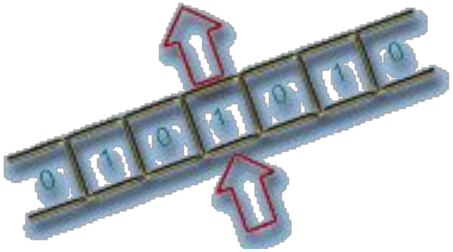
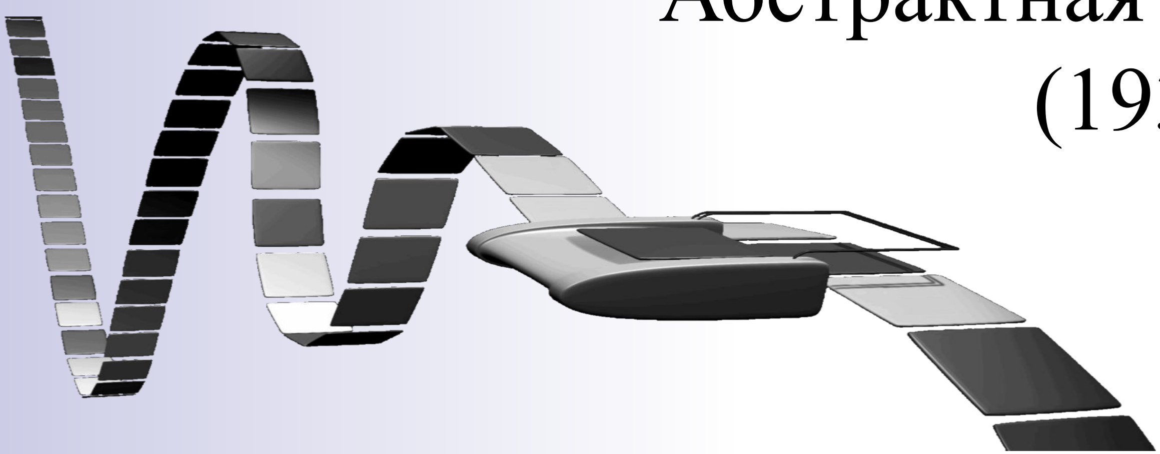
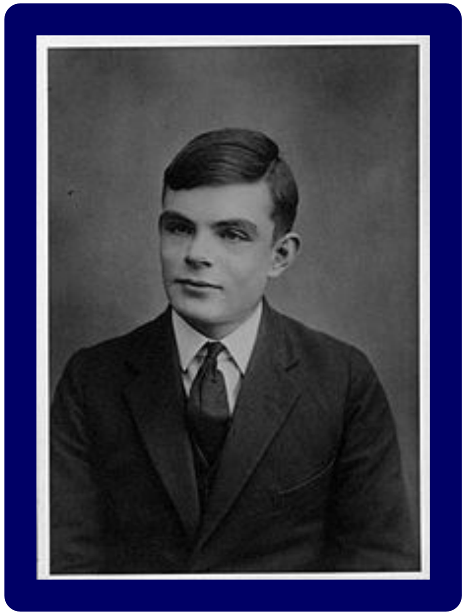


Машины Тьюринга-Поста

Абстрактная модель алгоритма
(1936-1937)



<u>А́лан Мэ́тисон Тью́ринг</u>
Alan Mathison Turing
1912-1954



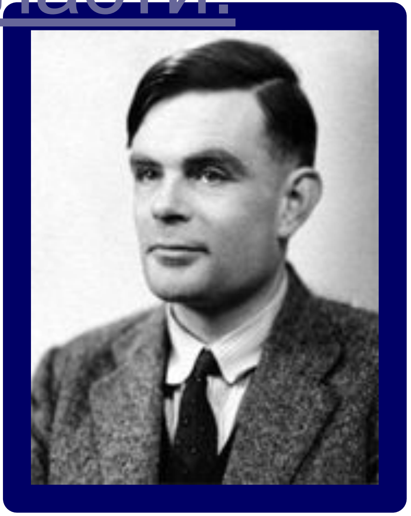
английский математик, логик, криптограф (Энигма)

«Алан Тьюринг - взломщик кодов и пионер информатики».

<u>Общепринято считать Алана Тьюринга отцом</u> **Общепринято считать Алана Тьюринга отцом** <u>информатики и теории</u> **Общепринято считать Алана**

Премия Тьюринга (Turing Award) - самая престижная премия в самая престижная премия в информатике, вручаемая **Ассоциацией вычислительной техники** за выдающийся научно-технический вклад в этой области.

В настоящее время премия спонсируется корпорациями Intel и Google и составляет 250 000 долларов США.



Лауреаты премии Тьюринга

Р. Хэмминг, Н. Вирт, Д. Кнут,

Э. Дейкстра , Д. Грэй, Д. Перл, Ч. Теккер…..

Символьные конструкции

- **Алфавит** - любое конечное множество попарно различных знаков, называемых **буквами** (символами) этого алфавита.
- Алфавит будем обозначать заглавными буквами, например:

$$\mathbf{A = \{a,b,\ldots,z\}; \qquad B = \{0,1\}; \qquad C = \{\Delta,+,!,0\}.}$$

- Символом λ - обозначение пустого символа.

- **Слово** в данном алфавите - любая конечная (в том числе и пустая) последовательность букв этого алфавита.
- Слова обозначаются малыми греческими буквами.

Например:

- **α = algorithm** - слово в алфавите **A**;
- **β = 1010100** - слово в алфавите **B;**
- **γ = +0Δ + 0** - слово в алфавите **C**.

Пустое слово обозначим **Λ**.

- **Длина** слова $\boldsymbol{\alpha}$ (обозначается $|\boldsymbol{\alpha}|$) - это количество букв в слове.

Отношения и операции над словами

- **Равенство слов** в алфавите **А** определяется индуктивно:

а) пустые слова равны;

б) если слово $\boldsymbol{\alpha}$ равно слову $\boldsymbol{\beta}$, то

$\boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{b} = \boldsymbol{\beta b}$, где $\boldsymbol{b}$ - буква в алфавите **А**.

- Если слово **α** является частью слова **β** в алфавите **A**, то слово **α** – **подслово** слова **β** (или слово **α** **входит** в слово **β**).

Например: в слове 1012011201 два вхождения слова 12, три вхождения слова 01, одиннадцать вхождений пустого слова Λ - перед первой, после последней букв и между всеми буквами.

- Слово длины **n** , составленное из буквы **a**, повторенной **n** раз, будем обозначать a^n.

- Например **xyxxxyyyy** = $\mathbf{xyx^3y^4}$

Классическая машина Тьюринга
Основные определения

Под машиной Тьюринга понимается гипотетическая (абстрактная) машина, состоящая из следующих частей:

1) потенциально бесконечной в обе стороны ленты, разбитой на ячейки, в каждой ячейке может быть записан только один символ из алфавита

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

а также пустой символ λ ;

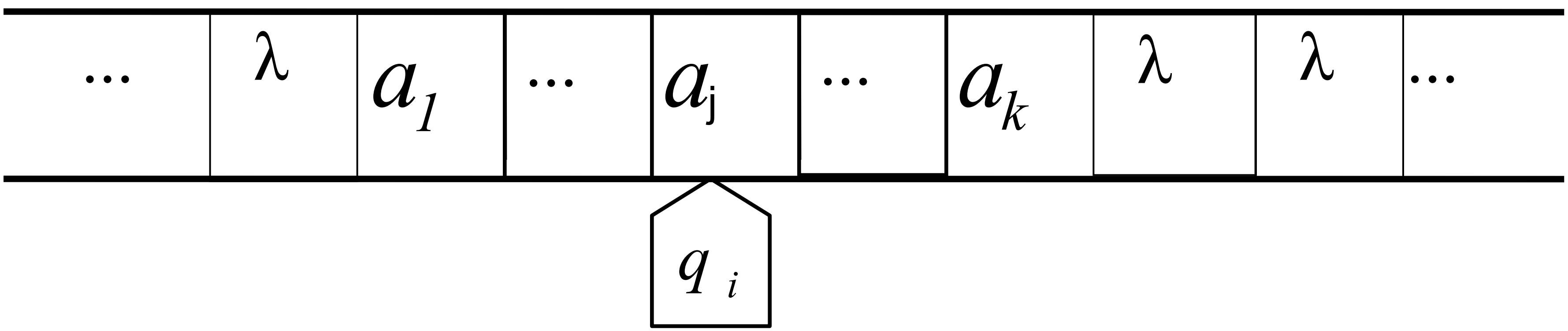
- 2) УУ - управляющего устройства (рабочей головки), которое в каждый момент времени может находится в одном из состояний множества

$$\mathbf{Q = \{q_1, q_2, ..., q_m\}.}$$

- В каждом из состояний головка размещается напротив ячейки и может <u>считывать (обозревать) или записывать </u>в нее букву из алфавита **А**.

Классическая машина Тьюринга

- Часть ленты, в которой записаны буквы алфавита **A** - **рабочая зона**.



Функционирование КМТ

состоит из последовательности элементарных шагов (тактов).

На каждом шаге выполняются следующие действия:

- 1) УУ считывает символ $\mathbf{a_j}$;
- 2) в зависимости от своего состояния $\mathbf{q_i}$

и считанного символа ленты $\mathbf{a_j}$ УУ вырабатывает символ $\mathbf{a'_j \in A}$

и записывает его в обозреваемую ячейку, возможно $\mathbf{a_j = a'_j}$;

- 3) УУ перемещается на одну ячейку вправо (**R**) , влево (**L**) или остается на месте (**E**);
- 4) УУ переходит в другое внутреннее состояние q_i', возможно $\mathbf{q_i' = q_i}$.

- Состояние $\mathbf{q_0}$ - начальное (МТ начинает работу),

  $\mathbf{q_z}$ - заключительное состояние.

При переходе в заключительное состояние машина останавливается.

Математическое описание КМТ

$$\mathbf{KMT = M(A, Q, V, q_0, q_z, \delta)}$$

- где **A** – внешний алфавит символов,
- **Q** – алфавит внутренних состояний машины,
- **V** – алфавит допустимых движений,
- $\mathbf{q_0, q_z}$ - начальное и заключительное состояния,
- $\delta = Q \times A \to Q \times A \times V$ - функция переходов.

Способы описания КМТ:

- система команд (программа) ;
- функциональная таблица;
- диаграмма состояний (граф переходов).

Система команд (программа) КМТ

Совокупность команд вида:

$$q_i a_j \rightarrow q_i' a_j' v, \qquad v \in V = \{R, L, E\};$$

называют **системой команд** или **программой КМТ**.

Порядок следования команд в программе не имеет принципиального значения

Система команд МТ

- 1) начальному шагу алгоритма ставится в соответствие начальное состояние
- 2) соседним шагам алгоритма соответствует переход в смежные состояния
- 3) циклы реализуются так, что последнее действие цикла должно соответствовать переходу в то состояние, которое соответствует началу цикла
- 4) последний шаг алгоритма - переход в заключительное состояние.

Задача 1.

Построить МТ, вычисляющую функцию последователь (+1) в унарной системе счисления.

- **Унарная (единичная) система счисления** - положительная целочисленная система счисления с основанием, равным 1.

В качестве единственной «цифры» используется «1» или черточка «/» или «|».

Число **x** в унарном коде $\mathbf{x = \underbrace{111...1}_{x}}$

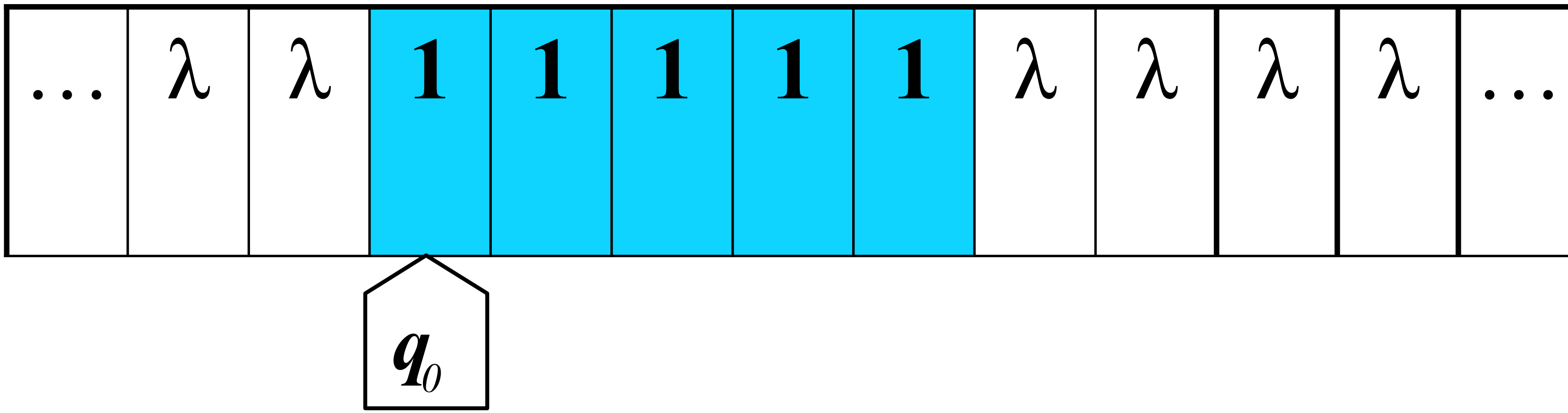
$$\mathbf{0_{10} = \lambda}$$

$$\mathbf{1_{10} = 1}$$

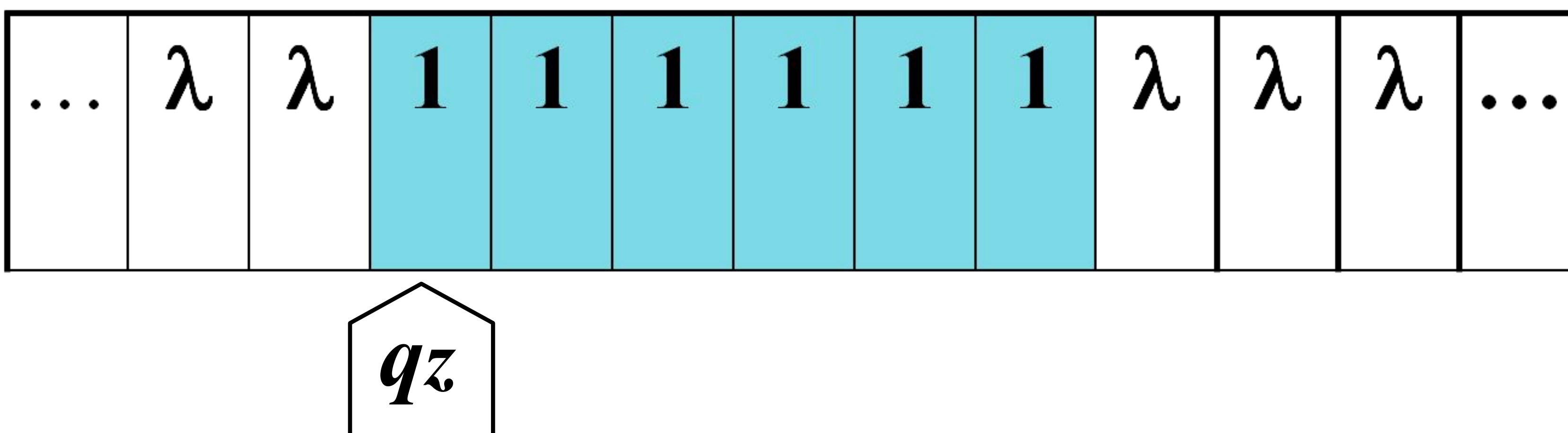
$$\mathbf{3_{10} = 111}$$

Например

Исходные данные для задачи 1:



Результат:



Два варианта решения задачи 1

МТ1

$q_0 1 \rightarrow q_0 1R$

$q_0 \lambda \rightarrow q_1 1L$

$q_1 1 \rightarrow q_1 1L$

$q_1 \lambda \rightarrow q_z \lambda R$

МТ2

$q_0 1 \rightarrow q_1 1L$

$q_0 \lambda \rightarrow q_z 1E$

$q_1 \lambda \rightarrow q_z 1E$

- Задача 2

Построить МТ, реализующую инвертирование числа в двоичной системе счисления

$$q_0 1 \rightarrow q_0 0R \qquad q_1 0 \rightarrow q_1 0L$$

$$q_0 0 \rightarrow q_0 1R \qquad q_1 1 \rightarrow q_1 1L$$

$$q_0 \lambda \rightarrow q_1 \lambda L \qquad q_1 \lambda \rightarrow q_z \lambda R$$

- 1) УУ стоит над первым значащим символом слева, в начале рабочей зоны.
- 2) На след. такте МТ, не меняя своего состояния, заменяет символ 0 на 1 и наоборот и сдвигается вправо на один символ.
- 3) После просмотра всей цепочки УУ обозревает символ, указывающий на пустую ячейку. В этом случае МТ переходит в новое состояние и сдвигается влево на один символ.

- 4) На последующих тактах УУ не меняя своего состояния и обозреваемого символа, перемещается влево до пустой ячейки.

- 5) Встретив пустую ячейку, МТ переходит в заключительное состояние и перемещается вправо на один символ, переходя в заключительную стандартную конфигурацию.

Функциональная таблица

$q_i \backslash a_j$	a_1	a_2	…	a_j	…	a_n
q_0						
q_1						
…						
q_i				$q_i' a_j' v$		
…						
q_z						

- Каждому состоянию МТ соответствует строка в функциональной таблице.
- Каждому символу из входного алфавита столбец.
- В клетках таблицы на пересечении строки и столбца записывается действие (правая часть команды), которое выполняется в этом состоянии, при данном обозреваемом символе.

Задача 2 Функциональная таблица

	0	1	λ
q_0	$q_0 1R$	$q_0 0R$	$q_1 \lambda L$
q_1	$q_1 0L$	$q_1 1L$	$q_z \lambda R$

Задача 3
Построить МТ, реализующую сложение двух чисел в унарном коде .

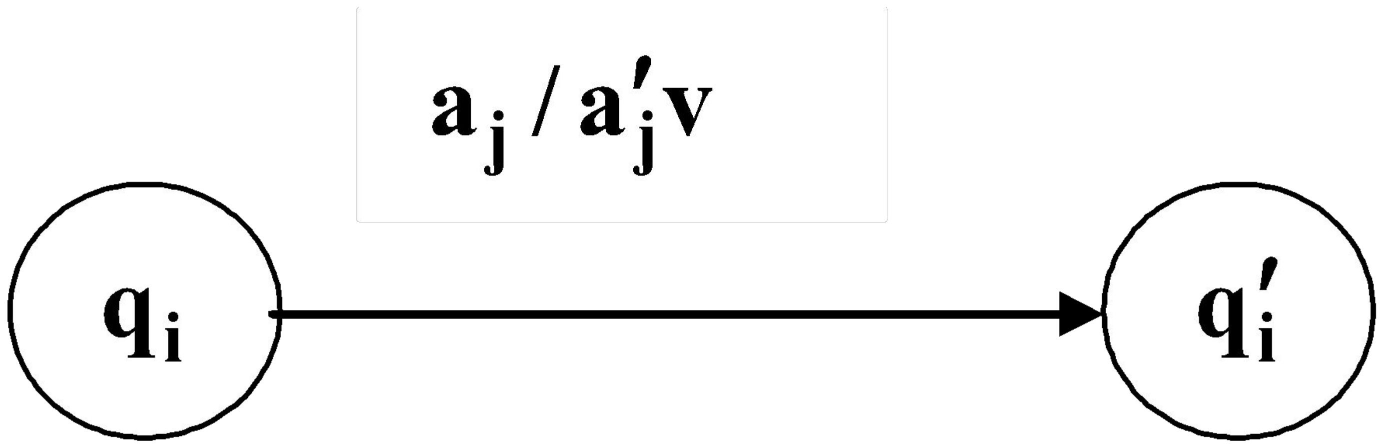
- Начальная конфигурация: $q_1 1^a * 1^b$.
- Конечная конфигурация: $q_z 1^{a+b}$,
- т.е. сложение фактически сводится к приписыванию числа **b** к числу **a** .
- Для этого первая 1 стирается, а * заменяется на 1.

Приведем описание МТ в виде функциональной таблицы

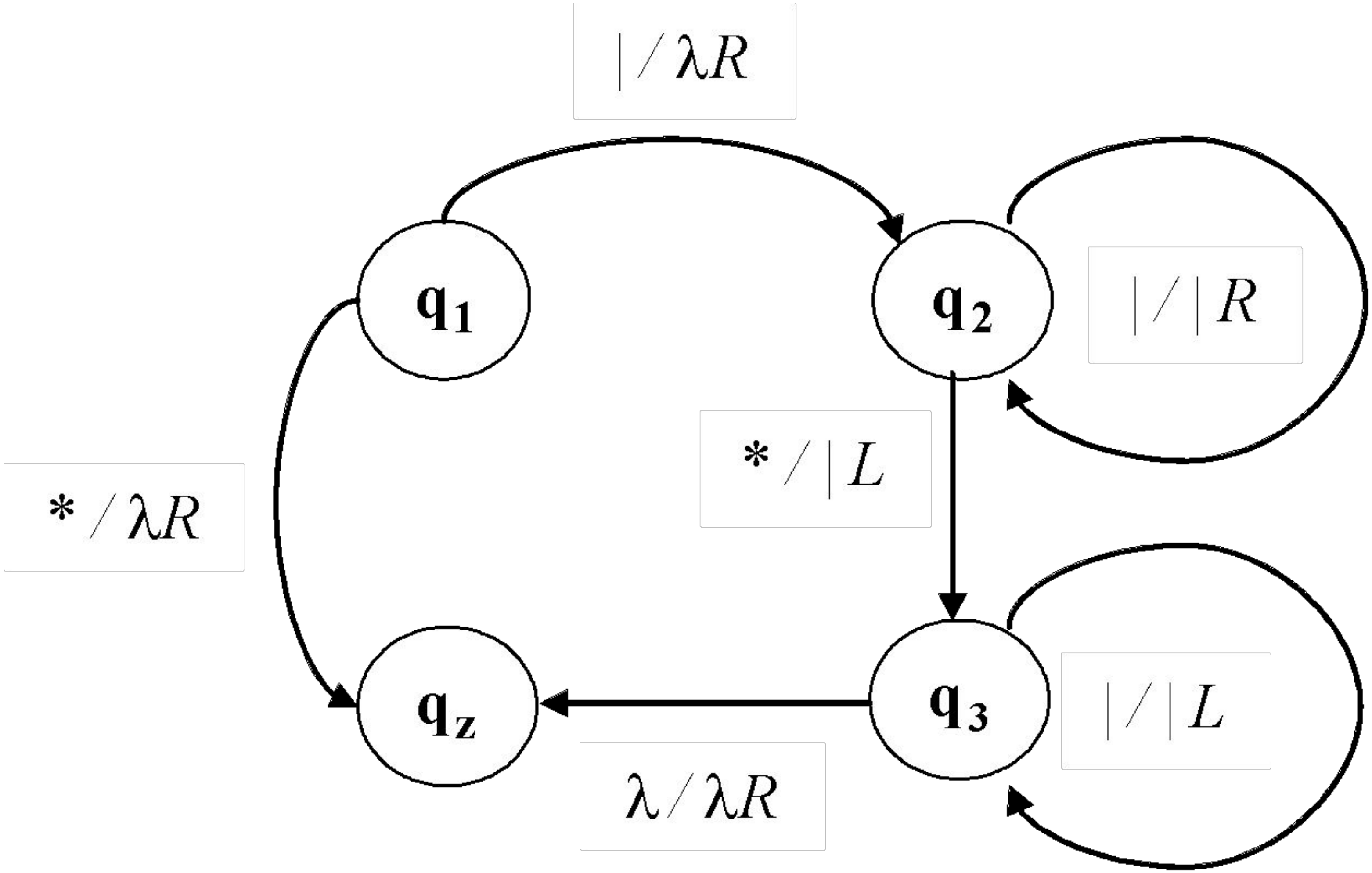
$q_i \backslash a_j$	1	*	λ
q_1	$q_2\lambda R$	$q_Z\lambda R$	-
q_2	$q_2 1R$	$q_3 1L$	-
q_3	$q_3 1L$	-	$q_Z\lambda R$

Диаграмма состояний (граф переходов)

Каждому состоянию – вершина графа
Каждой команде – помеченную дугу



МТ в виде графа переходов для задачи 3



Описание МТ в виде системы команд для задачи 3

$$q_1 1 \to q_2 \lambda R$$

$$q_1 * \to q_z \lambda R$$

$$q_2 1 \to q_2 1 R$$

$$q_2 * \to q_3 1 L$$

$$q_3 1 \to q_3 1 L$$

$$q_3 \lambda \to q_z \lambda R$$

- Полное состояние МТ – **конфигурация:**
  - состояние рабочей зоны - распределение букв по ячейкам ленты, положение рабочей головки и внутреннее состояние УУ.
- Конфигурация в такте $\mathbf{t}$: $\mathbf{K_t = \alpha q_i a_j \beta}$

где

β - подслово <u>слева</u> от обозреваемой ячейки,

$\mathbf{a_j}$ - символ в обозреваемой ячейке,

α - подслово <u>справа</u> от обозреваемой ячейки.

- Начальная конфигурация $K_1 = q_0\alpha$ и конечная $K_z = q_z\gamma$ называются **стандартными**:

МТ **начинает и заканчивает** свою работу в таком положении, когда УУ обозревает **самый левый символ** рабочей зоны ленты.

Функционирование МТ – последовательная смена ее конфигураций в соответствии с функцией перехода δ – **протокол работы МТ**:

$$q_0\alpha \rightarrow \alpha_1 q_1 \beta_1 \rightarrow \alpha_2 q_2 \beta_2 \rightarrow \ldots \rightarrow q_z\gamma$$

$$\alpha \xrightarrow{\text{МТ}} \gamma.$$

- Говорят, что МТ **применима к слову** **α**, если она переводит

начальную конфигурацию $q_0\alpha$

за конечное число шагов в некоторую заключительную конфигурацию $q_z\gamma$.

В этом случае МТ вычисляет словарную функцию **f(α).**

Если значение **f(α) не** определено, то МТ работает бесконечно.

- Числовая функция $f(x_1, x_2, .., x_n)$ вычислима по Тьюрингу, если существует МТ, которая переводит конфигурацию

$$q_0 1^{x_1} * 1^{x_2} * .. * 1^{x_n}$$

в конфигурацию $q_z 1^y$, ,

когда $y = f(x_1, x_2, .., x_n)$

или работает бесконечно, когда $f(x_1, x_2, .., x_n)$ не определена.

Тезис Черча для МТ:

любая вычислимая в интуитивном смысле функция вычислима на машине Тьюринга.

- Класс функций вычислимых на МТ совпадает с классом ЧРФ.

- Задача 4
- Построить МТ, вычисляющую функцию последователь (+1) в двоичной системе счисления.

$q_i \backslash a_j$	0	1	λ
q_1	$q_1 0R$	$q_1 1R$	$q_2 \lambda L$
q_2	$q_3 1L$	$q_2 0L$	$q_z 1E$
q_3	$q_3 0L$	$q_3 1L$	$q_z \lambda R$

- Движение вправо - **q_1**
- Движение влево - **q_2**
- Добавление 1 - **q_3**

- Протоколы работы МТ для трех тестовых примеров:
  - 110+1=111
  - 101+1 =110
  - 111+1=1000

$$110 = \alpha$$

$$k_1 = q_1 110 \qquad k_6 = 1q_3 11$$

$$k_2 = 1q_1 10 \qquad k_7 = q_3 111$$

$$k_3 = 11q_1 0 \qquad k_8 = q_3 \lambda 111$$

$$k_4 = 111q_1 \lambda \qquad k_9 = q_z 111$$

$$k_5 = 11q_2 0$$

$$101 = \alpha$$

$$k_1 = q_1 101 \qquad k_5 = 10q_2 1$$

$$k_2 = 1q_1 01 \qquad k_6 = 1q_2 00$$

$$k_3 = 10q_1 1 \qquad k_7 = q_3 110$$

$$k_4 = 101q_1 \lambda \qquad k_8 = q_3 \lambda 110 = k_z$$

$$111 = \alpha$$

$$k_1 = q_1 111 \qquad k_5 = 11q_2 1$$

$$k_2 = 1q_1 11 \qquad k_6 = 1q_2 10$$

$$k_3 = 11q_1 1 \qquad k_7 = q_2 100$$

$$k_4 = 111q_1 \lambda \qquad k_8 = q_2 \lambda 000$$

$$k_9 = q_z 1000$$