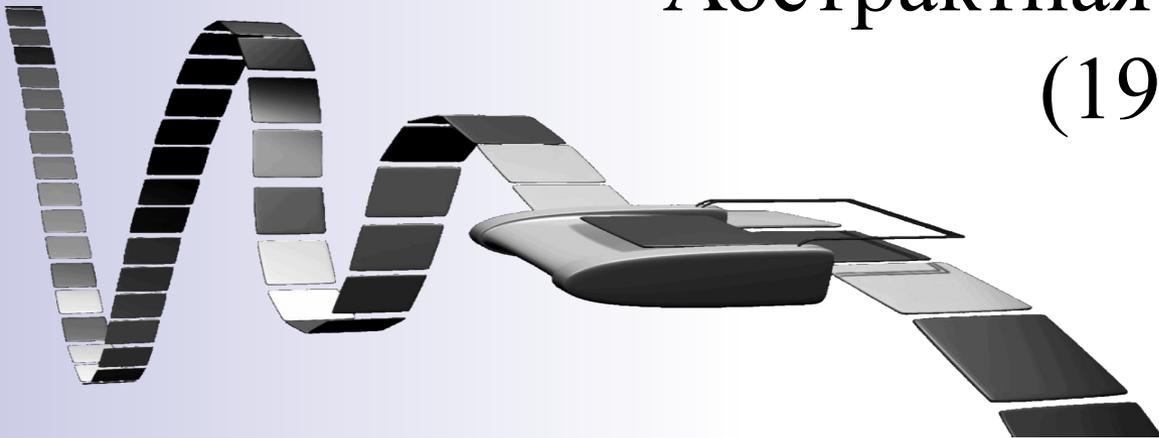


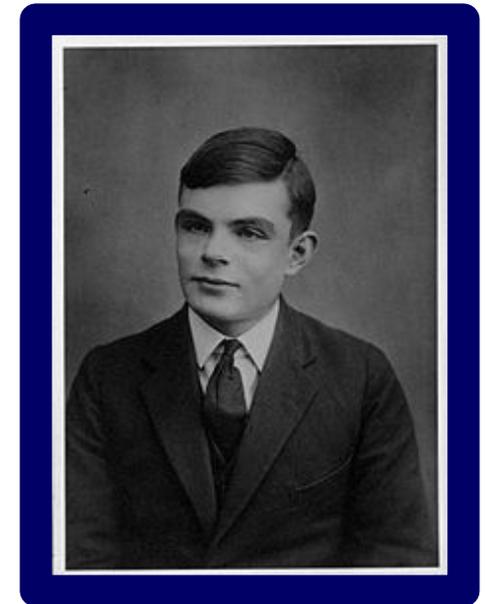
Машины Тьюринга- Поста

Абстрактная модель алгоритма
(1936-1937)



А́лан Мэ́тисон Тью́ринг
Alan Mathison Turing
1912-1954

английский математик,
логик, криптограф (Энигма)



«Алан Тьюринг - взломщик кодов и пионер информатики».

Общепринято считать Алана
Тьюринга отцом Общепринято считать
Алана Тьюринга отцом информатики и
теории Общепринято считать Алана

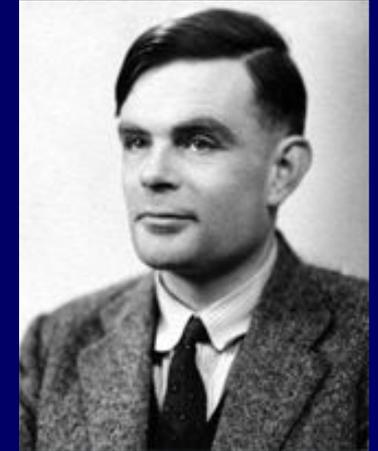
Премия Тьюринга (Turing Award) - самая престижная премия в информатике, вручаемая Ассоциацией вычислительной техники за выдающийся научно-технический вклад в этой области.

В настоящее время премия спонсируется корпорациями Intel и Google и составляет 250 000 долларов США.

Лауреаты премии Тьюринга

Р. Хэмминг, Н. Вирт, Д. Кнут,

Э. Дейкстра, Д. Грэй, Д. Перл, Ч. Теккер.....



Символьные конструкции

- **Алфавит** - любое конечное множество попарно различных знаков, называемых **буквами** (символами) этого алфавита.
- Алфавит будем обозначать заглавными буквами, например:

$$A = \{a, b, \dots, z\}; \quad B = \{0, 1\}; \quad C = \{\Delta, +, !, 0\}.$$

- Символом λ - обозначение пустого символа.

- **Слово** в данном алфавите - любая конечная (в том числе и пустая) последовательность букв этого алфавита.
- Слова обозначаются малыми греческими буквами.

Например:

- $\alpha = \mathbf{algorithm}$ - слово в алфавите **A**;
- $\beta = \mathbf{1010100}$ - слово в алфавите **B**;
- $\gamma = \mathbf{+0\Delta + 0}$ - слово в алфавите **C**.

Пустое слово обозначим Λ .

- **Длина** слова α (обозначается $|\alpha|$) - это количество букв в слове.

Отношения и операции над словами

- **Равенство слов** в алфавите A определяется индуктивно:
 - а) пустые слова равны;
 - б) если слово α равно слову β , то $\alpha b = \beta b$, где b - буква в алфавите A .

- Если слово α является частью слова β в алфавите A , то слово α – **подслово** слова β (или слово α **входит** в слово β).

Например: в слове 1012011201 два вхождения слова 12, три вхождения слова 01, одиннадцать вхождений пустого слова Λ - перед первой, после последней букв и между всеми буквами.⁸

■ Слово длины n , составленное из буквы a , повторенной n раз, будем обозначать a^n .

■ Например $xuxxxuuuu = xux^3y^4$

Классическая машина Тьюринга

Основные определения

Под машиной Тьюринга понимается гипотетическая (абстрактная) машина, состоящая из следующих частей:

- 1) потенциально бесконечной в обе стороны ленты, разбитой на ячейки, в каждой ячейке может быть записан только один символ из алфавита

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

а также пустой символ λ ;

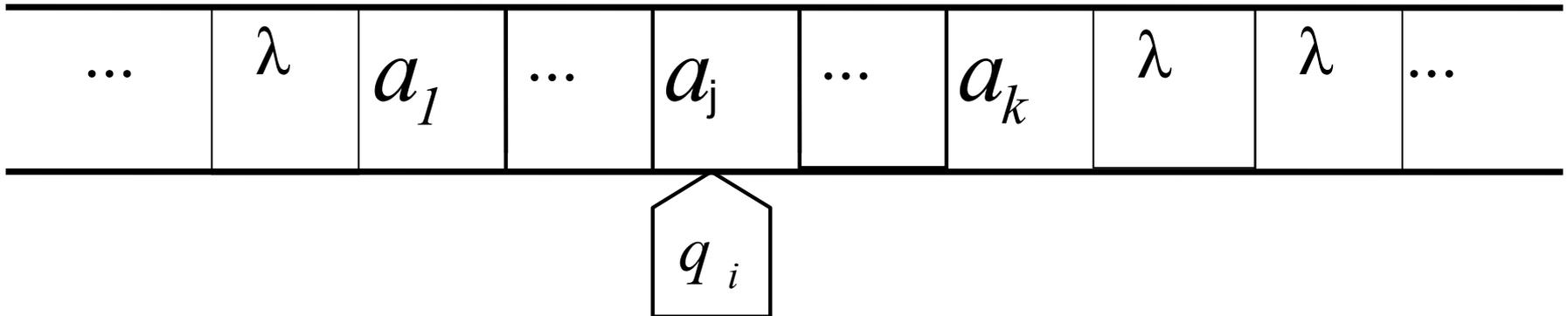
- 2) УУ - управляющего устройства (рабочей головки), которое в каждый момент времени может находиться в одном из состояний множества

$$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}.$$

- В каждом из состояний головка размещается напротив ячейки и может считывать (обозревать) или записывать в нее букву из алфавита A .

Классическая машина Тьюринга

- Часть ленты, в которой записаны буквы алфавита \mathbf{A} - **рабочая зона**.



Функционирование КМТ

состоит из последовательности элементарных шагов (тактов).

На каждом шаге выполняются следующие действия:

- 1) УУ считывает символ a_j ;
- 2) в зависимости от своего состояния q_i и считанного символа ленты a_j УУ вырабатывает символ $a'_j \in A$ и записывает его в обозреваемую ячейку, ВОЗМОЖНО $a_j = a'_j$;

- 3) УУ перемещается на одну ячейку вправо (R), влево (L) или остается на месте (E);
- 4) УУ переходит в другое внутреннее состояние q'_i , возможно $q'_i = q_i$.
- Состояние q_0 - начальное (МТ начинает работу),
 q_z - заключительное состояние.

При переходе в заключительное состояние машина останавливается.

Математическое описание КМТ

$$\text{КМТ} = M(A, Q, V, q_0, q_z, \delta)$$

- где A – внешний алфавит символов,
- Q – алфавит внутренних состояний машины,
- V – алфавит допустимых движений,
- q_0, q_z - начальное и заключительное состояния,
- $\delta = Q \times A \rightarrow Q \times A \times V$ - функция переходов.

Способы описания КМТ:

- система команд (программа) ;
- функциональная таблица;
- диаграмма состояний (граф переходов).

Система команд (программа) КМТ

Совокупность команд вида:

$$q_i a_j \rightarrow q'_i a'_j v, \quad v \in V = \{R, L, E\};$$

называют **системой команд** или **программой КМТ**.

Порядок следования команд в программе не имеет принципиального значения

Система команд МТ

- 1) начальному шагу алгоритма ставится в соответствие начальное состояние
- 2) соседним шагам алгоритма соответствует переход в смежные состояния
- 3) циклы реализуются так, что последнее действие цикла должно соответствовать переходу в то состояние, которое соответствует началу цикла
- 4) последний шаг алгоритма - переход в заключительное состояние.

Задача 1.

Построить МТ, вычисляющую
функцию последовательность $(+1)$ в
унарной системе счисления.

- **Унарная (единичная) система счисления** - положительная целочисленная система счисления с основанием, равным 1.

В качестве единственной «цифры» используется «1» или черточка «/» или «|».

Число x в унарном коде $x = \underbrace{111\dots1}_x$

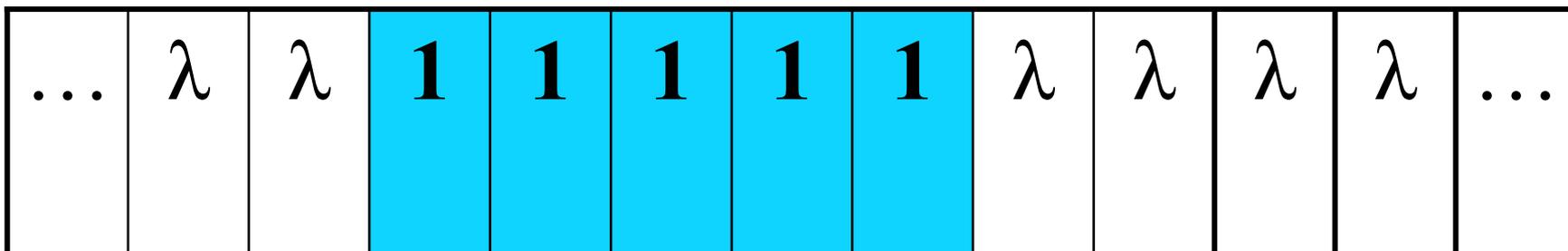
$$0_{10} = \lambda$$

$$1_{10} = 1$$

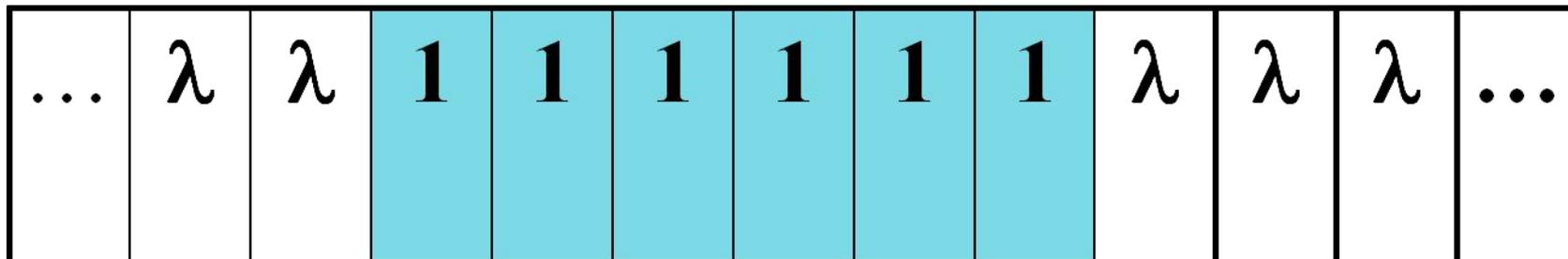
$$3_{10} = 111$$

Например

Исходные данные для задачи 1:



Результат:



Два варианта решения задачи 1

MT1

$$q_0 1 \rightarrow q_0 1R$$

$$q_0 \lambda \rightarrow q_1 1L$$

$$q_1 1 \rightarrow q_1 1L$$

$$q_1 \lambda \rightarrow q_z \lambda R$$

MT2

$$q_0 1 \rightarrow q_1 1L$$

$$q_0 \lambda \rightarrow q_z 1E$$

$$q_1 \lambda \rightarrow q_z 1E$$

■ Задача 2

Построить МТ, реализующую инвертирование числа в двоичной системе счисления

$$q_0 1 \rightarrow q_0 0R$$

$$q_1 0 \rightarrow q_1 0L$$

$$q_0 0 \rightarrow q_0 1R$$

$$q_1 1 \rightarrow q_1 1L$$

$$q_0 \lambda \rightarrow q_1 \lambda L$$

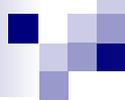
$$q_1 \lambda \rightarrow q_z \lambda R$$

- 1) УУ стоит над первым значащим символом слева, в начале рабочей зоны.
- 2) На след. такте МТ, не меняя своего состояния, заменяет символ 0 на 1 и наоборот и сдвигается вправо на один символ.
- 3) После просмотра всей цепочки УУ обзревает символ, указывающий на пустую ячейку. В этом случае МТ переходит в новое состояние и сдвигается влево на один символ.

- 4) На последующих тактах УУ не меняя своего состояния и обозреваемого символа, перемещается влево до пустой ячейки.
- 5) Встретив пустую ячейку, МТ переходит в заключительное состояние и перемещается вправо на один символ, переходя в заключительную стандартную конфигурацию.

Функциональная таблица

$q_i \backslash a_j$	a_1	a_2	...	a_j	...	a_n
q_0						
q_1						
...						
q_i				$q'_i a'_j v$		
...						
q_z						

- 
- Каждому состоянию МТ соответствует строка в функциональной таблице.
 - Каждому символу из входного алфавита столбец.
 - В клетках таблицы на пересечении строки и столбца записывается действие (правая часть команды), которое выполняется в этом состоянии, при данном обозреваемом символе.

Задача 2 Функциональная таблица

	0	1	λ
q_0	$q_0 1R$	$q_0 0R$	$q_1 \lambda L$
q_1	$q_1 0L$	$q_1 1L$	$q_z \lambda R$

Задача 3

Построить МТ, реализующую сложение двух чисел в унарном коде .

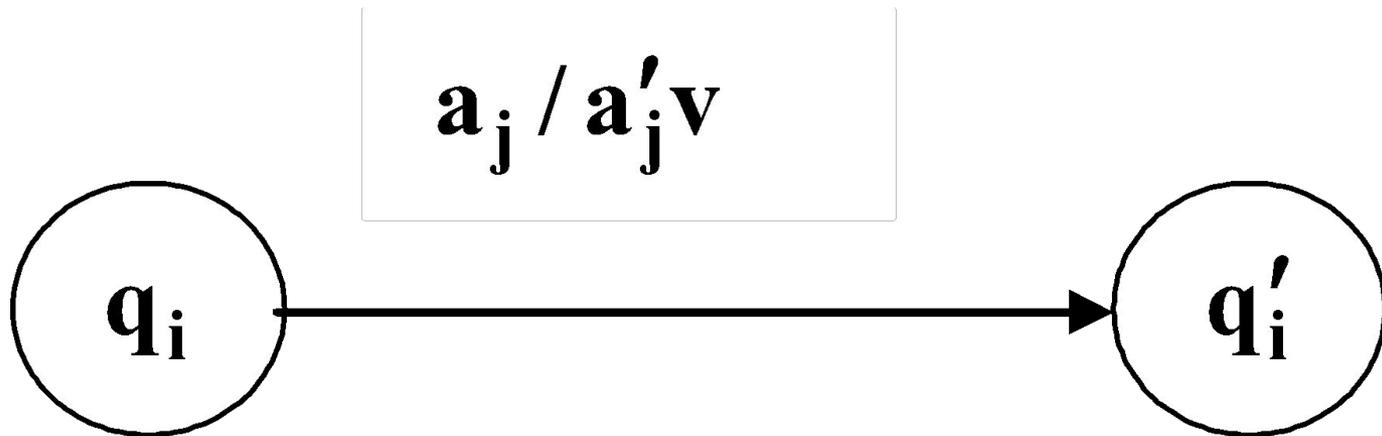
- Начальная конфигурация: $q_1 1^a * 1^b$.
- Конечная конфигурация: $q_z 1^{a+b}$,
- т.е. сложение фактически сводится к приписыванию числа **b** к числу **a** .
- Для этого первая 1 стирается, a^* заменяется на 1.

Приведем описание МТ в виде функциональной таблицы

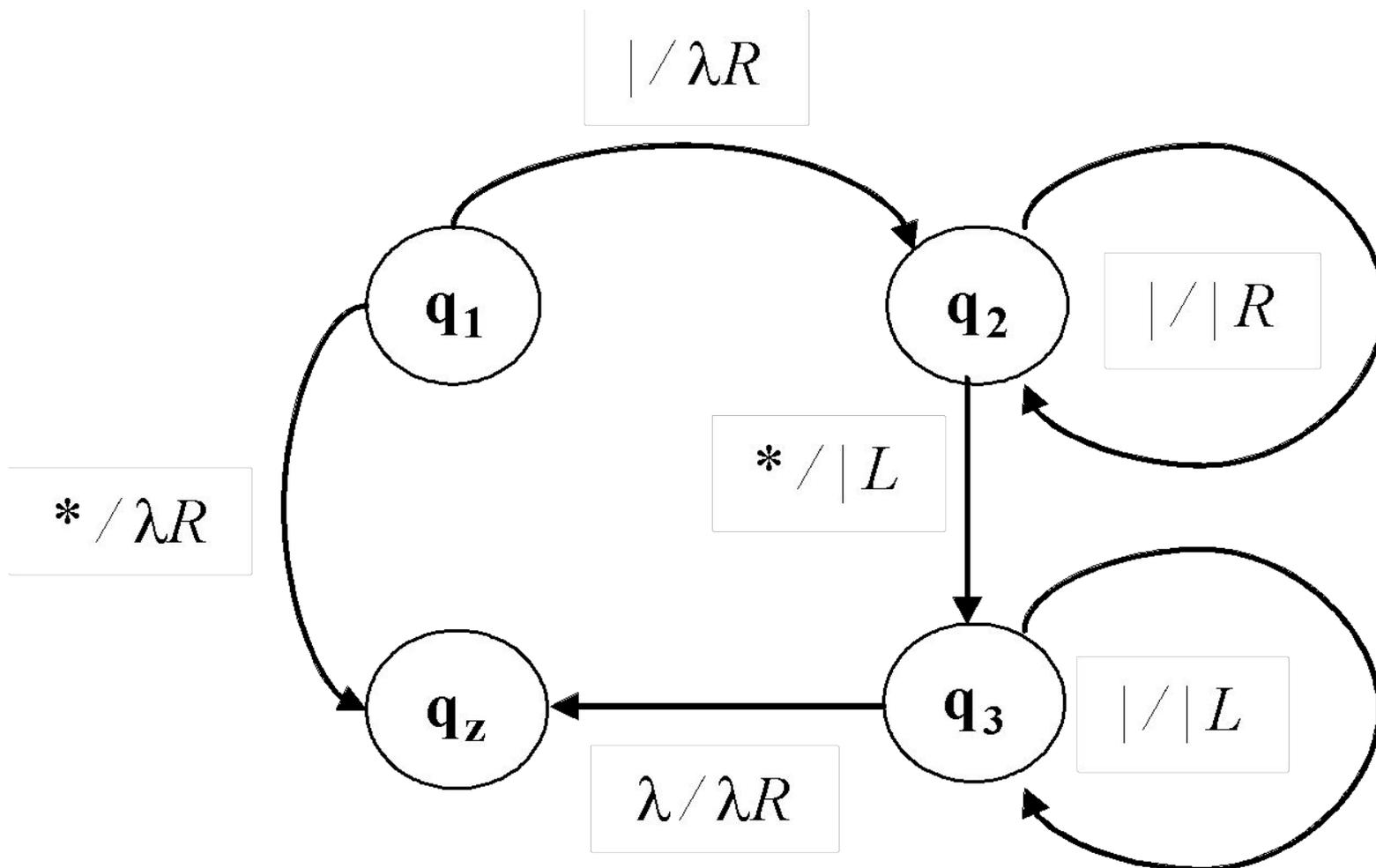
$q_i \backslash a_j$	1	*	λ
q_1	$q_2 \lambda R$	$q_z \lambda R$	-
q_2	$q_2 1R$	$q_3 1L$	-
q_3	$q_3 1L$	-	$q_z \lambda R$

Диаграмма состояний (граф переходов)

Каждому состоянию – вершина графа
Каждой команде – помеченную дугу



МТ в виде графа переходов для задачи 3



Описание МТ в виде системы команд для задачи 3

$$q_1 1 \rightarrow q_2 \lambda R$$

$$q_1 * \rightarrow q_z \lambda R$$

$$q_2 1 \rightarrow q_2 1 R$$

$$q_2 * \rightarrow q_3 1 L$$

$$q_3 1 \rightarrow q_3 1 L$$

$$q_3 \lambda \rightarrow q_z \lambda R$$

- Полное состояние МТ – **конфигурация**:
 - состояние рабочей зоны -
распределение букв по ячейкам ленты,
положение рабочей головки и
внутреннее состояние УУ.
- Конфигурация в такте t : $\mathbf{K}_t = \alpha q_i a_j \beta$

где

β - подслово слева от обозреваемой ячейки,

a_j - символ в обозреваемой ячейке,

α - подслово справа от обозреваемой ячейки.

- Начальная конфигурация $K_1 = q_0\alpha$ и конечная $K_z = q_z\gamma$ называются **стандартными:**

МТ **начинает и заканчивает** свою работу в таком положении, когда УУ обозревает **самый левый символ** рабочей зоны ленты.

Функционирование МТ –
последовательная смена ее
конфигураций в соответствии с
функцией перехода δ – **протокол
работы МТ:**

$$q_0\alpha \rightarrow \alpha_1q_1\beta_1 \rightarrow \alpha_2q_2\beta_2 \rightarrow \dots \rightarrow q_z\gamma$$

$$\alpha \xrightarrow{\text{МТ}} \gamma.$$

- Говорят, что МТ **применима к слову α** , если она переводит начальную конфигурацию $q_0\alpha$ за конечное число шагов в некоторую заключительную конфигурацию $q_z\gamma$.

В этом случае МТ вычисляет словарную функцию $f(\alpha)$.

Если значение $f(\alpha)$ не определено, то МТ работает бесконечно.

- Числовая функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вычислима по Тьюрингу, если существует МТ, которая переводит конфигурацию

в конфигурацию $q_0 1^{x_1} * 1^{x_2} * \dots * 1^{x_n}$

когда $q_z 1^y, ,$

или работает бесконечно, когда

не определена.

$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Тезис Черча для МТ:

любая вычислимая в интуитивном смысле функция вычислима на машине Тьюринга.

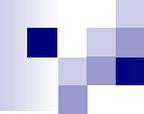
- Класс функций вычислимых на МТ совпадает с классом ЧРФ.

- Задача 4
- Построить МТ, вычисляющую функцию последователь (+1) в двоичной системе счисления.

$q_i \backslash a_j$	0	1	λ
q_1	$q_1 0R$	$q_1 1R$	$q_2 \lambda L$
q_2	$q_3 1L$	$q_2 0L$	$q_z 1E$
q_3	$q_3 0L$	$q_3 1L$	$q_z \lambda R$

- Движение вправо - q_1
- Движение влево - q_2
- Добавление 1 - q_3

- Протоколы работы МТ для трех тестовых примеров:
 - $110+1=111$
 - $101+1=110$
 - $111+1=1000$


$$110 = \alpha$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{q}_1 110$$

$$\mathbf{k}_6 = 1\mathbf{q}_3 11$$

$$\mathbf{k}_2 = 1\mathbf{q}_1 10$$

$$\mathbf{k}_7 = \mathbf{q}_3 111$$

$$\mathbf{k}_3 = 11\mathbf{q}_1 0$$

$$\mathbf{k}_8 = \mathbf{q}_3 \lambda 111$$

$$\mathbf{k}_4 = 111\mathbf{q}_1 \lambda$$

$$\mathbf{k}_9 = \mathbf{q}_z 111$$

$$\mathbf{k}_5 = 11\mathbf{q}_2 0$$


$$101 = \alpha$$

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{q}_1 101$$

$$\mathbf{k}_5 = 10\mathbf{q}_2 1$$

$$\mathbf{k}_2 = 1\mathbf{q}_1 01$$

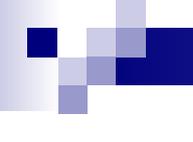
$$\mathbf{k}_6 = 1\mathbf{q}_2 00$$

$$\mathbf{k}_3 = 10\mathbf{q}_1 1$$

$$\mathbf{k}_7 = \mathbf{q}_3 110$$

$$\mathbf{k}_4 = 101\mathbf{q}_1\lambda$$

$$\mathbf{k}_8 = \mathbf{q}_3\lambda 110 = \mathbf{k}_z$$


$$111 = \alpha$$

$$k_1 = q_1 111$$

$$k_5 = 11q_2 1$$

$$k_2 = 1q_1 11$$

$$k_6 = 1q_2 10$$

$$k_3 = 11q_1 1$$

$$k_7 = q_2 100$$

$$k_4 = 111q_1 \lambda$$

$$k_8 = q_2 \lambda 000$$

$$k_9 = q_z 1000$$