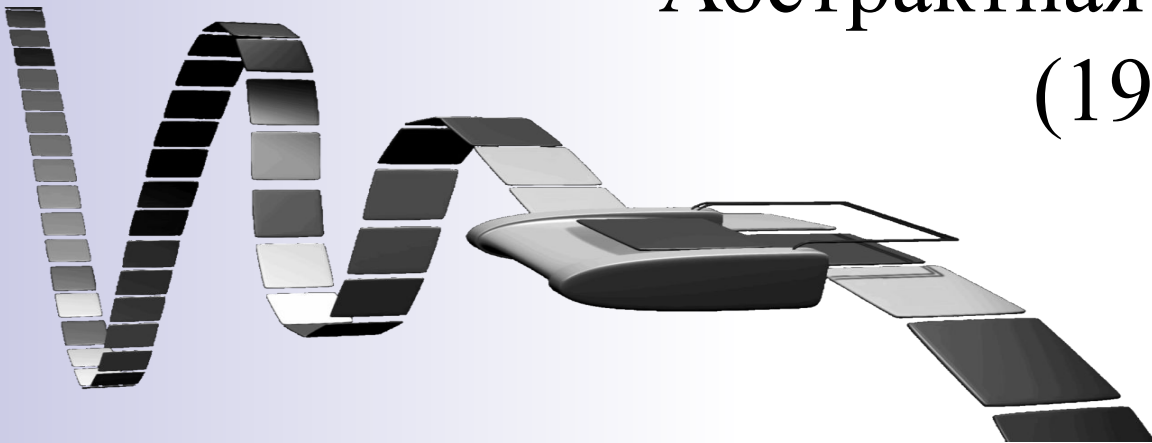


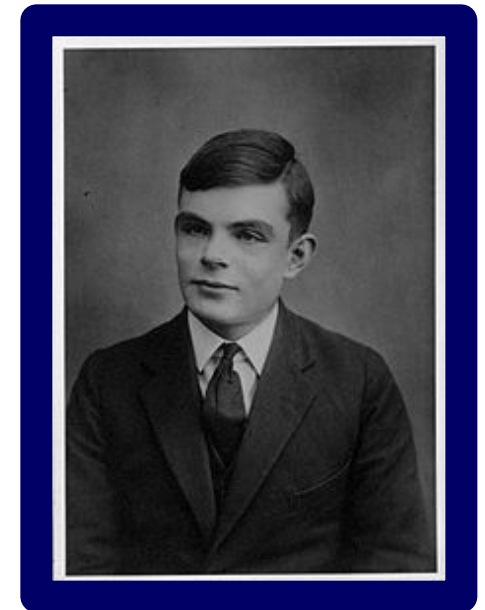
# Машины Тьюринга- Поста

Абстрактная модель алгоритма  
(1936-1937)



Алан Мэ́тисон Тью́ринг  
Alan Mathison Turing  
1912-1954

английский математик,  
логик, криптограф (Энигма)



«Алан Тьюринг - взломщик кодов и пионер информатики».

Общепринято считать Алана  
Тьюринга отцом Общепринято считать  
Алана Тьюринга отцом информатики и  
теории Общепринято считать Алана

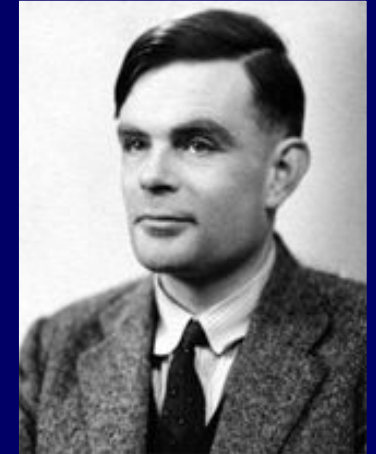
**Премия Тьюринга (Turing Award) - самая престижная премия в информатике, вручаемая Ассоциацией вычислительной техники за выдающийся научно-технический вклад в этой области.**

В настоящее время премия спонсируется корпорациями Intel и Google и составляет 250 000 долларов США.

**Лауреаты премии Тьюринга**

Р. Хэмминг, Н. Вирт, Д. Кнут,

Э. Дейкстра, Д. Грэй, Д. Перл, Ч. Теккер.....



# Символьные конструкции

- **Алфавит** - любое конечное множество попарно различных знаков, называемых **буквами** (символами) этого алфавита.
- Алфавит будем обозначать заглавными буквами, например:

$$A = \{a, b, \dots, z\}; \quad B = \{0, 1\}; \quad C = \{\Delta, +, !, 0\}.$$

- Символом  $\lambda$  - обозначение пустого символа.

- **Слово** в данном алфавите - любая конечная (в том числе и пустая) последовательность букв этого алфавита.
- Слова обозначаются малыми греческими буквами.

*Например:*

- $\alpha = \mathbf{algorithm}$  - слово в алфавите **A**;
- $\beta = \mathbf{1010100}$  - слово в алфавите **B**;
- $\gamma = \mathbf{+0\Delta + 0}$  - слово в алфавите **C**.

Пустое слово обозначим  $\Lambda$ .

- **Длина** слова  $\alpha$  (обозначается  $|\alpha|$ ) - это количество букв в слове.

## Отношения и операции над словами

- **Равенство слов** в алфавите  $A$  определяется индуктивно:
  - а) пустые слова равны;
  - б) если слово  $\alpha$  равно слову  $\beta$ , то  $\alpha b = \beta b$ , где  $b$  - буква в алфавите  $A$ .

- Если слово  $\alpha$  является частью слова  $\beta$  в алфавите  $A$ , то слово  $\alpha$  – **подслово** слова  $\beta$  (или слово  $\alpha$  **входит** в слово  $\beta$ ).

Например: в слове 1012011201 два вхождения слова 12, три вхождения слова 01, одиннадцать вхождений пустого слова  $\Lambda$  - перед первой, после последней букв и между всеми буквами.<sup>8</sup>

■ Слово длины  $n$ , составленное из буквы  $a$ , повторенной  $n$  раз, будем обозначать  $a^n$ .

■ Например  $xuxxxuuuu = xux^3y^4$



# Классическая машина Тьюринга

## Основные определения

Под машиной Тьюринга понимается гипотетическая (абстрактная) машина, состоящая из следующих частей:

- 1) потенциально бесконечной в обе стороны ленты, разбитой на ячейки, в каждой ячейке может быть записан только один символ из алфавита

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

а также пустой символ  $\lambda$  ;

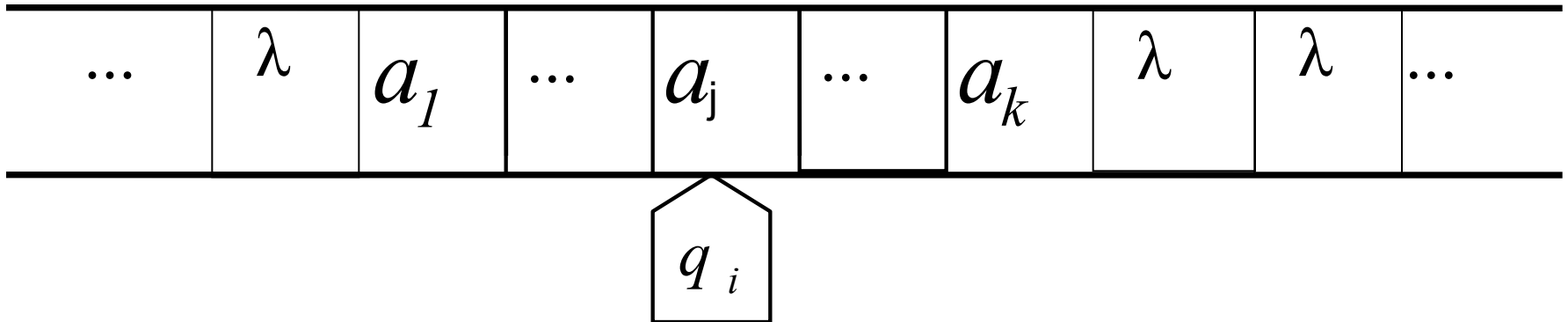
- 2) УУ - управляющего устройства (рабочей головки), которое в каждый момент времени может находиться в одном из состояний множества

$$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}.$$

- В каждом из состояний головка размещается напротив ячейки и может считывать (обозревать) или записывать в нее букву из алфавита  $A$ .

# Классическая машина Тьюринга

- Часть ленты, в которой записаны буквы алфавита  $\mathbf{A}$  - **рабочая зона**.



# Функционирование КМТ

состоит из последовательности элементарных шагов (тактов).

На каждом шаге выполняются следующие действия:

- 1) УУ считывает символ  $a_j$ ;
- 2) в зависимости от своего состояния  $q_i$  и считанного символа ленты  $a_j$  УУ вырабатывает символ  $a'_j \in A$  и записывает его в обозреваемую ячейку, ВОЗМОЖНО  $a_j = a'_j$ ;

- 3) УУ перемещается на одну ячейку вправо (R), влево (L) или остается на месте (E);
- 4) УУ переходит в другое внутреннее состояние  $q'_i$ , возможно  $q'_i = q_i$ .
- Состояние  $q_0$  - начальное (МТ начинает работу),  
 $q_z$  - заключительное состояние.

При переходе в заключительное состояние машина останавливается.

# Математическое описание КМТ

$$\text{КМТ} = M(A, Q, V, q_0, q_z, \delta)$$

- где  $A$  – внешний алфавит символов,
- $Q$  – алфавит внутренних состояний машины,
- $V$  – алфавит допустимых движений,
- $q_0, q_z$  - начальное и заключительное состояния,
- $\delta = Q \times A \rightarrow Q \times A \times V$  - функция переходов.

## Способы описания КМТ:

- система команд (программа) ;
- функциональная таблица;
- диаграмма состояний (граф переходов).

# Система команд (программа) КМТ

Совокупность команд вида:

$$q_i a_j \rightarrow q'_i a'_j v, \quad v \in V = \{R, L, E\};$$

называют **системой команд** или **программой КМТ**.

Порядок следования команд в программе не имеет принципиального значения



## Система команд МТ

- 1) начальному шагу алгоритма ставится в соответствие начальное состояние
- 2) соседним шагам алгоритма соответствует переход в смежные состояния
- 3) циклы реализуются так, что последнее действие цикла должно соответствовать переходу в то состояние, которое соответствует началу цикла
- 4) последний шаг алгоритма - переход в заключительное состояние.

## Задача 1.

Построить МТ, вычисляющую  
функцию последователь  $(+1)$  в  
унарной системе счисления.

- **Унарная (единичная) система счисления** - положительная целочисленная система счисления с основанием, равным 1.

В качестве единственной «цифры» используется «1» или черточка «/» или «|».

Число  $x$  в унарном коде  $x = \underbrace{111\dots1}_x$

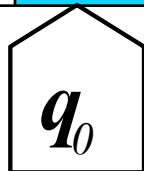
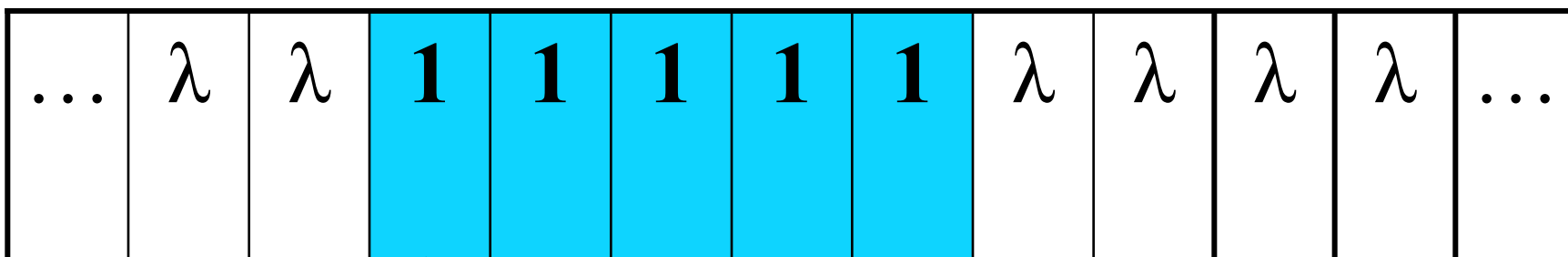
$$0_{10} = \lambda$$

$$1_{10} = 1$$

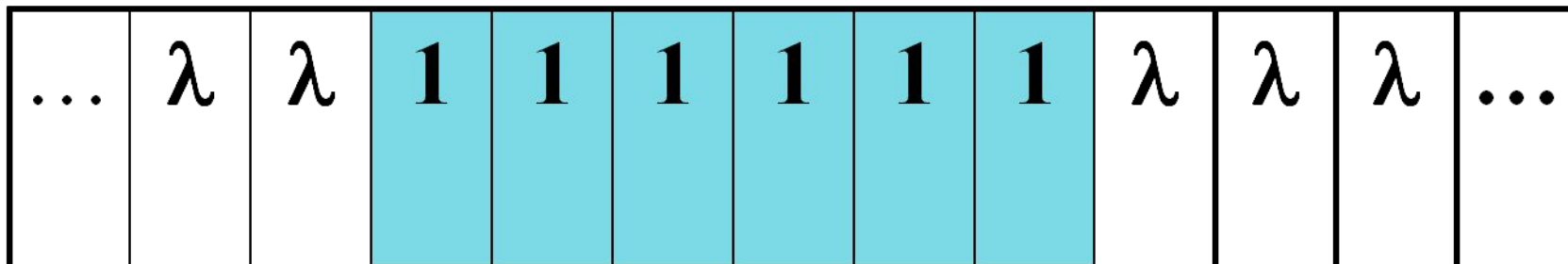
$$3_{10} = 111$$

Например

Исходные данные для задачи 1:



Результат:



# Два варианта решения задачи 1

**MT1**

$$q_0 1 \rightarrow q_0 1R$$

$$q_0 \lambda \rightarrow q_1 1L$$

$$q_1 1 \rightarrow q_1 1L$$

$$q_1 \lambda \rightarrow q_z \lambda R$$

**MT2**

$$q_0 1 \rightarrow q_1 1L$$

$$q_0 \lambda \rightarrow q_z 1E$$

$$q_1 \lambda \rightarrow q_z 1E$$

## ■ Задача 2

Построить МТ, реализующую инвертирование числа в двоичной системе счисления

$$q_0 1 \rightarrow q_0 0R$$

$$q_1 0 \rightarrow q_1 0L$$

$$q_0 0 \rightarrow q_0 1R$$

$$q_1 1 \rightarrow q_1 1L$$

$$q_0 \lambda \rightarrow q_1 \lambda L$$

$$q_1 \lambda \rightarrow q_z \lambda R$$

- 1) УУ стоит над первым значащим символом слева, в начале рабочей зоны.
- 2) На след. такте МТ, не меняя своего состояния, заменяет символ 0 на 1 и наоборот и сдвигается вправо на один символ.
- 3) После просмотра всей цепочки УУ обзревает символ, указывающий на пустую ячейку. В этом случае МТ переходит в новое состояние и сдвигается влево на один символ.

- 4) На последующих тактах УУ не меняя своего состояния и обозреваемого символа, перемещается влево до пустой ячейки.
- 5) Встретив пустую ячейку, МТ переходит в заключительное состояние и перемещается вправо на один символ, переходя в заключительную стандартную конфигурацию.



# Функциональная таблица

| $q_i \backslash a_j$ | $a_1$ | $a_2$ | ... | $a_j$         | ... | $a_n$ |
|----------------------|-------|-------|-----|---------------|-----|-------|
| $q_0$                |       |       |     |               |     |       |
| $q_1$                |       |       |     |               |     |       |
| ...                  |       |       |     |               |     |       |
| $q_i$                |       |       |     | $q'_i a'_j v$ |     |       |
| ...                  |       |       |     |               |     |       |
| $q_z$                |       |       |     |               |     |       |

- Каждому состоянию МТ соответствует строка в функциональной таблице.
- Каждому символу из входного алфавита столбец.
- В клетках таблицы на пересечении строки и столбца записывается действие (правая часть команды), которое выполняется в этом состоянии, при данном обозреваемом символе.

## Задача 2 Функциональная таблица

|                         | <b>0</b>                   | <b>1</b>                   | <b><math>\lambda</math></b>       |
|-------------------------|----------------------------|----------------------------|-----------------------------------|
| <b><math>q_0</math></b> | <b><math>q_0 1R</math></b> | <b><math>q_0 0R</math></b> | <b><math>q_1 \lambda L</math></b> |
| <b><math>q_1</math></b> | <b><math>q_1 0L</math></b> | <b><math>q_1 1L</math></b> | <b><math>q_z \lambda R</math></b> |

## Задача 3

Построить МТ, реализующую сложение двух чисел в унарном коде .

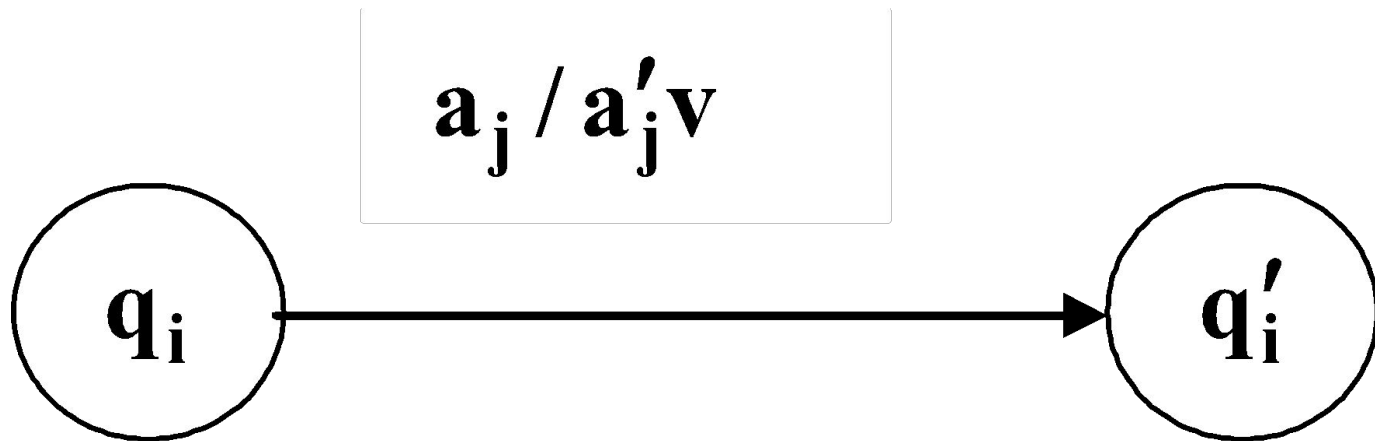
- Начальная конфигурация:  $q_1 1^a * 1^b$ .
- Конечная конфигурация:  $q_z 1^{a+b}$ ,
- т.е. сложение фактически сводится к приписыванию числа **b** к числу **a** .
- Для этого первая 1 стирается,  $a^*$  заменяется на 1.

# Приведем описание МТ в виде функциональной таблицы

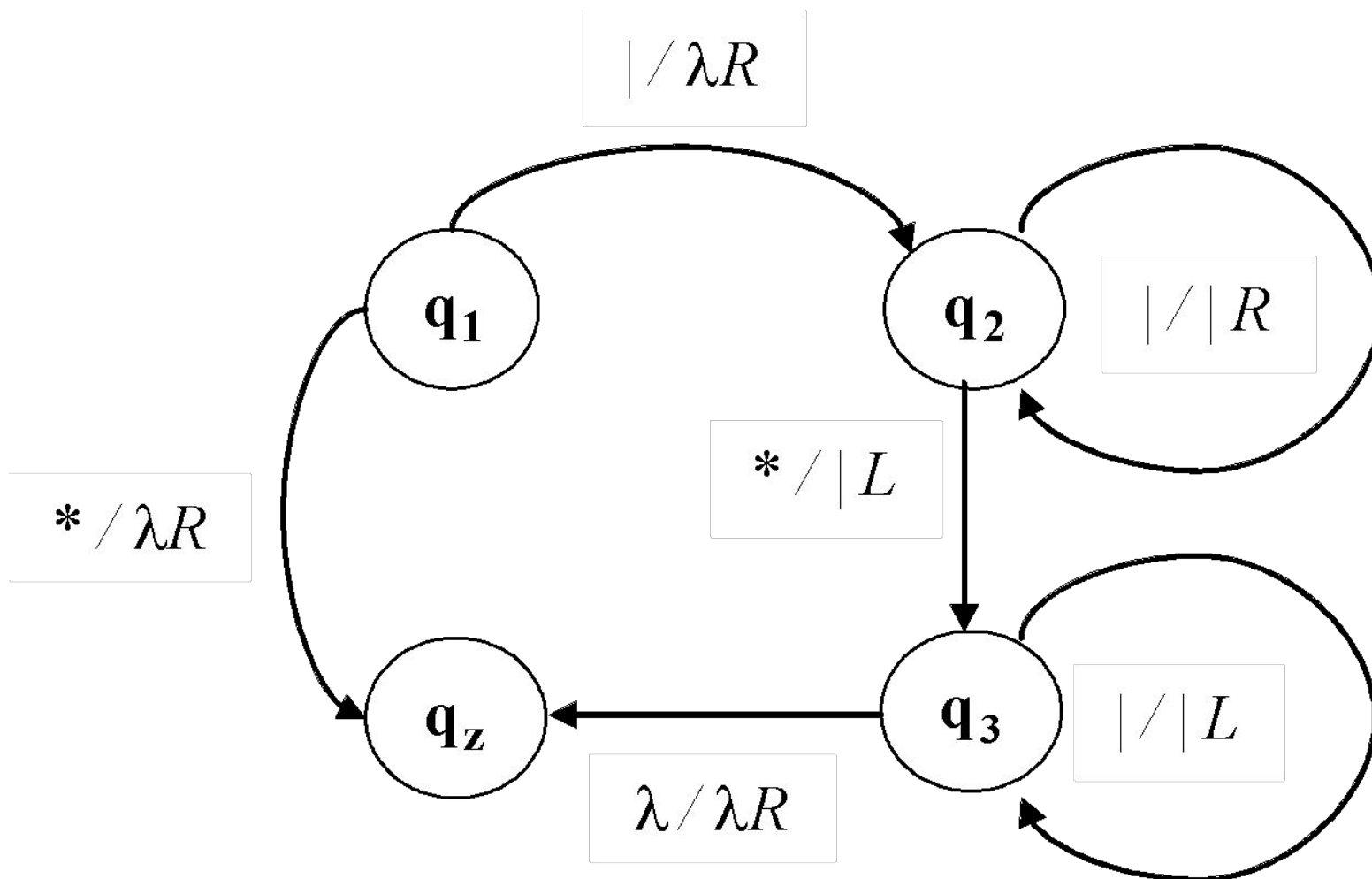
| $q_i \backslash a_j$ | 1               | *               | $\lambda$       |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $q_1$                | $q_2 \lambda R$ | $q_z \lambda R$ | -               |
| $q_2$                | $q_2 1R$        | $q_3 1L$        | -               |
| $q_3$                | $q_3 1L$        | -               | $q_z \lambda R$ |

# Диаграмма состояний (граф переходов)

Каждому состоянию – вершина графа  
Каждой команде – помеченную дугу



# МТ в виде графа переходов для задачи 3



# Описание МТ в виде системы команд для задачи 3

$$q_1 1 \rightarrow q_2 \lambda R$$

$$q_1 * \rightarrow q_z \lambda R$$

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1R$$

$$q_2 * \rightarrow q_3 1L$$

$$q_3 1 \rightarrow q_3 1L$$

$$q_3 \lambda \rightarrow q_z \lambda R$$



- Полное состояние МТ – **конфигурация**:
  - состояние рабочей зоны -  
распределение букв по ячейкам ленты,  
положение рабочей головки и  
внутреннее состояние УУ.

- Конфигурация в такте  $t$ :  $\mathbf{K}_t = \alpha q_i a_j \beta$

где

$\beta$  - подслово слева от обозреваемой ячейки,

$a_j$  - символ в обозреваемой ячейке,

$\alpha$  - подслово справа от обозреваемой ячейки.

- Начальная конфигурация  $K_1 = q_0\alpha$  и конечная  $K_z = q_z\gamma$  называются **стандартными:**

МТ **начинает и заканчивает** свою работу в таком положении, когда УУ обозревает **самый левый символ** рабочей зоны ленты.

Функционирование МТ –  
последовательная смена ее  
конфигураций в соответствии с  
функцией перехода  $\delta$  – **протокол  
работы МТ:**

$$q_0\alpha \rightarrow \alpha_1q_1\beta_1 \rightarrow \alpha_2q_2\beta_2 \rightarrow \dots \rightarrow q_z\gamma$$

$$\alpha \xrightarrow{\text{МТ}} \gamma.$$

- Говорят, что МТ **применима к слову  $\alpha$** , если она переводит начальную конфигурацию  $q_0\alpha$  за конечное число шагов в некоторую заключительную конфигурацию  $q_z\gamma$ .

В этом случае МТ вычисляет словарную функцию  $f(\alpha)$ .

Если значение  $f(\alpha)$  не определено, то МТ работает бесконечно.

- Числовая функция  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  вычислима по Тьюрингу, если существует МТ, которая переводит конфигурацию

в конфигурацию  $q_0 1^{x_1} * 1^{x_2} * \dots * 1^{x_n}$

когда  $q_z 1^y, ,$

или работает бесконечно, когда

не определена.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

## Тезис Черча для МТ:

любая вычислимая в интуитивном смысле функция вычислима на машине Тьюринга.


- Класс функций вычислимых на МТ совпадает с классом ЧРФ.

- Задача 4
- Построить МТ, вычисляющую функцию последователь (+1) в двоичной системе счисления.

| $q_i \backslash a_j$ | 0        | 1        | $\lambda$       |
|----------------------|----------|----------|-----------------|
| $q_1$                | $q_1 0R$ | $q_1 1R$ | $q_2 \lambda L$ |
| $q_2$                | $q_3 1L$ | $q_2 0L$ | $q_z 1E$        |
| $q_3$                | $q_3 0L$ | $q_3 1L$ | $q_z \lambda R$ |

- Движение вправо -  $q_1$
- Движение влево -  $q_2$
- Добавление 1 -  $q_3$
  
- Протоколы работы МТ для трех тестовых примеров:
  - $110+1=111$
  - $101+1=110$
  - $111+1=1000$




$$110 = \alpha$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{q}_1 110$$

$$\mathbf{k}_6 = 1\mathbf{q}_3 11$$

$$\mathbf{k}_2 = 1\mathbf{q}_1 10$$

$$\mathbf{k}_7 = \mathbf{q}_3 111$$


$$\mathbf{k}_3 = 11\mathbf{q}_1 0$$

$$\mathbf{k}_8 = \mathbf{q}_3 \lambda 111$$

$$\mathbf{k}_4 = 111\mathbf{q}_1 \lambda$$

$$\mathbf{k}_9 = \mathbf{q}_z 111$$

$$\mathbf{k}_5 = 11\mathbf{q}_2 0$$


$$101 = \alpha$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{q}_1 101$$

$$\mathbf{k}_5 = 10\mathbf{q}_2 1$$

$$\mathbf{k}_2 = 1\mathbf{q}_1 01$$


$$\mathbf{k}_6 = 1\mathbf{q}_2 00$$

$$\mathbf{k}_3 = 10\mathbf{q}_1 1$$

$$\mathbf{k}_7 = \mathbf{q}_3 110$$

$$\mathbf{k}_4 = 101\mathbf{q}_1\lambda$$

$$\mathbf{k}_8 = \mathbf{q}_3\lambda 110 = \mathbf{k}_z$$


$$111 = \alpha$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{q}_1 111$$

$$\mathbf{k}_5 = 11\mathbf{q}_2 1$$

$$\mathbf{k}_2 = 1\mathbf{q}_1 11$$

$$\mathbf{k}_6 = 1\mathbf{q}_2 10$$

$$\mathbf{k}_3 = 11\mathbf{q}_1 1$$

$$\mathbf{k}_7 = \mathbf{q}_2 100$$

$$\mathbf{k}_4 = 111\mathbf{q}_1 \lambda$$

$$\mathbf{k}_8 = \mathbf{q}_2 \lambda 000$$

$$\mathbf{k}_9 = \mathbf{q}_z 1000$$