Глава 2. Введение в анализ

§1. Функции

Определение.

Пусть каждому вещественному числу x из некоторого числового множества D поставлено в соответствие однозначно определенное вещественное число y. Тогда говорят, что на множестве D задана ***функция*** f, такая, что $f(x) = y$.

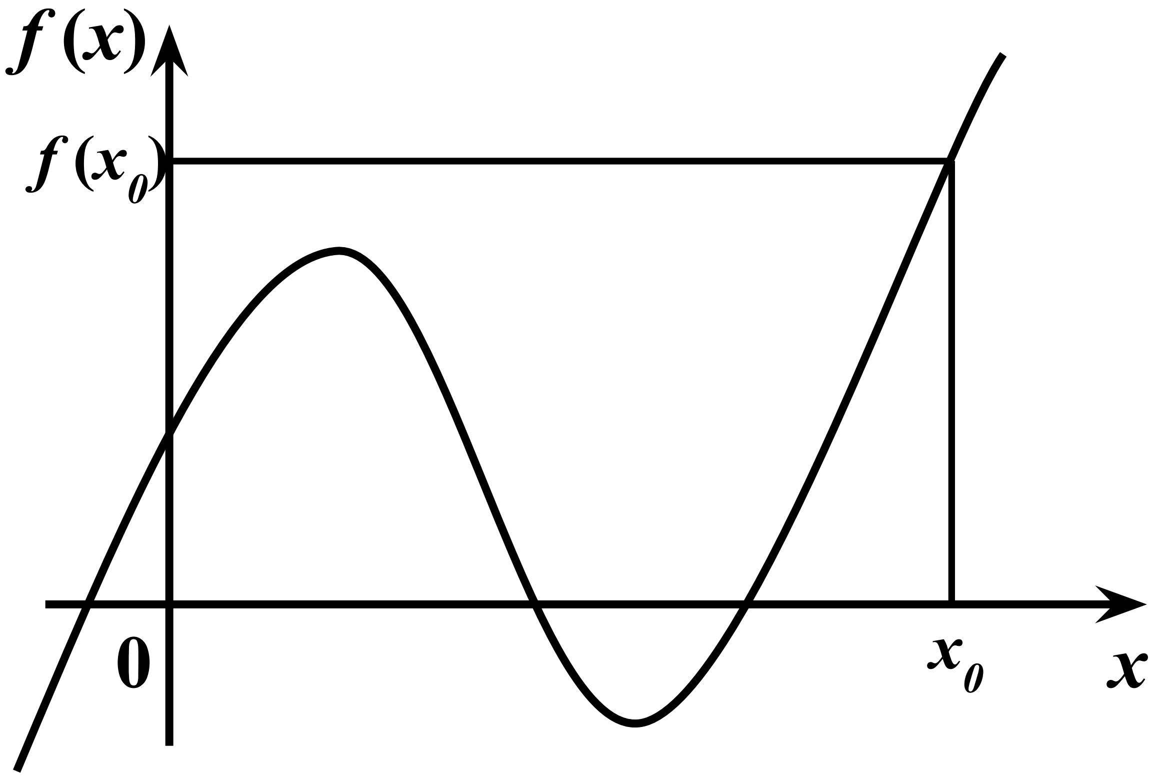
Множество D называется ***областью определения*** функции f, число x — ее ***аргументом***, а число y — ***значением функции*** f в точке x.

Множество

$E = \{y \in R:\ y = f(x),\ x \in D\}$ называется

областью значений функции f.

Графиком функции f называется множество точек плоскости Oxy с координатами $(x, f(x))$, $x \in D$.



Способы задания функций:

Способы задания функций:

1. аналитический

Способы задания функций:

1. аналитический:

   а) с помощью одной формулы, например, $f(x) = 3x + 7$;

Способы задания функций:

1. аналитический:

   а) с помощью одной формулы,
   например, $f(x) = 3x + 7$;

   б) с помощью нескольких формул,
   например, $f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ при } x < 2 \\ 2x - 3 \text{ при } x \geq 2. \end{cases}$;

в) неявно, в виде уравнения вида $F(x, y) = 0$, например, $x^2 + \operatorname{arctg}(xy) - 1 = 0$;

в) неявно, в виде уравнения вида
$F(x, y) = 0$, например,
$x^2 + \operatorname{arctg}(xy) - 1 = 0$;

г) в виде суперпозиции функций:
$F(x) = f\big(u(x)\big)$. Например,
$y = \sin\sqrt{x}$, то есть $y = \sin u$, $u = \sqrt{x}$;
$y = e^{\cos 3x}$, то есть $y = e^{u}$, $u = \cos v$,
$v = 3x$.

Способы задания функций:

2. графический;

Способы задания функций:

2. графический;

3. табличный, в виде

x	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$\cdots$	$f(x_n)$

Способы задания функций:

2. графический;
3. табличный, в виде

x	x_1	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_n)$

4. словесный – функция описывается правилом ее составления.

Основные свойства функций:

Основные свойства функций:

1. Четность и нечетность

Функция $y = f(x)$ – ***четная***, если для любого $x \in X$ выполняется условие $f(-x) = f(x)$.

Основные свойства функций:

1. Четность и нечетность

Функция $y = f(x)$ – ***нечетная***, если для любого $x \in X$ выполняется условие $f(-x) = -f(x)$.

В противном случае, функция называется ***функцией общего вида***.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – относительно начала координат.

Основные свойства функций:

2. Монотонность

Функция $f(x)$ называется ***возрастающей*** на промежутке $[a; b]$, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, таких что $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$. Если $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ строго возрастает.

Основные свойства функций:

2. Монотонность

Функция $f(x)$ называется ***убывающей*** на промежутке $[a; b]$, если для любых x_1, x_2 из этого промежутка, таких что $x_1 < x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$. Если $f(x_1) > f(x_2)$, то функция $f(x)$ строго убывает.

Основные свойства функций:

2. Монотонность

Функции, возрастающие или убывающие называются ***монотонными***.

Основные свойства функций:

3. Ограниченность

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной сверху*** на промежутке $[a; b]$, если существует такое число M, что для любого числа x из этого промежутка справедливо неравенство $f(x) \leq M$.

Основные свойства функций:

3. Ограниченность

Функция $f(x)$ называется ***ограниченной снизу*** на промежутке $[a; b]$, если существует такое число m, что для любого числа x из этого промежутка справедливо неравенство $f(x) \geq m$.

Основные свойства функций:

3. Ограниченность

Функция, ограниченная на $[a, b]$ и сверху, и снизу, называется ***ограниченной*** на $[a, b]$.

Основные свойства функций:

3. Ограниченность

Определение ограниченности функции может быть также записано в следующем виде: Функция называется ***ограниченной*** на промежутке $[a, b]$, если существует число K ($K > 0$), такое что $|f(x)| \le K$ для любого x из $[a, b]$.

Основные свойства функций:

4. Периодичность

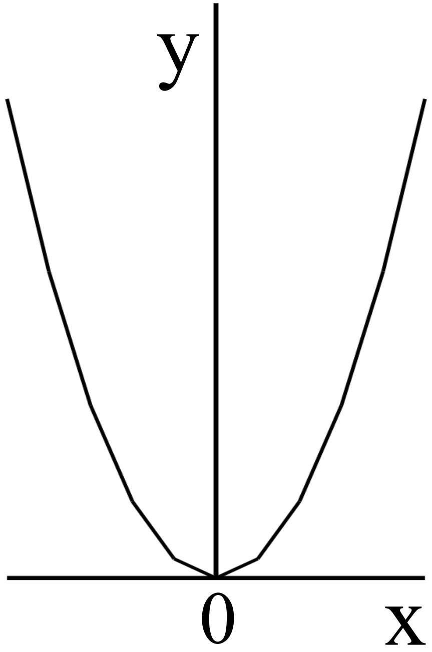
Функция $y = f(x)$, называется ***периодичной*** с периодом $T \neq 0$, если для любого $x \in X$ выполняется условие $f(x + T) = f(x)$.

Основные элементарные функции

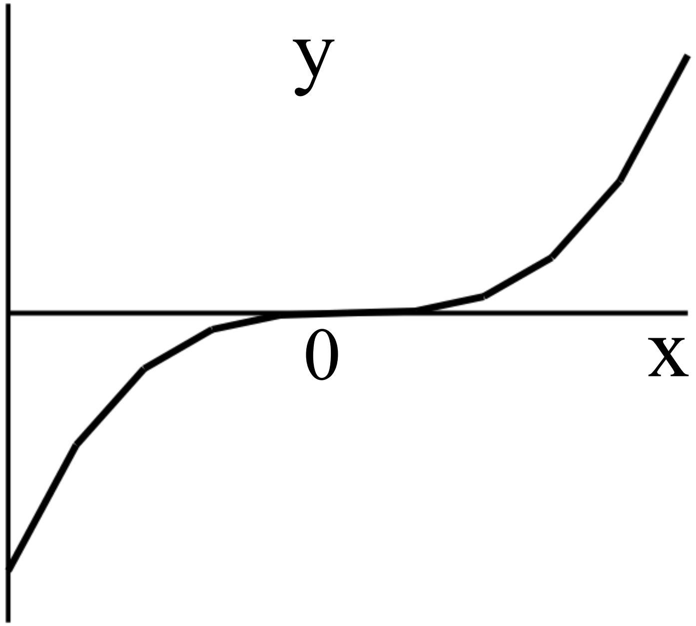
Основные элементарные функции:

- степенная $y = x^n$;

n – четное

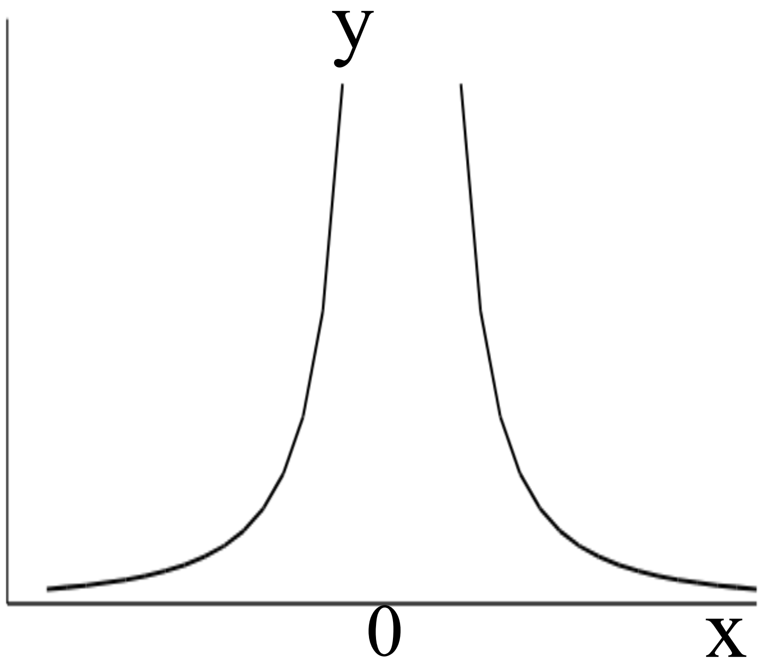


n – нечетное

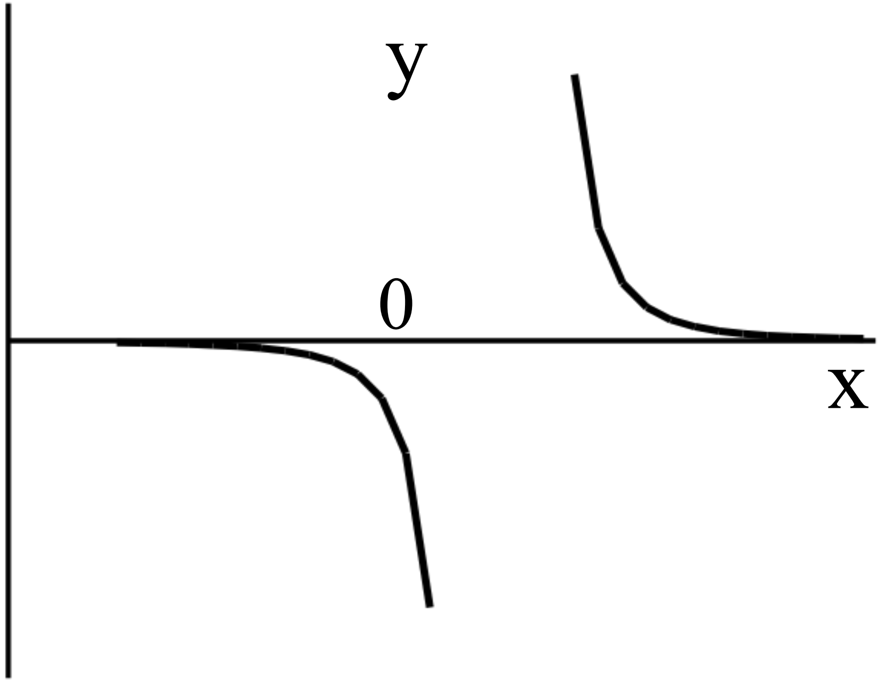


- степенная $y = \frac{1}{x^n}$

n – четное

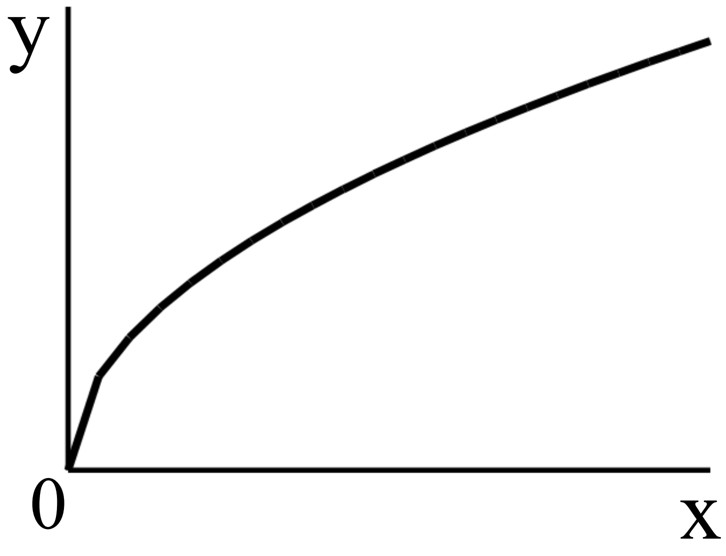


n – нечетное

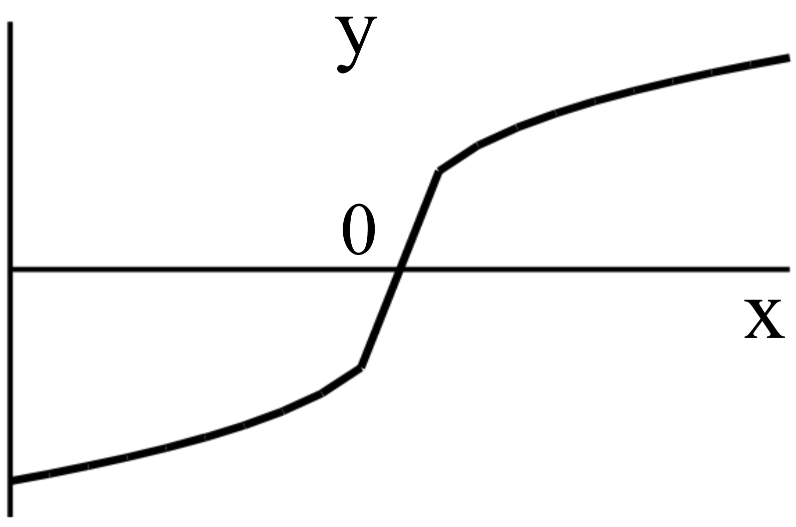


- степенная $y = \sqrt[n]{x}$

n – четное

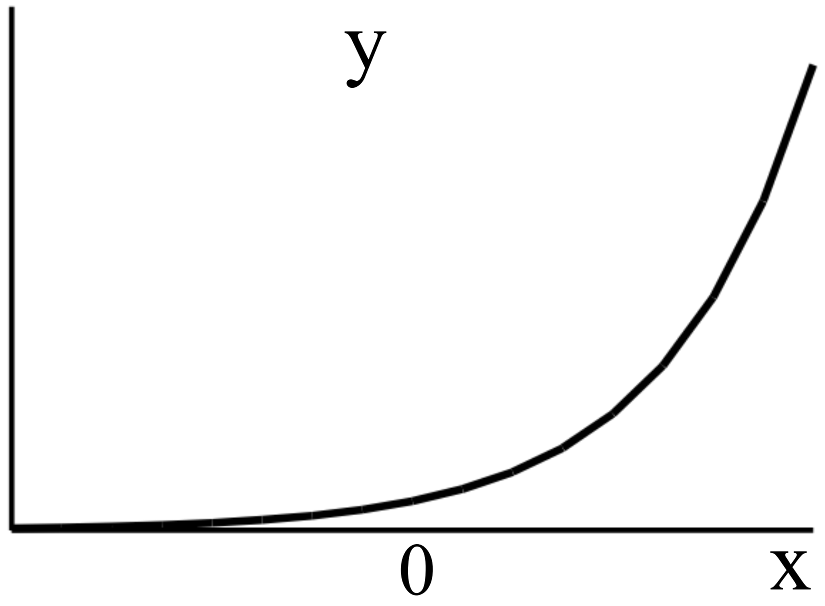


n – нечетное

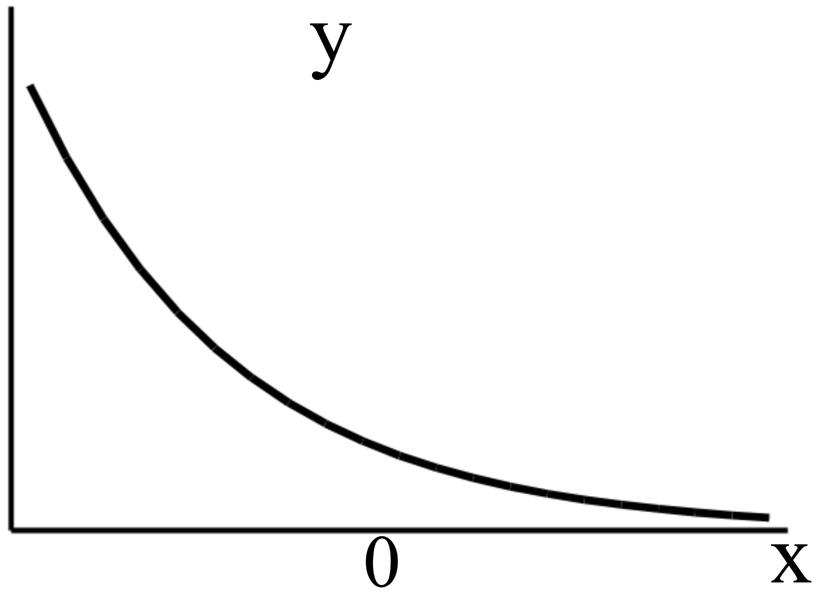


- показательная $y = a^x$;

при $a > 1$

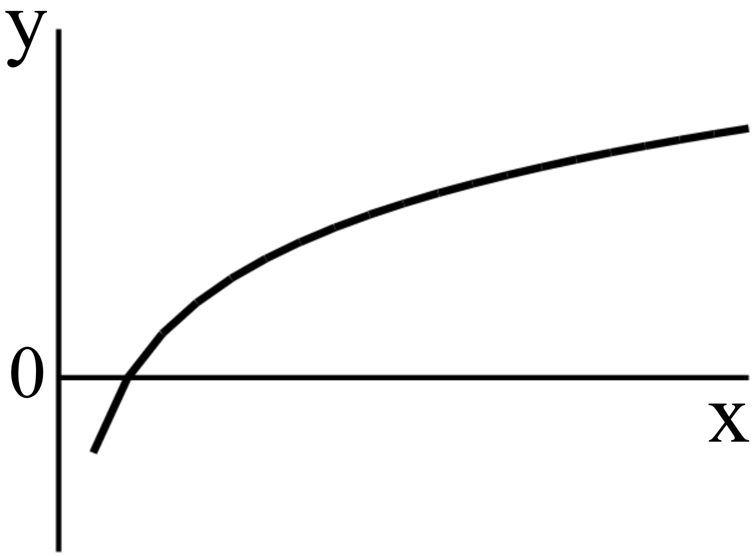


при $0 < a < 1$

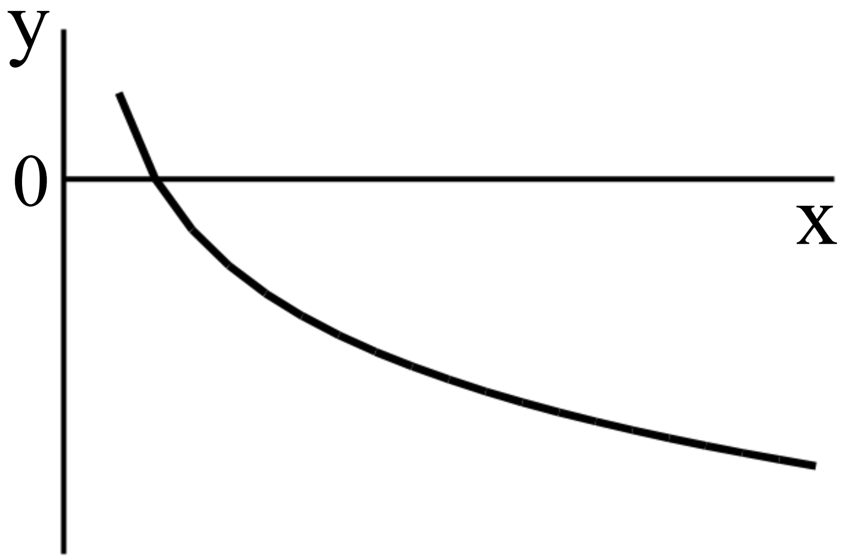


- логарифмическая $y = \log_a x$

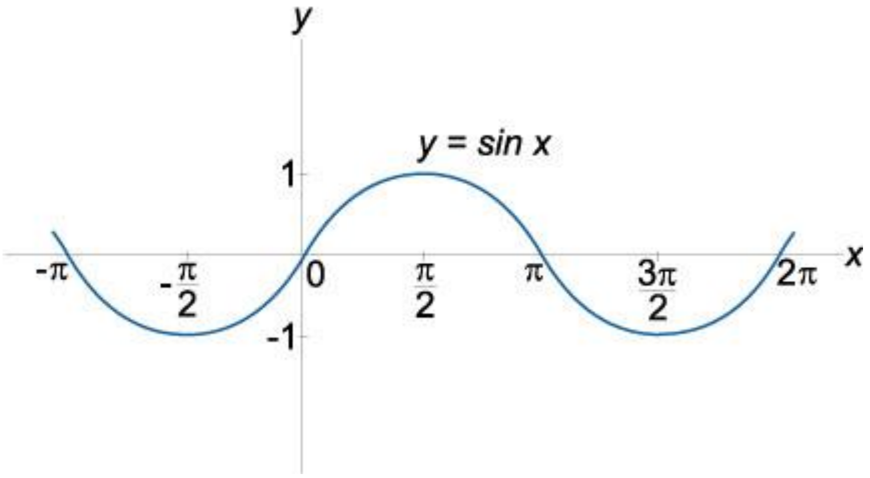
при $a > 1$

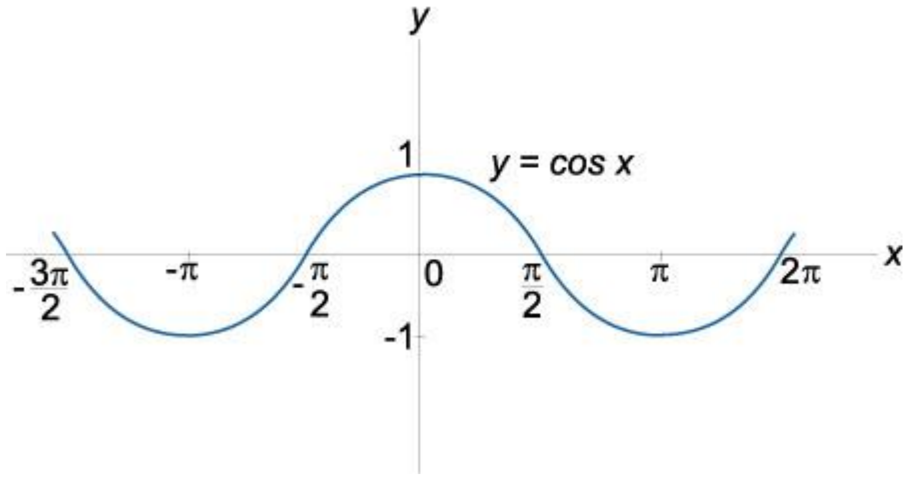


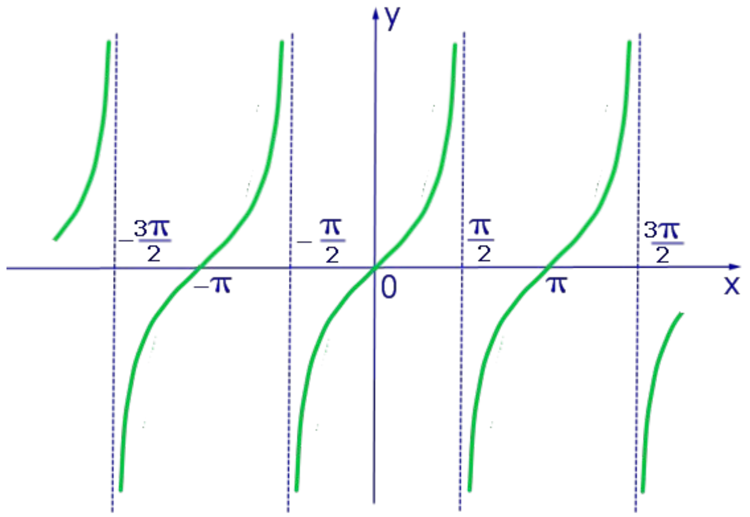
при $0 < a < 1$

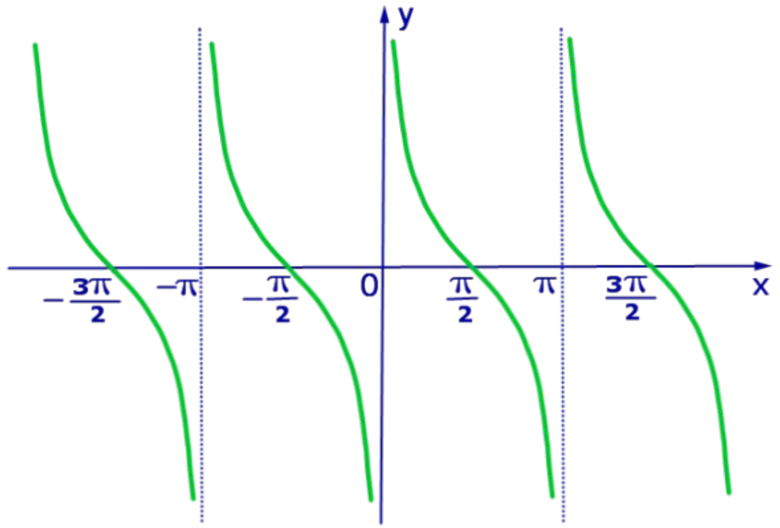


- тригонометрические;

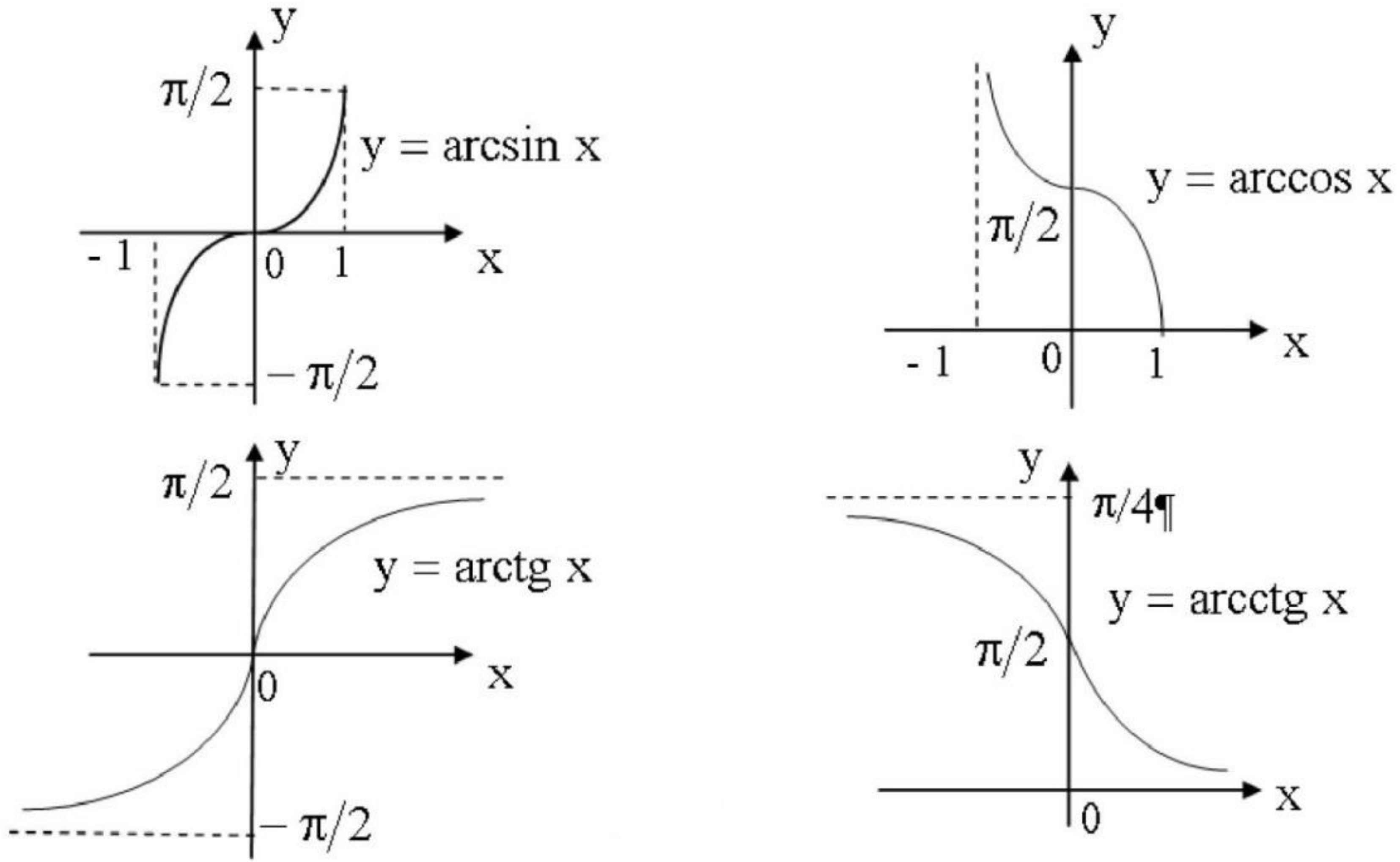








- обратные тригонометрические функции.



Функции, полученные из основных элементарных функций с помощью арифметических действий и суперпозиции, называются ***элементарными.***

§2. Последовательности

Определение.

Если каждому числу $n \in \mathbf{N}$ поставлено в соответствие вещественное число x_n, то образовавшееся таким образом множество чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется числовой последовательностью или просто ***последовательностью.***

Числа x_i называются ***элементами*** или членами последовательности, i – ***номер*** элемента, x_n – ***общим членом*** последовательности.

Сокращенно последовательность обозначают $\{x_n\}$.

Обычно числовая последовательность задаётся некоторой ***формулой общего члена*** $x_n = f(n)$, позволяющей найти любой член последовательности по его номеру n.

Другой способ задания – ***рекуррентный***.

Примеры числовых последовательностей

1, 2, 3, 4, 5, … – ряд натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, … – ряд чётных чисел;

1, 4, 9, 16, 25, … – ряд квадратов натуральных чисел;

5, 10, 15, 20, … – ряд натуральных чисел, кратных 5;

1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5,... – ряд вида 1/n, где n ϵ **N**.

Последовательность можно рассматривать как функцию с областью определения – множеством натуральных чисел.

Следовательно, последовательность может обладать свойствами функции.

Последовательность $\{x_n\}$ называют ***ограниченной сверху***, если все ее члены не больше некоторого числа M.

Последовательность $\{x_n\}$ называют ***ограниченной сверху***, если все ее члены не больше некоторого числа М.

Пример:

$-1, -4, -9, -16, \ldots, -n^2, \ldots$ - ограничена сверху 0.

Число М называют ***верхней границей*** последовательности.

Последовательность $\{x_n\}$ называют ***ограниченной снизу***, если все ее члены не меньше некоторого числа m.

Последовательность $\{x_n\}$ называют ***ограниченной снизу***, если все ее члены не меньше некоторого числа m.

Пример:

$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$ - ограничена снизу 1.

Число m называют ***нижней границей*** последовательности.

Если последовательность ограничена и сверху и снизу, то ее называют ***ограниченной*** последовательностью.

Последовательность $\{x_n\}$ называют ***возрастающей*** последовательностью, если каждый ее член больше предыдущего.

Пример:

1, 3, 5, 7, 9, $2n - 1$, … - возрастающая последовательность.

Последовательность $\{x_n\}$ называют ***убывающей*** последовательностью, если каждый ее член меньше предыдущего.

Пример:

1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/(2п – 1), … - убывающая последовательность.

Возрастающие и убывающие последовательности называют ***монотонными.***