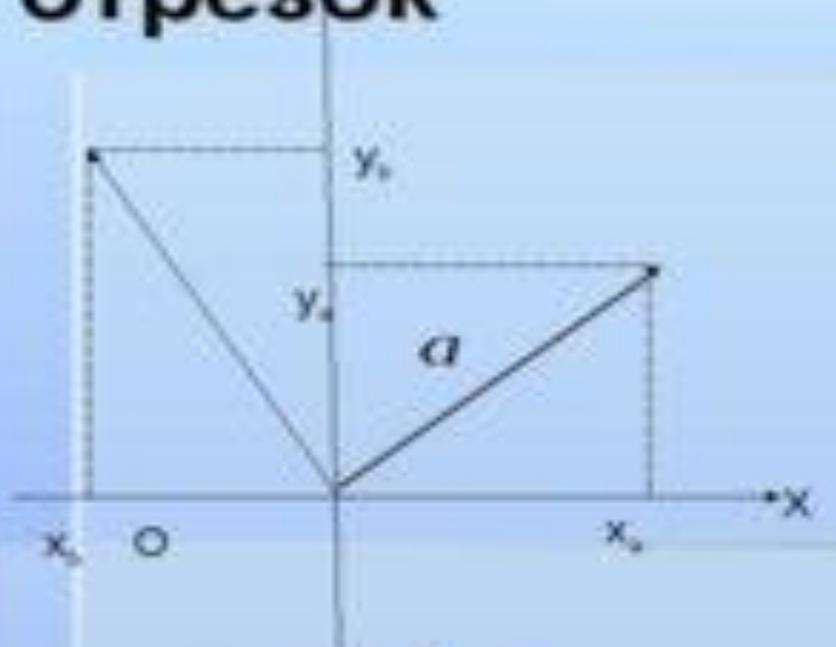


# СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

# Вектор – направленный отрезок



$$\vec{a}(x_a, y_a)$$

$$\vec{b}(x_b, y_b)$$

$a$  и  $b$

- Координаты вектора с концами в точках  $A(x_A, y_A)$  и  $B(x_B, y_B)$  :

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

- Длина вектора  $a(x, y)$ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Координаты суммы векторов  $a(x_A, y_A)$  и  $b(x_B, y_B)$  :

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_B + x_A, y_B + y_A)$$

- Координаты произведения вектора  $a(x, y)$  на число  $\lambda$ :

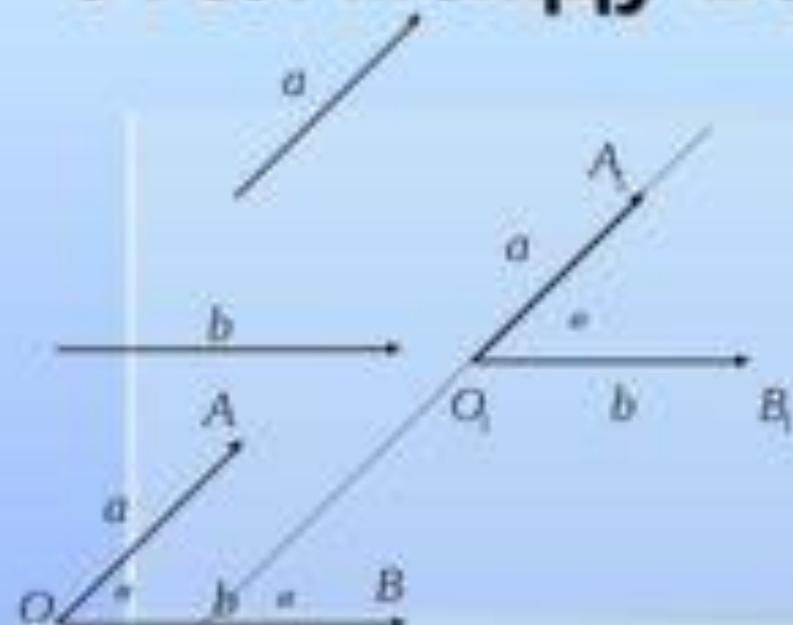
$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

## Диктант

Даны точки  $A(2; -3)$ ,  $B(-1; 2)$ ,  $C(0; -4)$

1. Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$   $\overrightarrow{AB} = (-3, 5)$
2. Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{BC}$   $\overrightarrow{BC} = (1, -6)$
3. Найдите длину вектора  $\overrightarrow{AB}$   $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{34}$
4. Найдите длину вектора  $\overrightarrow{BC}$   $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-6)^2} = \sqrt{37}$
5. Произведение  $5 \cdot \overrightarrow{AB}$ :  $5 \cdot \overrightarrow{AB} = (-15, 25)$

# Угол между векторами



$a \text{ и } b$

$O; \vec{OA} = \vec{a}; \vec{OB} = \vec{b}$

$\angle AOB = \alpha$

$\alpha$  - Угол между векторами

$a \text{ и } b$

$\vec{a}; \vec{b} = \alpha$

Если  $a \perp b; a = 0$  или  $b = 0; a = 0, b = 0$

то  $\alpha = 0^\circ$

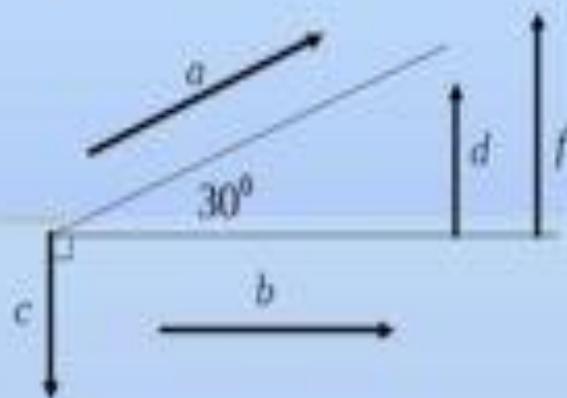
$0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$

## Пример

$$\vec{a}; \vec{b} = 30^\circ; \quad \vec{a}; \vec{c} = 120^\circ$$

$$\vec{b}; \vec{c} = 90^\circ; \quad \vec{d}; \vec{f} = 0^\circ \quad \vec{d}; \vec{c} = 180^\circ$$

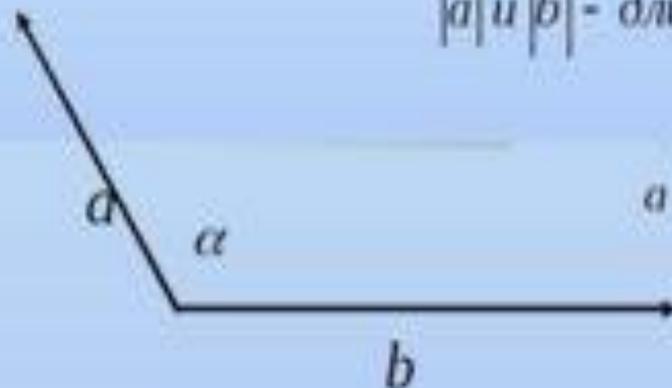
$$\vec{a} \perp \vec{b}, \text{ если } \alpha = 90^\circ$$



**Скалярным произведением векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними**

*$a \cdot b$  - скалярное произведение векторов*

*$|a|$  и  $|b|$  - длины векторов*



$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos(\alpha)$$

## Примеры:

$$1. \quad |\vec{a}| = 2 \quad |\vec{b}| = 3 \quad \alpha = 60^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 \cdot \cos(60^\circ) = 3$$

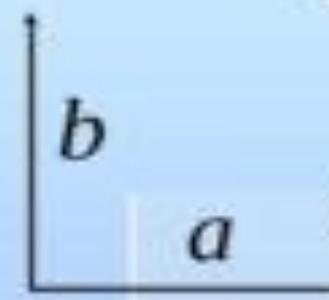
$$2. \quad |\vec{a}| = 5 \quad |\vec{b}| = 1 \quad \alpha = 30^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 1 \cdot \cos(30^\circ) = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$3. \quad |\vec{a}| = 7 \quad |\vec{b}| = 4 \quad \alpha = 45^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 4 \cdot \cos(45^\circ) = 14 \cdot \sqrt{2}$$

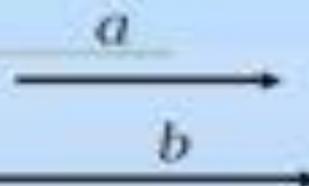
$$4. \quad |\vec{a}| = 1 \quad |\vec{b}| = 1 \quad \alpha = 120^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$5. \quad |\vec{a}| = 7 \quad |\vec{b}| = 5 \quad \alpha = 90^\circ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 5 \cdot \cos(90^\circ) = 0$$

## Свойства скалярного произведения:



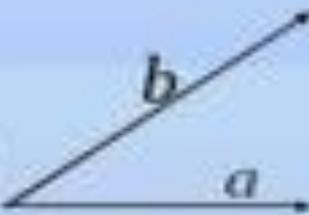
$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a \perp b$



$\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 0^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$

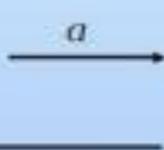


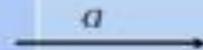
$(\vec{a}, \vec{b}) > 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} < 0$



$(\vec{a}, \vec{b}) < 90^\circ \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

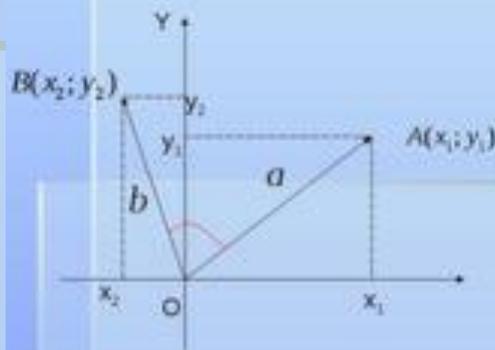
## Свойства скалярного произведения:

$$a \perp b \quad a \cdot b = |a| |b| \cos 180^\circ = -|a| |b|$$


$$a \cdot a = a^2 - \text{скалярный квадрат вектора}$$
$$a^2 = a \cdot a = |a| |a| \cos 0^\circ = |a|^2$$


**Скалярным произведением векторов  $\vec{a}(x_1; y_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2)$  называется число**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$



## Примеры: скалярное произведение векторов

$$1. \vec{a}(5, -4) \text{ и } \vec{b}(2, 1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 = 6$$

$$2. \vec{a}(0, 3) \text{ и } \vec{b}(7, -1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot 7 + 3 \cdot (-1) = -3$$

$$3. \vec{a}(5, 2) \text{ и } \vec{b}(4, -1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) = 18$$

## Вычислите скалярное произведение векторов:

$$1. \quad \vec{a}(1,1); \vec{b}(1,2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$$

$$2. \quad \vec{a}(-2,5); \vec{b}(-9,-2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot (-9) + 5 \cdot (-2) = 8$$

$$3. \quad \vec{a}(-3,4); \vec{b}(4,5) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 8$$

$$4. \quad \vec{a}(5,2); \vec{b}(-9,4) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot (-9) + 2 \cdot 4 = -37$$

$$5. \quad \vec{a}(-1,1); \vec{b}(1,1) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$$

## Следствия

Следствие 1:  $a \neq 0$  и  $b \neq 0$ , то  $a \perp b \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

Следствие 2:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Пример. Даны 2 вектора:

$$\vec{a}(1,3) \quad \vec{b}(5,2)$$

1. Вычислите скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 11$$

2. Вычислите длину вектора  $a$ :

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

3. Вычислите длину вектора  $b$ :

$$|\vec{b}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

4. Вычислите косинус угла между векторами:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{11}{(\sqrt{10} \cdot \sqrt{29})} = \frac{11}{\sqrt{290}}$$

5. Сделайте вывод: **тупой**, **прямой** или **острый** угол мы получили

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) > 0 \Rightarrow \text{угол острый}$$

## Вычисление угла между векторами с координатами:

$$a (a_1, a_2), b (b_1, b_2)$$

1. Вычислить скалярное произведение векторов:

$$a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

2. Вычислить длину вектора  $a$ :

$$|a| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$$

3. Вычислить длину вектора  $b$ :

$$|b| = \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2}$$

4. Найти произведение длин векторов:

$$|a| \cdot |b|$$

5. Разделить скалярное произведение векторов на произведение их длин:

$$\cos(a, b) = \frac{(a \cdot b)}{(|a| \cdot |b|)}$$

# Домашнее задание:

- §§1.6.1 стр.52-53,
- вопросы №№ 1-4,
- задачи №№ 1.129(1), 1.135(2)
- Записать все формулы и примеры из презентации.