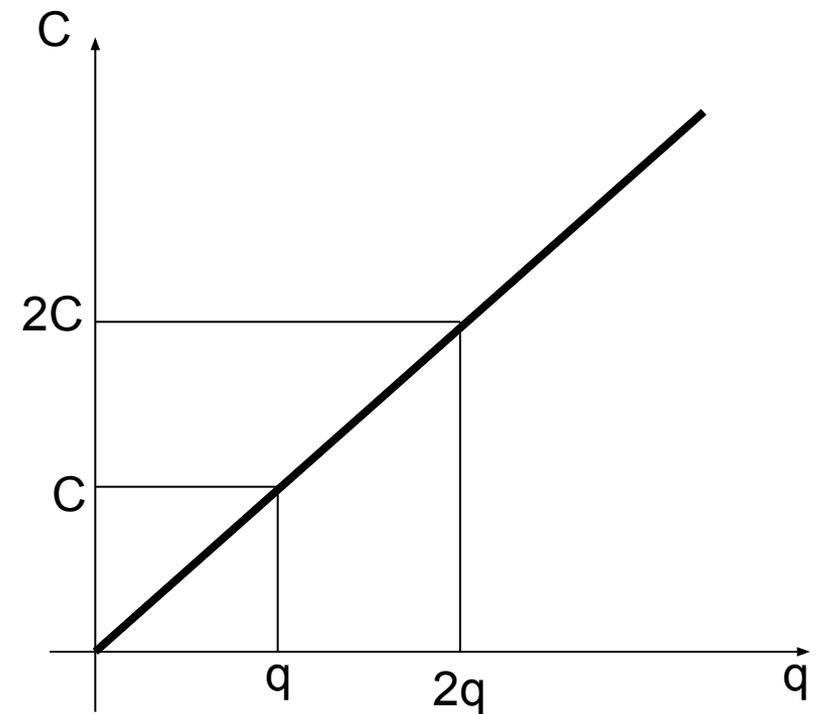
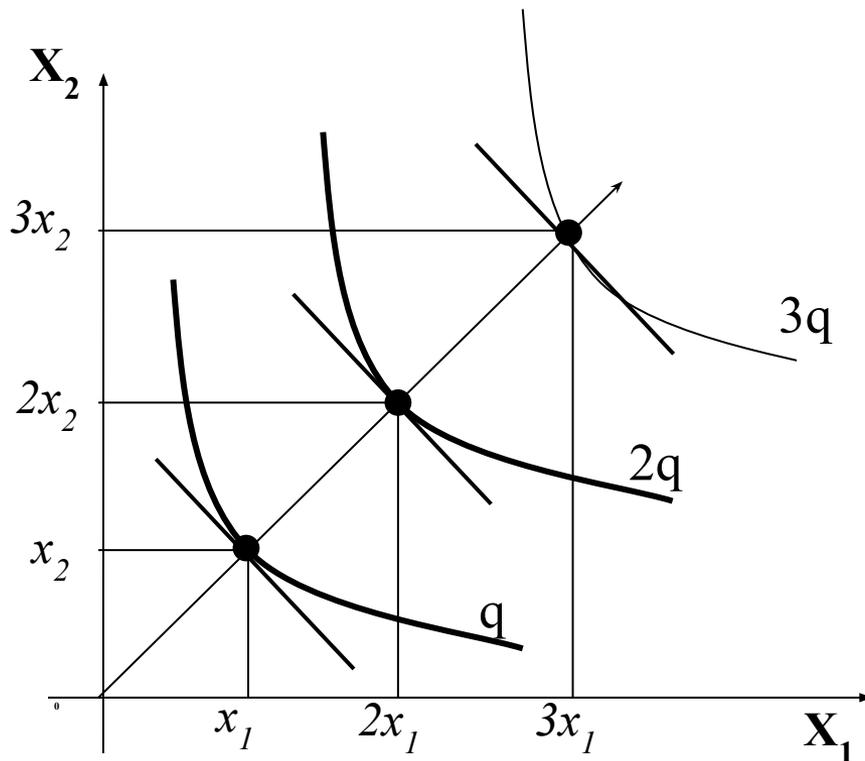
$$C_v(q) = C_v(1)q^{1/m}.$$

- **Следствие.** Если ПФ характеризуется **ПОСТОЯННЫМ** эффектом масштаба (является однородной степени 1), то она порождает **линейную функцию издержек**

$$C(q) = C_0 + C_1 \cdot q$$

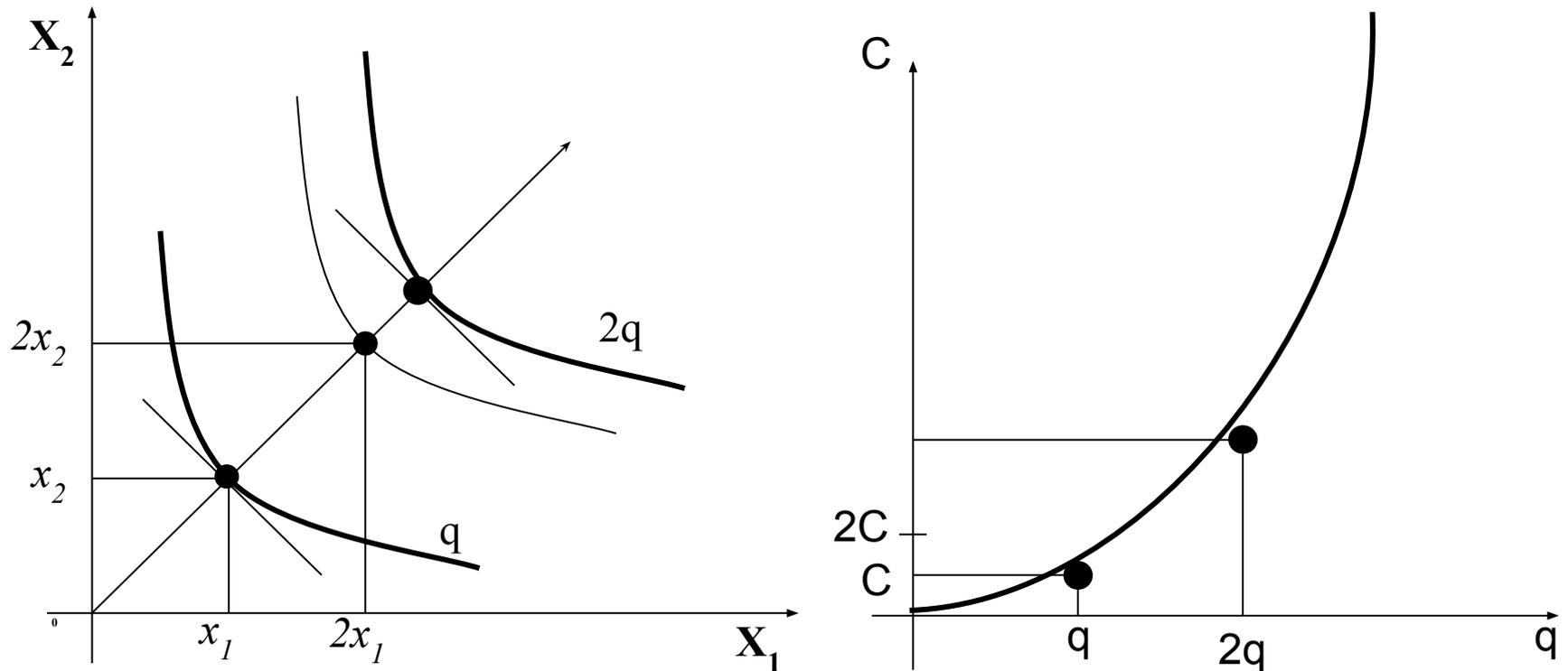
Влияние эффекта масштаба на вид кривой издержек

ПОСТОЯННЫЙ

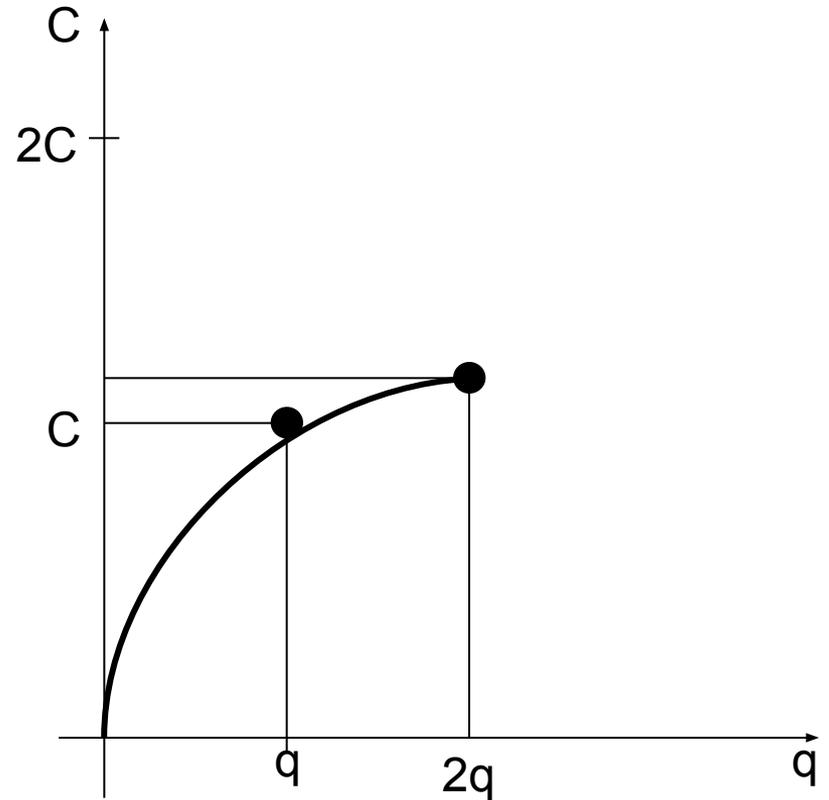
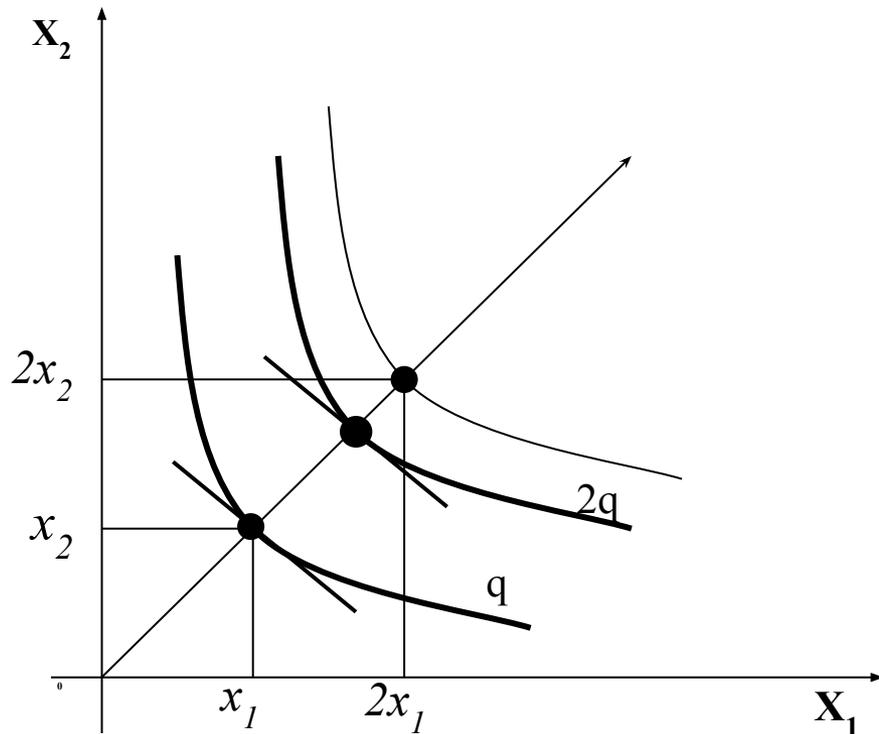


Влияние эффекта масштаба на вид кривой издержек

убывающий



Влияние эффекта масштаба на вид кривой издержек возрастающий



Функции издержек

$$C(q) = C_v(q) + C_0$$

общие издержки
ТС (total cost)

переменные издержки
VC (variable cost)

постоянные издержки
FC (fixed cost).

- $AC(q) = \frac{C(q)}{q}$ **функция средних издержек – себестоимость** (ATC – average total cost) численно равна издержкам, которые придется на единицу продукции.

$$AC(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{C_v(q)}{q} + \frac{C_0}{q} = AVC(q) + AFC(q).$$

функция средних
переменных издержек
(average variable cost)

функция средних
постоянных издержек
(average fixed cost)

Предельные издержки

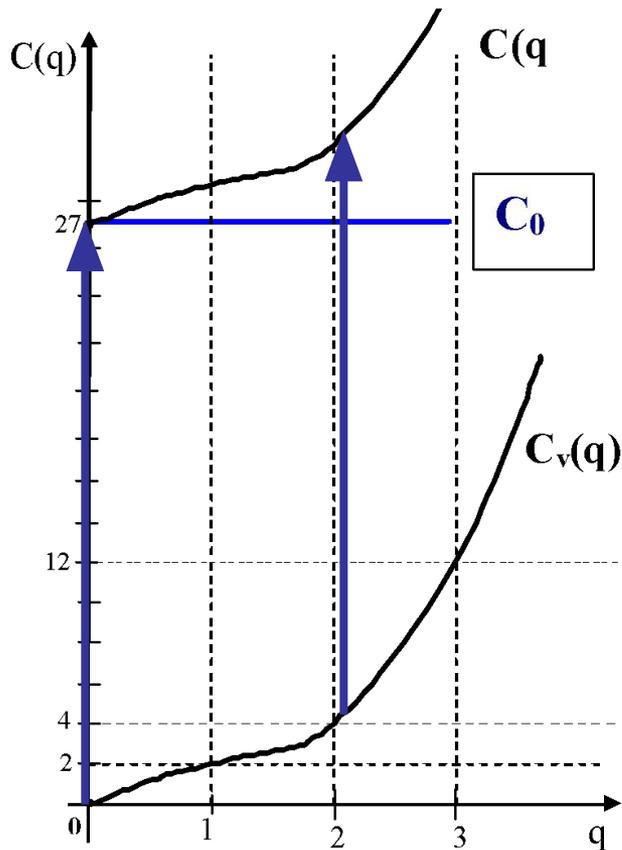
- $C'(q)$ - функция предельных издержек.
 $C'_v(q) = C'(q) =$
 $= MC(q)$ (*marginal cost*).

- **Экономическая интерпретация предельных издержек:** величина предельных издержек при данном объеме выпуска показывает, на сколько денежных единиц приблизительно возрастут издержки, если увеличить объем выпуска на единицу

$$C'(q) \approx C(q+1) - C(q)$$
$$\Delta q = 1 \quad \Rightarrow \quad MC(q) \approx \Delta C$$

свойства функций издержек 1

- $C(q) = C_v(q) + C_0$



Кривая
переменных
издержек

сдвиг вверх на C_0

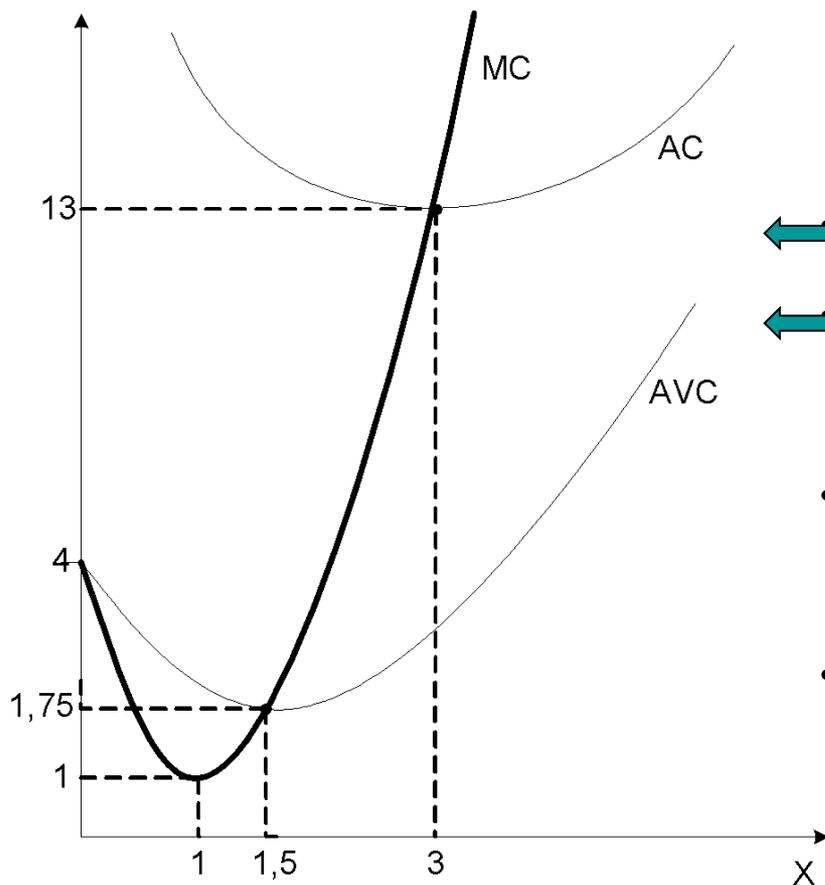
Кривая
общих
издержек

- $C_v(0)=0$. График функции переменных издержек выходит из начала координат,
- графики функций общих и постоянных издержек начинаются в точке $(0, C_0)$.
- A1:** функция переменных (общих) издержек является строго монотонно возрастающей функцией

$$C(q) = q^3 - 3q^2 + 4q + 27$$

$$C_v'(q) = C'(q) > 0$$

свойства функций издержек 2



- **A2**: начиная с некоторого объема выпуска (возможно, равного нулю), приращение переменных (общих) издержек, порожденное выпуском дополнительной единицы продукции, последовательно возрастает.

↔ предельные издержки $MC(q) \approx C(q+1) - C(q)$ становятся все больше.

↔ функция переменных (общих) издержек является **выпуклой** либо при всех $q \geq 0$, либо начиная с некоторого объема выпуска.

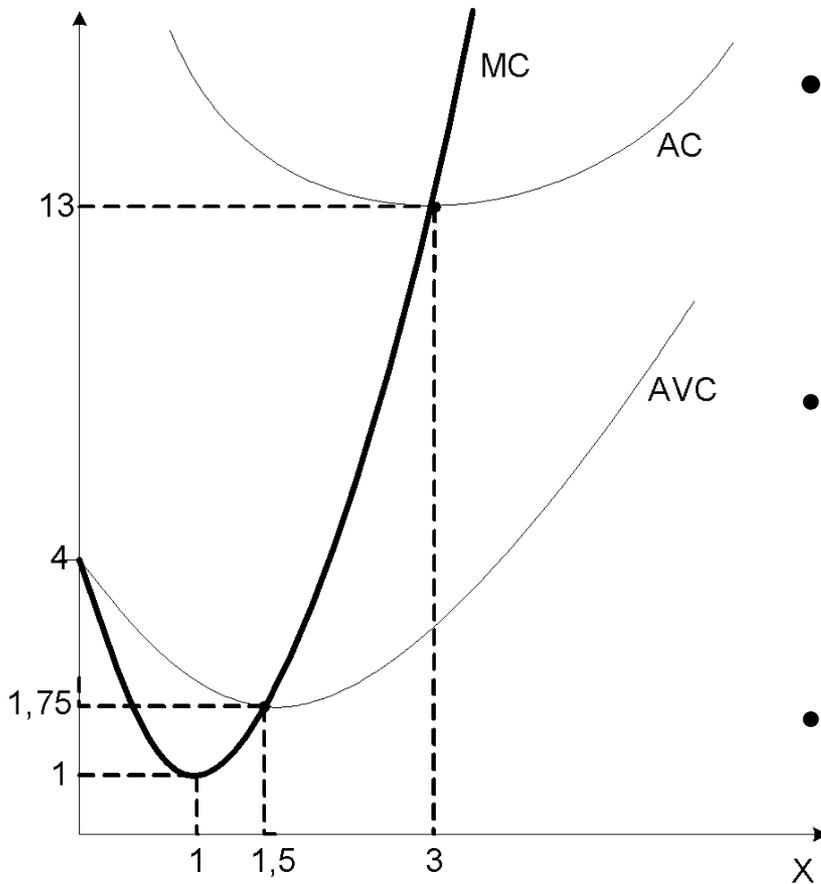
- графики функции предельных издержек и функции средних переменных издержек начинаются в одной точке. $AVC(0) = C'(0)$.

- $AVC(q) < AC(q) \rightarrow$ график функции средних переменных издержек AVC расположен ниже графика функции средних общих издержек AC ,

- с ростом q кривые AC и AVC асимптотически сближаются.

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (AC(q) - AVC(q)) = \lim_{q \rightarrow \infty} AFC(q) = 0$$

свойства функций издержек 3



- **А3:** С ростом объема выпуска средние издержки первоначально убывают, а, начиная с некоторого объема выпуска, начинают возрастать
- кривая предельных издержек MC пересекает кривую средних переменных издержек AVC в точке минимума средних переменных издержек
- кривая предельных издержек MC пересекает кривую средних общих издержек AC тоже в её точке минимума

$$AC'(q) = \left(\frac{C(q)}{q} \right)' = \frac{C'(q)q - C(q)}{q^2} = \frac{C'(q) - AC(q)}{q} = 0$$

На кривой общих затрат ТС

- **предельные** затраты MC определяются тангенсом угла наклона **касательной**
- **средние** затраты AC определяются тангенсом угла наклона **луча**, проведенного из начала координат к кривой

Средние затраты достигают минимума при таком объёме выпуска, когда они равны предельным затратам

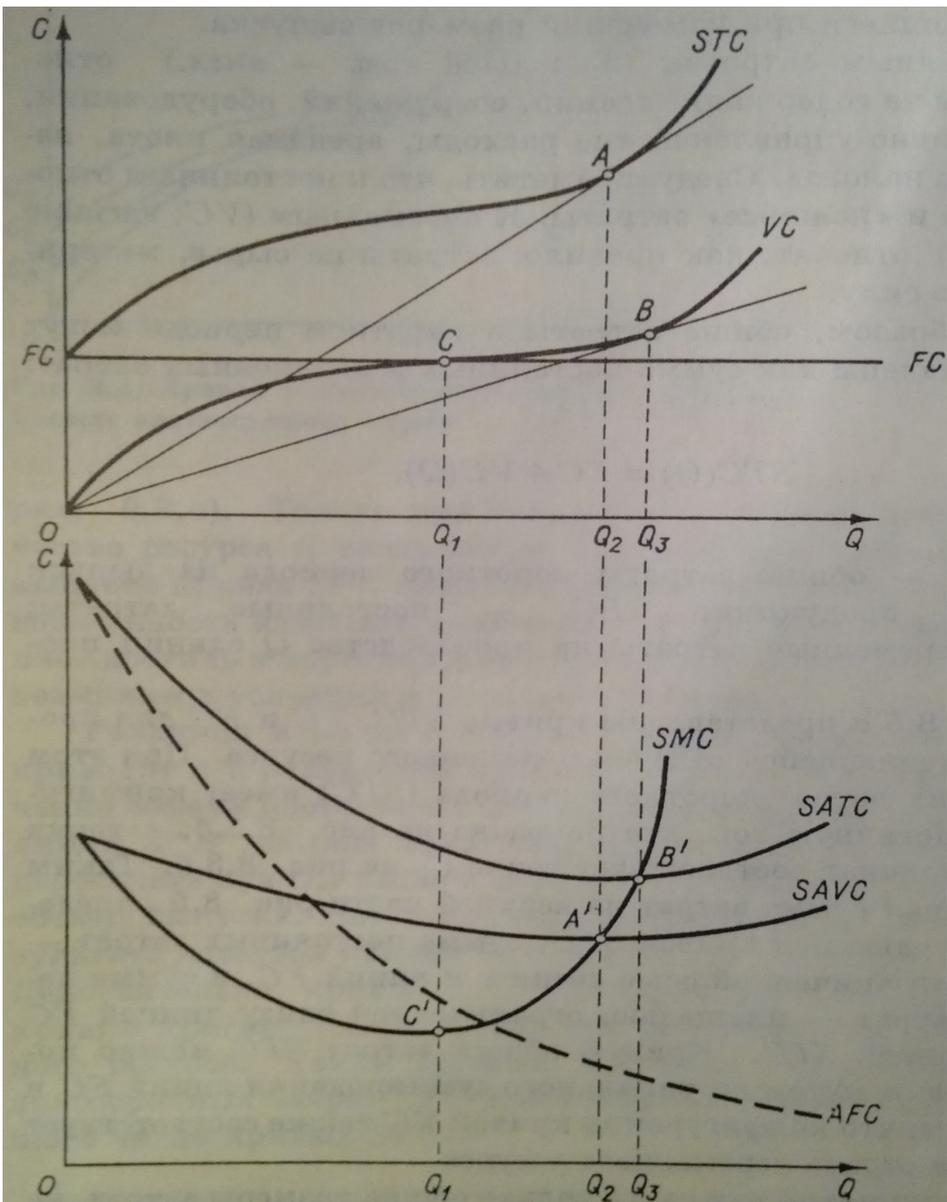


Рис. 8.5. Взаимосвязь общих, постоянных, переменных, средних и предельных затрат в коротком периоде.