

Глава 2. Введение в анализ

§1. Функции

Определение.

Пусть каждому вещественному числу x из некоторого числового множества D поставлено в соответствие однозначно определенное вещественное число y . Тогда говорят, что на множестве D задана ***функция*** f , такая, что $f(x) = y$.

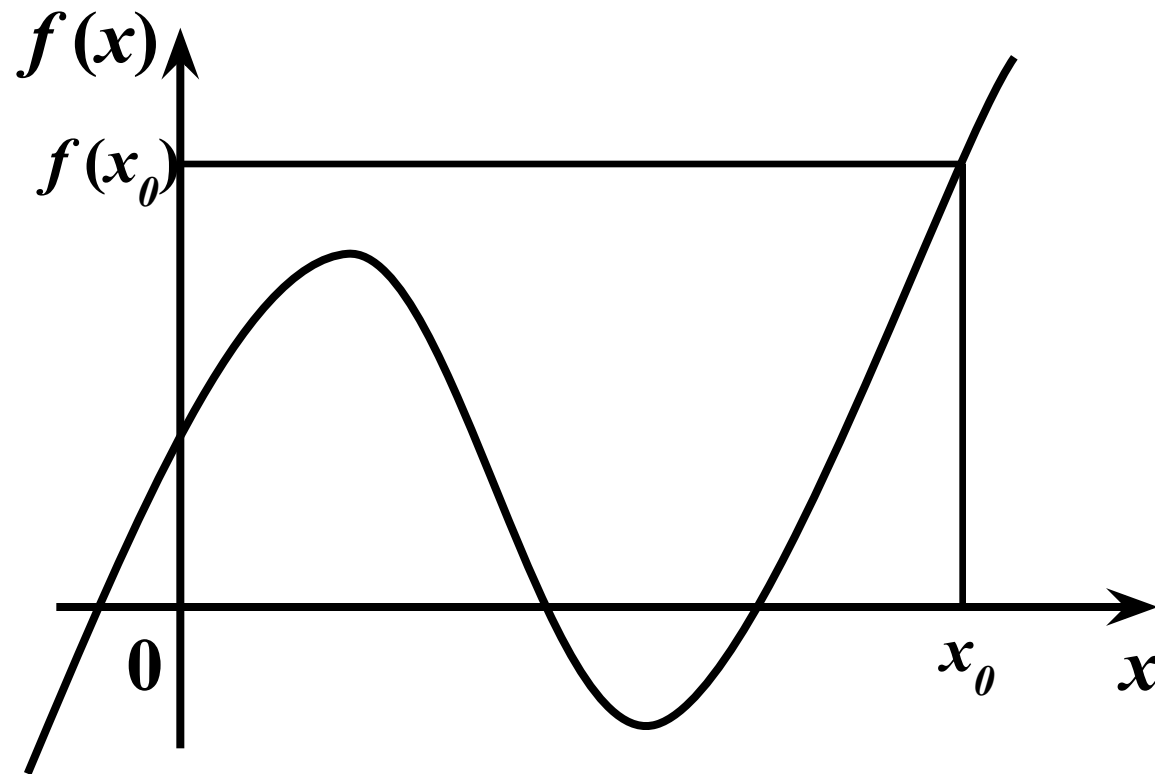
Множество D называется *областью*
определения функции f , число x — ее
аргументом, а число y — *значением*
функции f в точке x .

Множество

$E = \{y \in R: y = f(x), x \in D\}$ называется

областью значений функции f .

Графиком функции f называется множество точек плоскости Oxy с координатами $(x, f(x))$, $x \in D$.



Способы задания функций:

Способы задания функций:

1. аналитический

Способы задания функций:

1. аналитический:

а) с помощью одной формулы,
например, $f(x) = 3x + 7$;

Способы задания функций:

1. аналитический:

а) с помощью одной формулы,
например, $f(x) = 3x + 7$;

б) с помощью нескольких формул,
например, $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{при } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$;

в) неявно, в виде уравнения вида
 $F(x, y) = 0$, например,
 $x^2 + \operatorname{arctg}(xy) - 1 = 0$;

в) неявно, в виде уравнения вида

$$F(x, y) = 0, \text{ например,} \\ x^2 + \operatorname{arctg}(xy) - 1 = 0;$$

г) в виде суперпозиции функций:

$$F(x) = f(u(x)). \text{ Например,} \\ y = \sin \sqrt{x}, \text{ то есть } y = \sin u, u = \sqrt{x}; \\ y = e^{\cos 3x}, \text{ то есть } y = e^u, u = \cos v, \\ v = 3x.$$

Способы задания функций:

2. графический;

Способы задания функций:

2. графический;

3. табличный, в виде

x	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_n)$

Способы задания функций:

2. графический;

3. табличный, в виде

x	x_1	\dots	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	\dots	$f(x_n)$

4. словесный – функция описывается правилом ее составления.

Основные свойства функций:

Основные свойства функций:

1. Четность и нечетность

Функция $y = f(x)$ – *четная*, если для любого $x \in X$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$.

Основные свойства функций:

1. Четность и нечетность

Функция $y = f(x)$ – *нечетная*, если для любого $x \in X$ выполняется условие $f(-x) = -f(x)$.

В противном случае, функция называется *функцией общего вида*.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – относительно начала координат.

Основные свойства функций:

2. Монотонность

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на промежутке $[a; b]$, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, таких что $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ строго возрастает.

Основные свойства функций:

2. Монотонность

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на промежутке $[a; b]$, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, таких что $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.
Если $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $f(x)$ строго убывает.

Основные свойства функций:

2. Монотонность

Функции, возрастающие или убывающие называются *монотонными*.

Основные свойства функций:

3. Ограниченность

Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* на промежутке $[a; b]$, если существует такое число M , что для любого числа x из этого промежутка справедливо неравенство $f(x) \leq M$.

Основные свойства функций:

3. Ограниченность

Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу* на промежутке $[a; b]$, если существует такое число m , что для любого числа x из этого промежутка справедливо неравенство $f(x) \geq m$.

Основные свойства функций:

3. Ограниченность

Функция, ограниченная на $[a, b]$ и сверху, и снизу, называется *ограниченной* на $[a, b]$.

Основные свойства функций:

3. Ограниченность

Определение ограниченности функции может быть также записано в следующем виде:

Функция называется *ограниченной* на промежутке $[a, b]$, если существует число K ($K > 0$), такое что $|f(x)| \leq K$ для любого x из $[a, b]$.

Основные свойства функций:

4. Периодичность

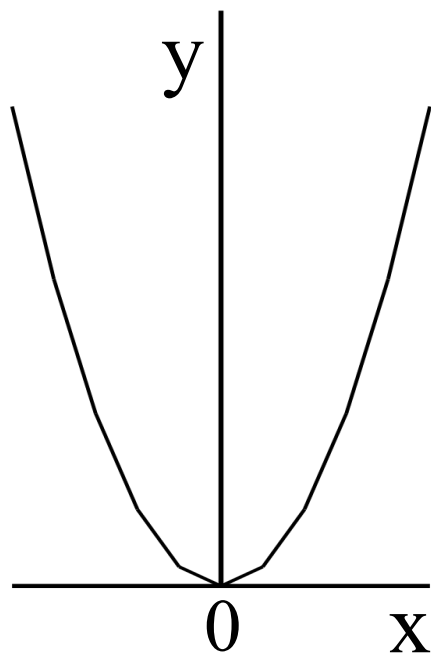
Функция $y = f(x)$, называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любого $x \in X$ выполняется условие $f(x + T) = f(x)$.

Основные элементарные функции

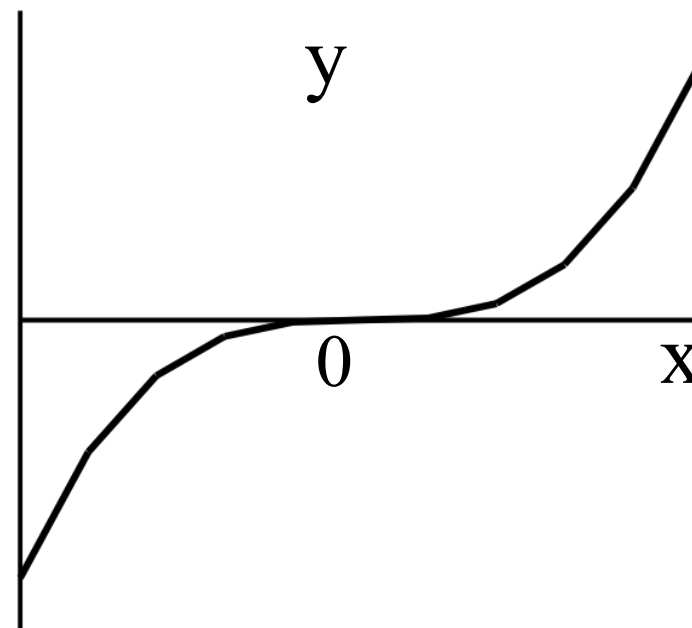
Основные элементарные функции:

- степенная $y = x^n$;

n – четное

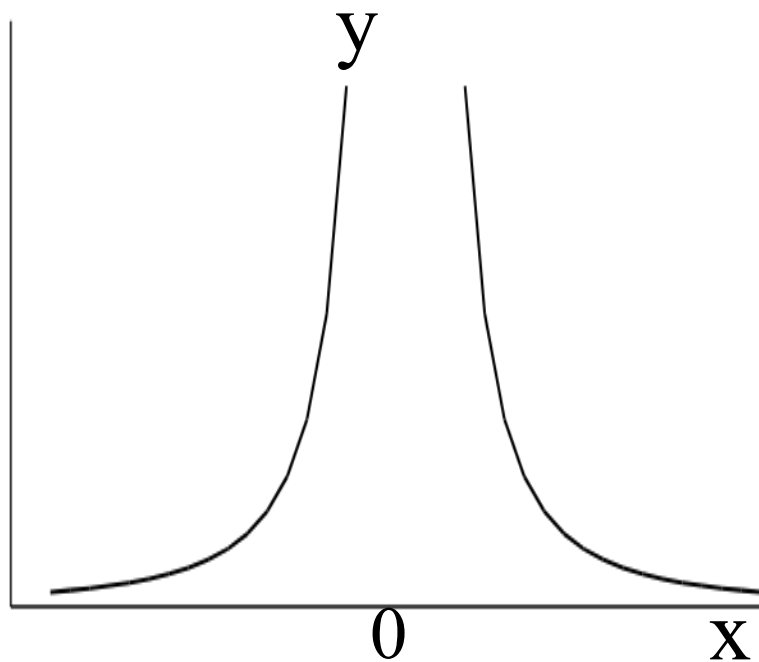


n – нечетное

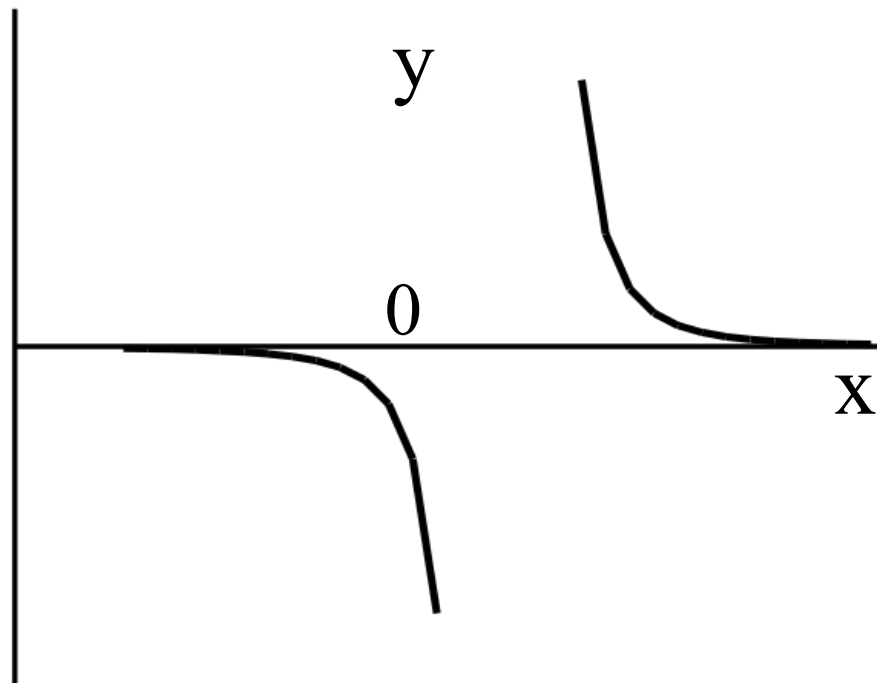


- степенная $y = \frac{1}{x^n}$

n – четное

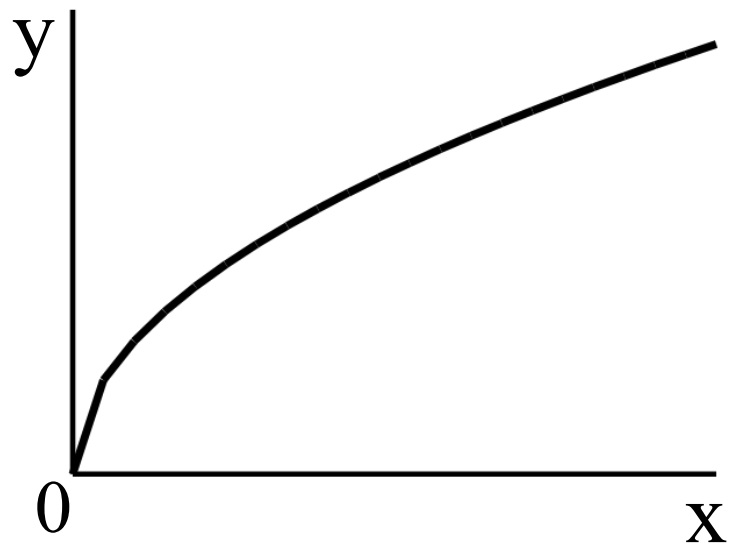


n – нечетное

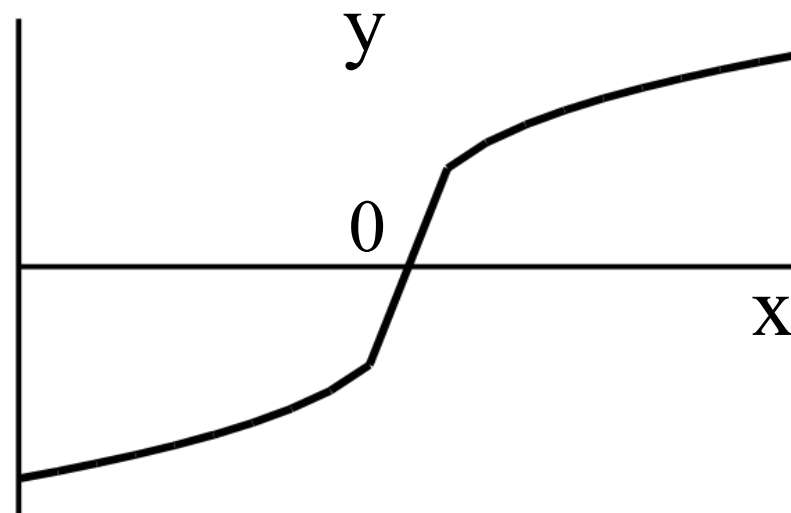


- степенная $y = \sqrt[n]{x}$

n – четное

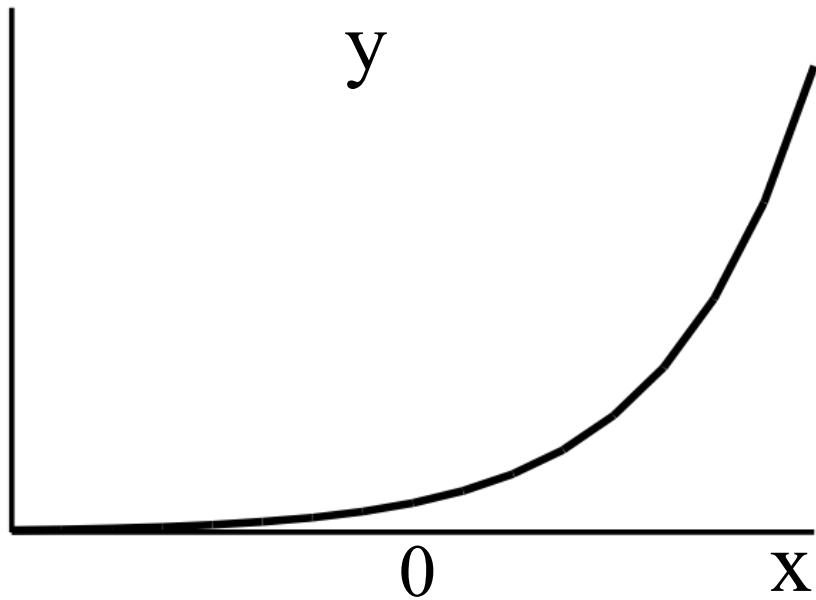


n – нечетное

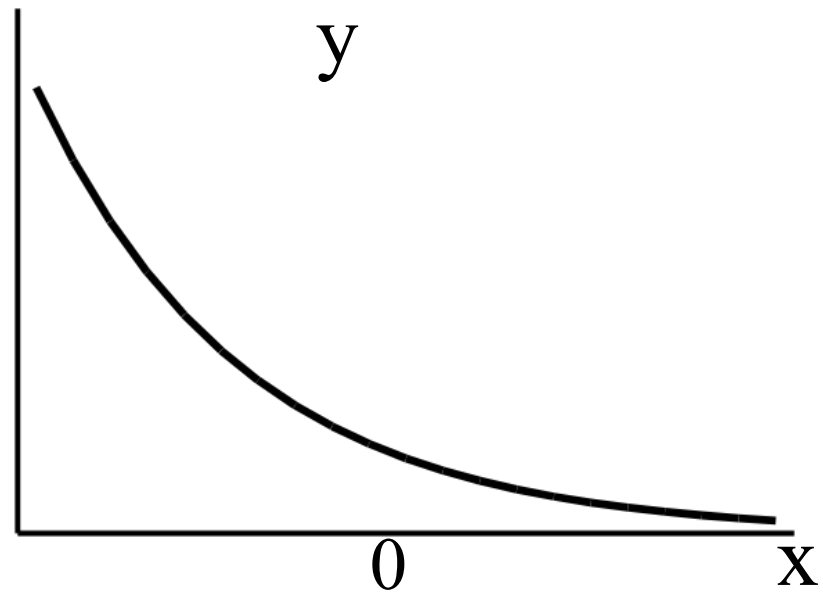


- показательная $y = a^x$;

при $a > 1$

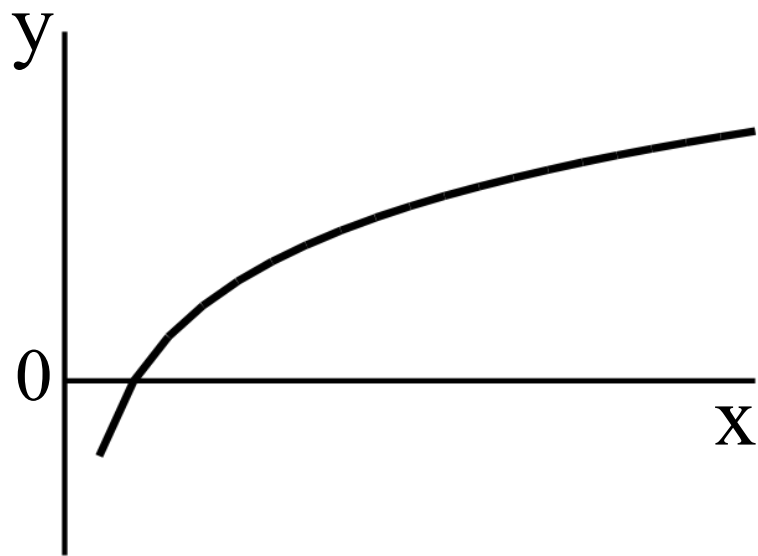


при $0 < a < 1$

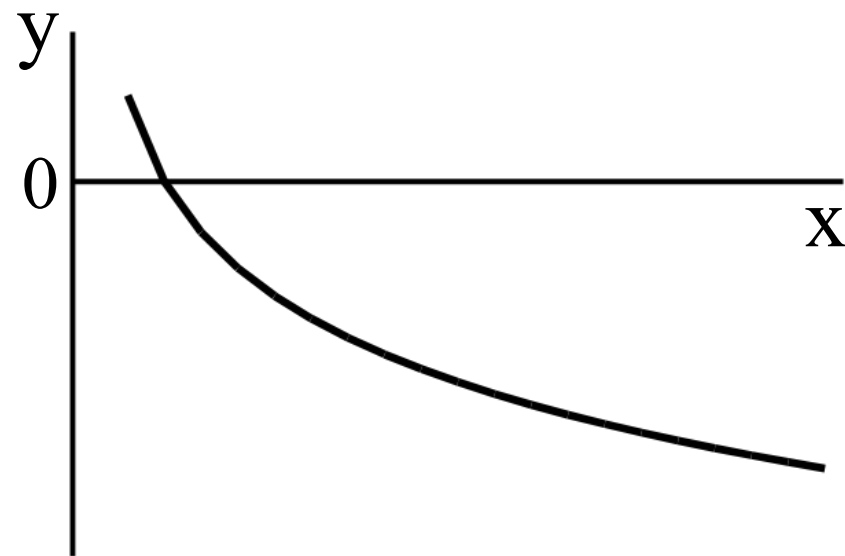


- логарифмическая $y = \log_a x$

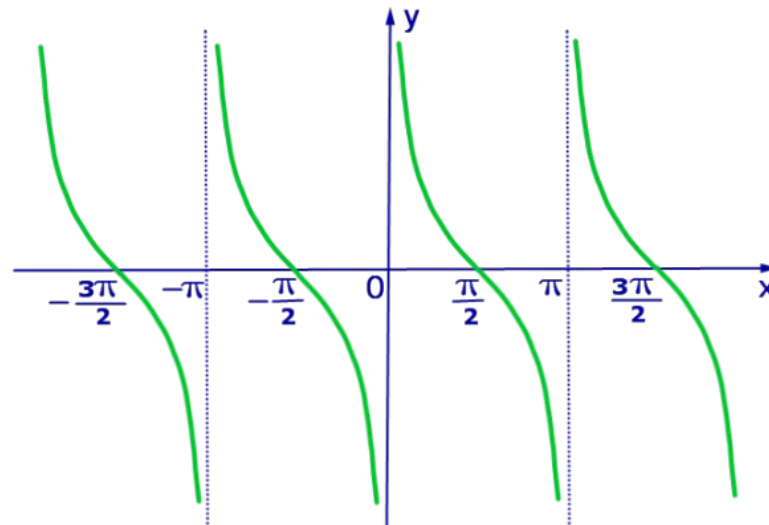
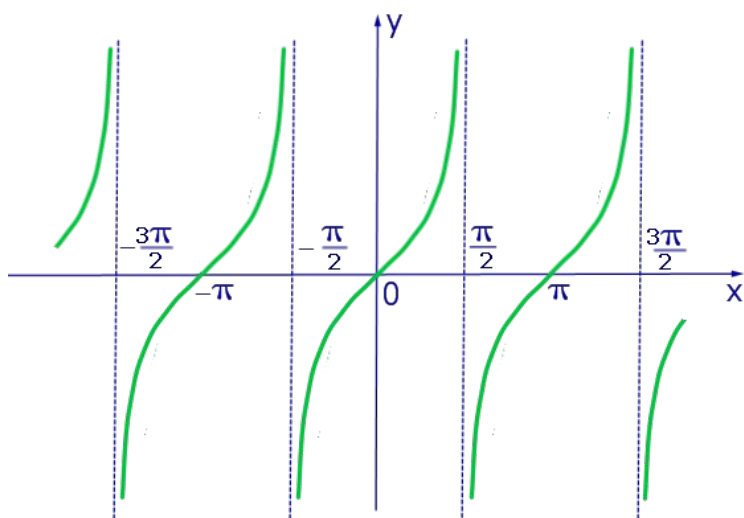
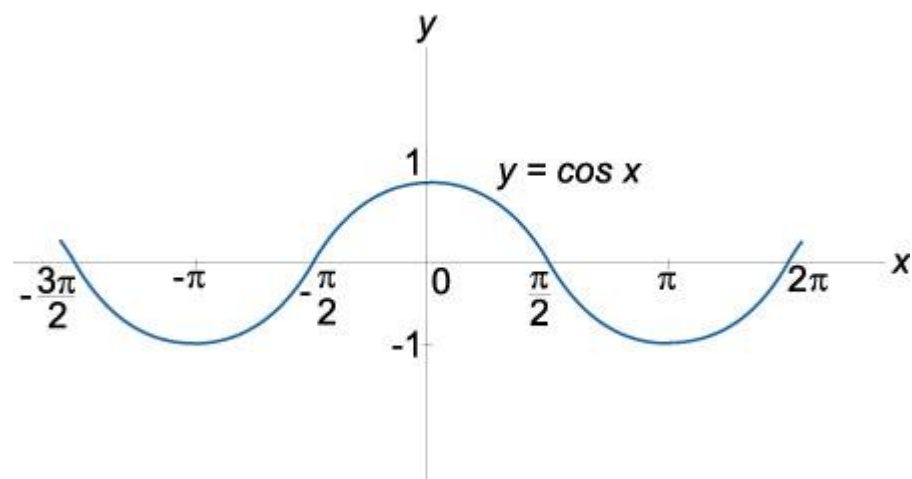
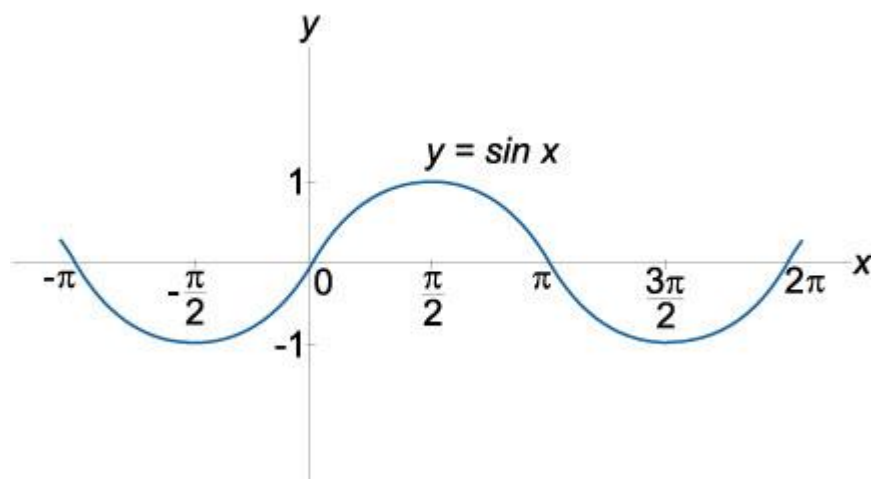
при $a > 1$



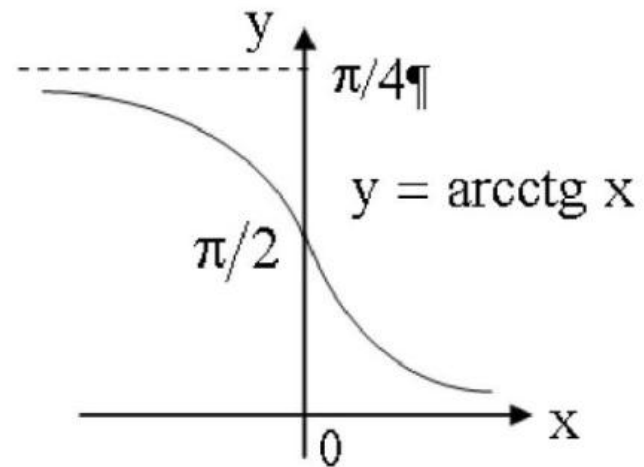
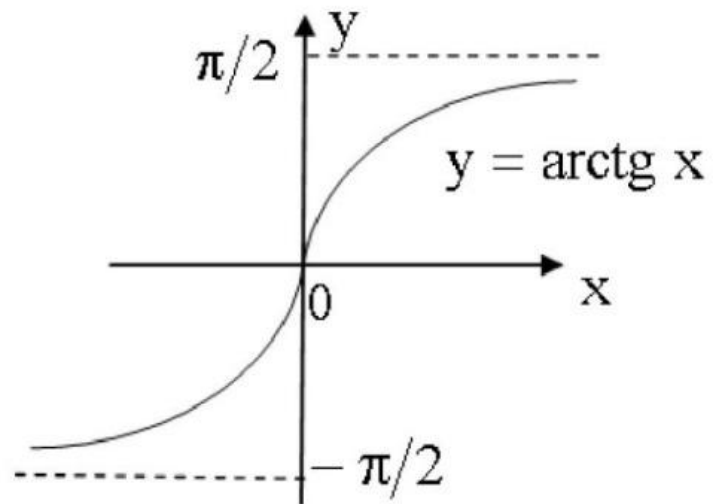
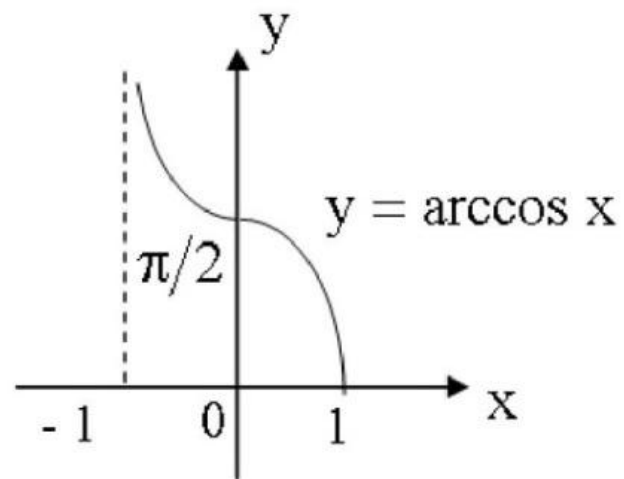
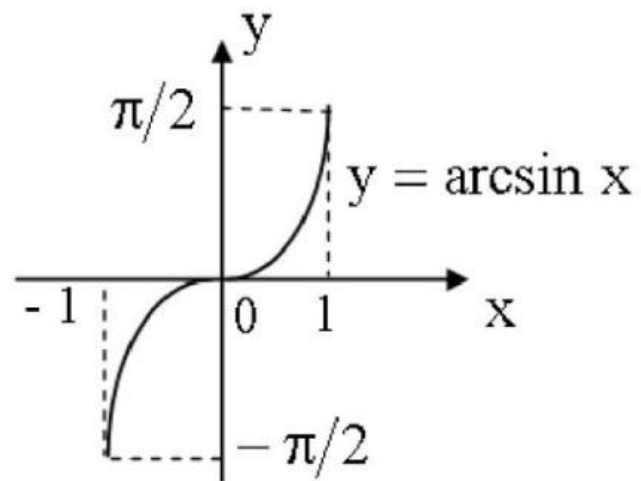
при $0 < a < 1$



- тригонометрические;



- обратные тригонометрические функции.



Функции, полученные из основных
элементарных функций с помощью
арифметических действий и суперпозиции,
называются *элементарными*.

§2. Последовательности

Определение.

Если каждому числу $n \in \mathbf{N}$ поставлено в соответствие вещественное число x_n , то образовавшееся таким образом множество чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ называется числовой последовательностью или просто *последовательностью*.

Числа x_i называются *элементами* или членами последовательности, i — *номер* элемента, x_n — *общим членом* последовательности.

Сокращенно последовательность обозначают $\{x_n\}$.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой *формулой общего члена* $x_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n .

Другой способ задания – *рекуррентный*.

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, ... – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, ... – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, ... – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, ... – ряд вида $1/n$, где $n \in \mathbf{N}$.

Последовательность можно рассматривать как функцию с областью определения – множеством натуральных чисел.

Следовательно, последовательность может обладать свойствами функции.

Последовательность $\{x_n\}$ называют
ограниченной сверху, если все ее члены не
больше некоторого числа M .

Последовательность $\{x_n\}$ называют *ограниченной сверху*, если все ее члены не больше некоторого числа M .

Пример:

$-1, -4, -9, -16, \dots, -n^2, \dots$ - ограничена сверху 0 .

Число M называют *верхней границей* последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называют
ограниченной снизу, если все ее члены не
меньше некоторого числа m .

Последовательность $\{x_n\}$ называют *ограниченной снизу*, если все ее члены не меньше некоторого числа m .

Пример:

1, 4, 9, 16, ..., n^2 , ... - ограничена снизу 1.

Число m называют *нижней границей* последовательности.

Если последовательность ограничена и
сверху и снизу, то ее называют *ограниченной*
последовательностью.

Последовательность $\{x_n\}$ называют *возрастающей* последовательностью, если каждый ее член больше предыдущего.

Пример:

1, 3, 5, 7, 9, $2n - 1, \dots$ - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{x_n\}$ называют *убывающей* последовательностью, если каждый ее член меньше предыдущего.

Пример:

1, $1/3$, $1/5$, $1/7$, $1/(2n - 1)$, ... - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют *монотонными*.