Эйлеровы и гамильтоновы графы

Преподаватель: Солодухин Андрей Геннадьевич

План занятия

- 1. Эйлеров цикл и эйлеров граф: определения
- 2. Гамильтоновы графы
- 3. Алгоритмы поиска эйлеровых циклов

ПОВТОРЕНИЕ: МАРШРУТЫ, ЦЕПИ, ЦИКЛЫ

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершиной

Маршрут в котором все ребра различны, называется **цепью**

Цепь называется **простой**, если и все вершины в ней различны

Путь – это … ориентированная цепь, в которой дуги имеют одинаковое направление

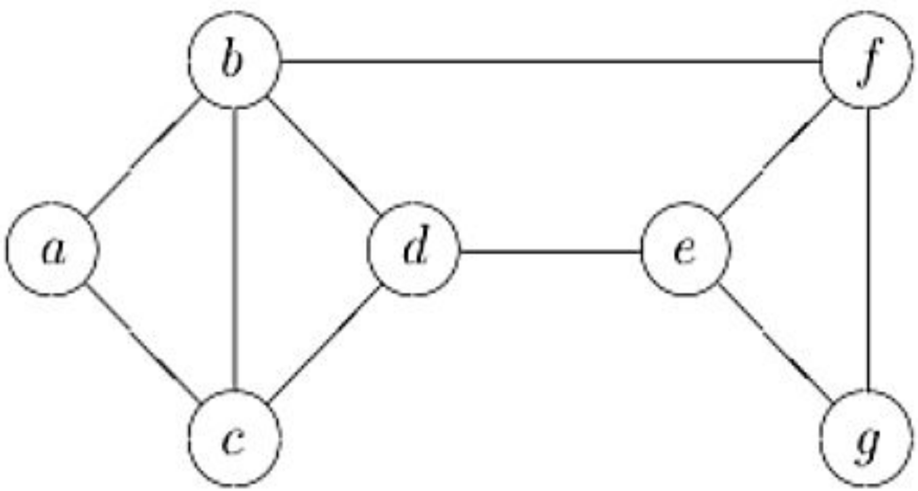
Две вершины v_i и v_j называются **связными**, если существует маршрут с концами v_i и v_j.
Граф называется **связным**, если для **любой пары различных вершин** существует соединяющий их маршрут.

Длиной маршрута называют число ребер в нем, причем каждое ребро считается столько раз, сколько раз оно считается в маршруте.

Орграф называется **односторонне связным**, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует, по крайней мере, **один путь** из x_i в x_j или из x_j в x_i или оба одновременно.
Орграф называют **слабо связным**, если для любых двух различных вершин графа существует, по крайней мере, один маршрут (неориентированный двойник пути), соединяющий их.

Вопросы

1. Что такое маршрут? В чем измеряется длина маршрута?
2. Что такое цепь? Простая цепь?
3. Что такое путь? Чем он отличается от цепи?
4. Что такое цикл? Простой цикл?
5. Какой граф называется связным?
6. Какая вершина называется точкой сочленения?
7. Какое ребро (дуга) называется мостом (перешейком)?



abdbc
abdcb
abcde
abdbca
abfedbca
abca

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Эйлеровым путем графа называется путь, содержащий все ребра графа ровно один раз

Эйлеровым циклом называется цикл, содержащий все рѐбра графа и притом по одному разу.

Граф, обладающий эйлеровым циклом, называется **эйлеровым графом**.

Задача китайского почтальона

Почтальон должен разнести почту по вверенному ему району, для чего он проходит по всем без исключения улицам района и возвращается в исходную точку (на почту). Требуется найти кратчайший маршрут почтальона.

На языке теории графов задача состоит в том, чтобы определить, имеется лив графе путь, проходящий через все его ребра (напомним, что путь, по определению, не может дважды проходить по одному ребру). Такой путь называется эйлеровым путем, а если он замкнут, то эйлеровым циклом. В графе, изображенном на рис. 1, эйлеров цикл существует -например, последовательность вершин 1,2,4,5,2,3,5,6,3,1 образует такой цикл. В графе же на рис. 2 эйлерова цикла нет, но есть эйлеровы пути, например, 2, 4, 5, 2, 1, 3, 5, 6, 3.

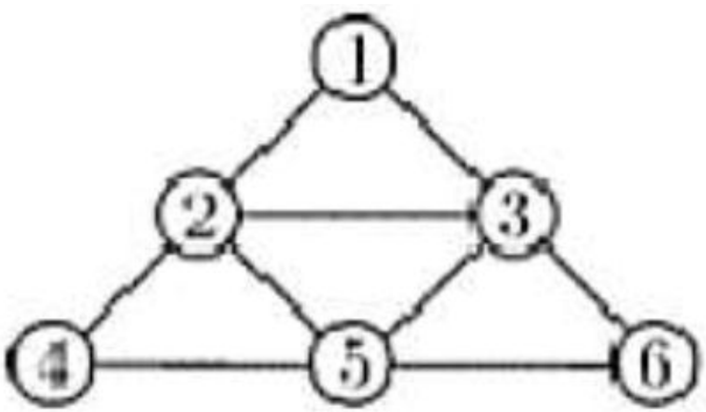


рис. 1

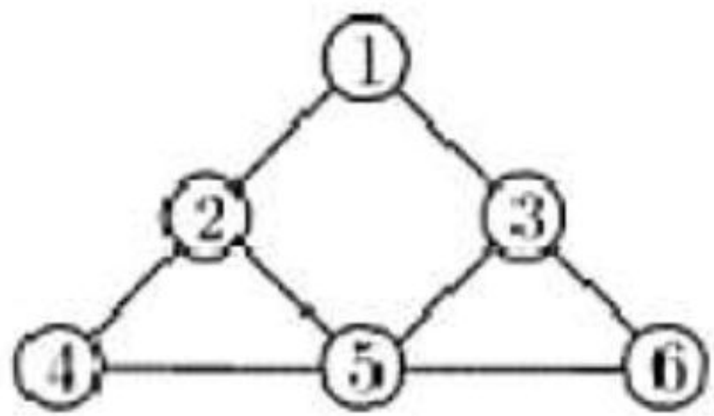
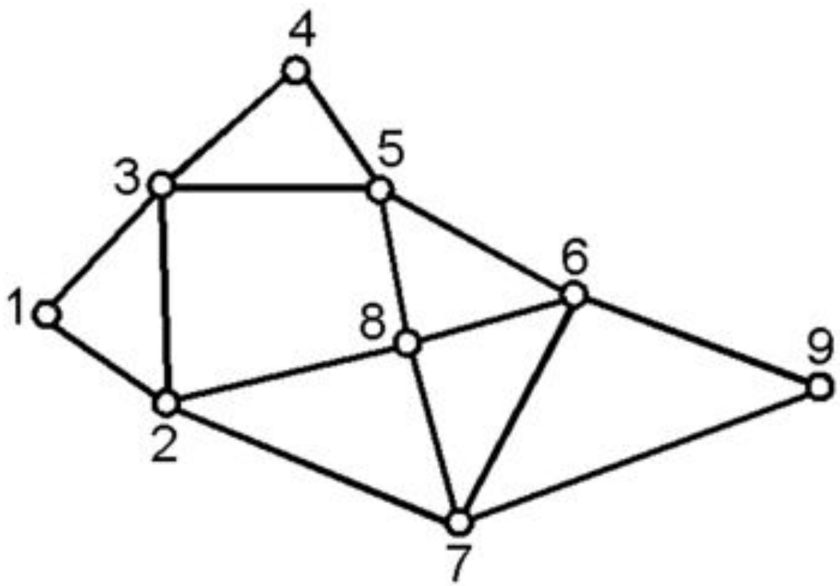
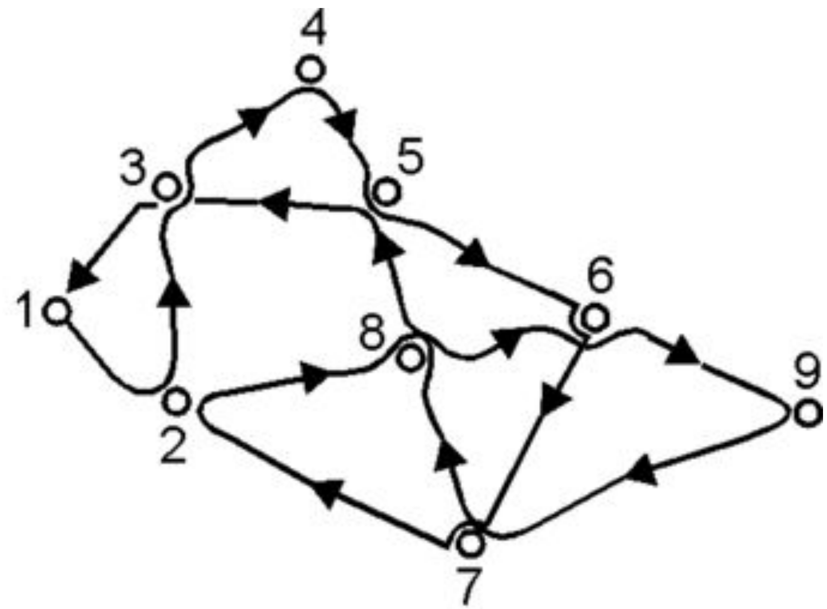


рис. 2



Эйлеров граф

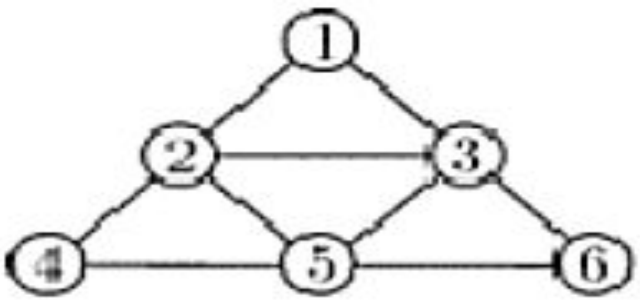


Эйлеров цикл

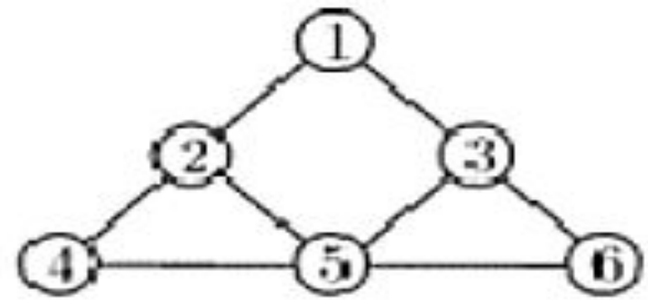
Связный граф эйлеров тогда и только тогда, когда в нем **степени всех вершин четны**

В **ориентированном** графе эйлеров цикл – это **ориентированный** цикл, проходящий через все ребра

ЭЙЛЕРОВЫ ЦИКЛЫ



1,2,4,5,2,3,5,6,3,1
эйлеров цикл

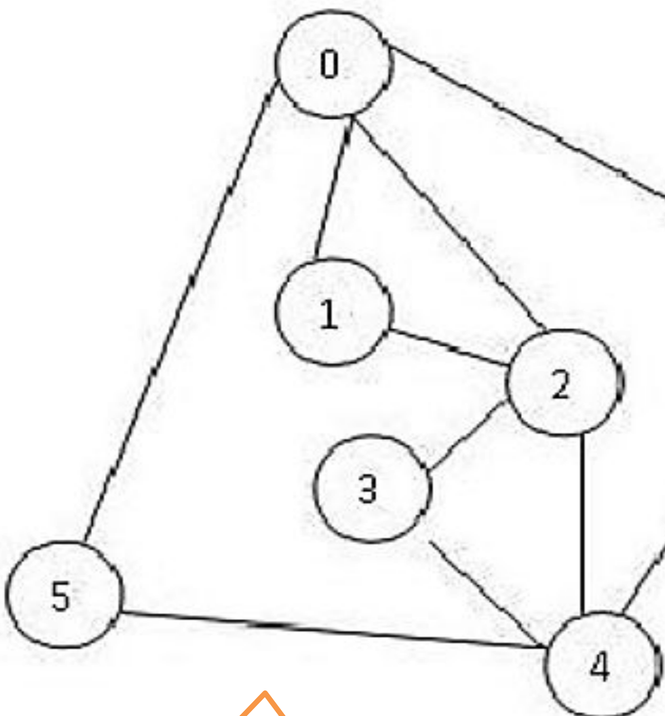


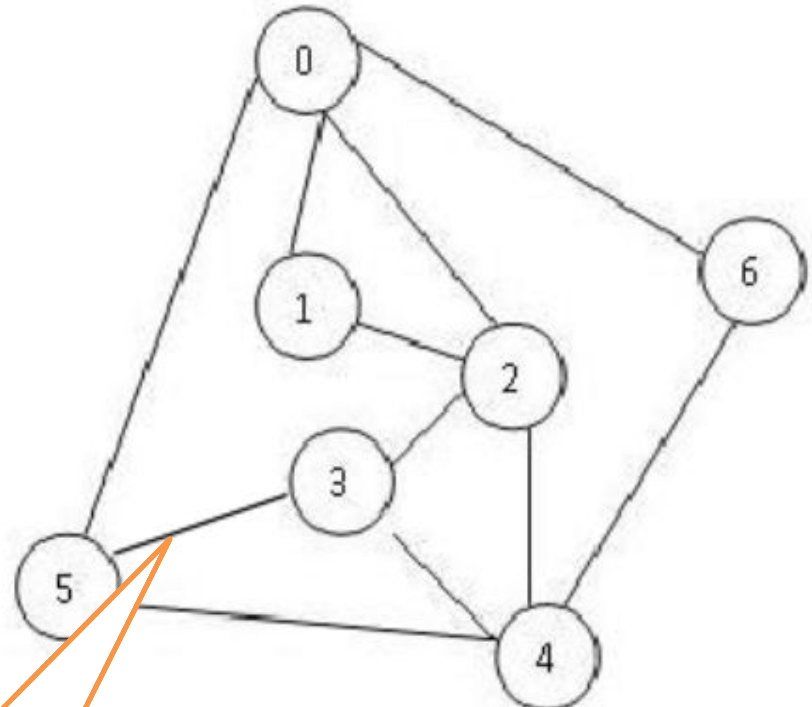
2, 4, 5, 2, 1, 3, 5, 6, 3
эйлеров путь, цикла нет

Если граф G(V,E) обладает эйлеровым циклом, то он связный и все его вершины четные

Если граф G(V,E) связный и все его вершины четные, то он обладает эйлеровым циклом

Эйлеров путь в связном графе существует тогда и только тогда, когда в нем имеется **не более двух вершин нечетной степени**



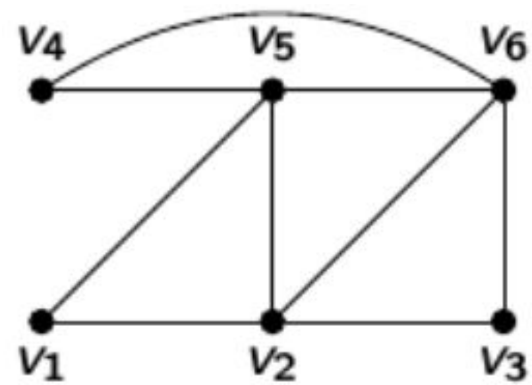


0 – 1 – 2 – 0 – 6 – 4 – 2 – 3 – 4 – 5 – 0

добавлено ребро 3-5

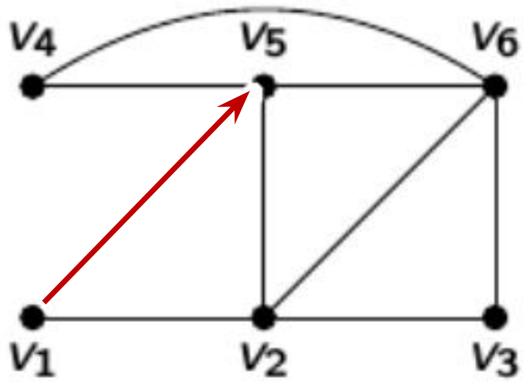
3 – 2 – 4- 3 – 5 – 4 – 6 – 0 – 2 – 1 – 0 – 5

АЛГОРИТМ ПОИСКА ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА



1 Выбрать произвольную вершину
2 Выбрать произвольное ребро *е,* инцидентное текущей вершине.
3 Назначить текущей вторую вершину, инцидентную ***е***.
4 Удалить ***е*** из текущего графа и внести в список.
5 Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2
Ограничение: если степень текущей вершины больше 1, нельзя выбирать ребро, удаление которого из текущего графа увеличит число компонент связности в нем.

АЛГОРИТМ ПОИСКА ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА

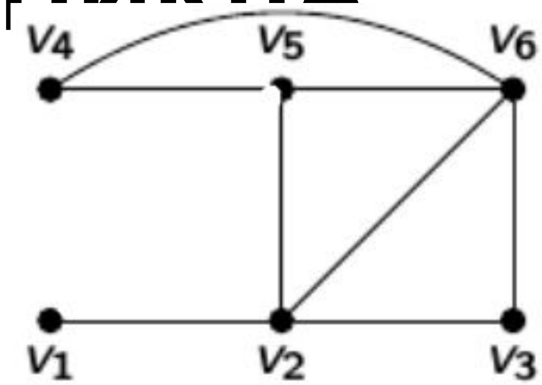


1 Выберем произвольную вершину ***v_1***
2 Выберем произвольное ребро *e*$\{v_1,v_5\}$, инцидентное текущей вершине.
3 Назначим текущей вторую вершину, инцидентную ***e*** – вершину v_5.

v_1-

1 Выбрать произвольную вершину
2 Выбрать произвольное ребро е, инцидентное текущей вершине.
3 Назначить текущей вторую вершину, инцидентную е.
4 Удалить **е** из текущего графа и внести в список.
5 Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2

АЛГОРИТМ ПОИСКА ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА



4 Удалим из текущего графа ребро **e {v$_1$,v$_5$}** и внесем в список.

5 Так как в текущем графе еще остались ребра, возвращаемся на шаг 2

v$_1$-v$_5$-

1 Выбрать произвольную вершину

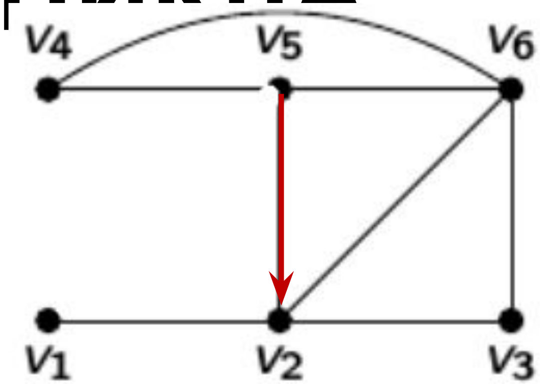
2 Выбрать произвольное ребро *e*, инцидентное текущей вершине.

3 Назначить текущей вторую вершину, инцидентную *e*.

***4* Удалить *e* из текущего графа и внести в список.**

***5* Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2**

АЛГОРИТМ ПОИСКА ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА

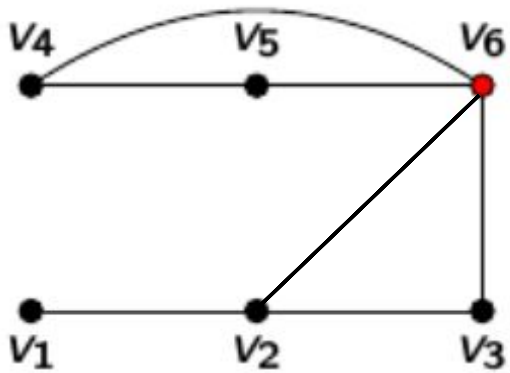


1 Текущая вершина – v_5
2 Выберем произвольное ребро $e\{v_5, v_2\}$, инцидентное текущей вершине.
3 Назначим текущей вторую вершину, инцидентную ***e*** – вершину v_2.

v_1-v_5-

1 **Выбрать произвольную вершину**
2 **Выбрать произвольное ребро *е*, инцидентное текущей вершине.**
3 **Назначить текущей вторую вершину, инцидентную *е*.**
4 Удалить *е* из текущего графа и внести в список.
5 Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2

АЛГОРИТМ ПОИСКА ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА

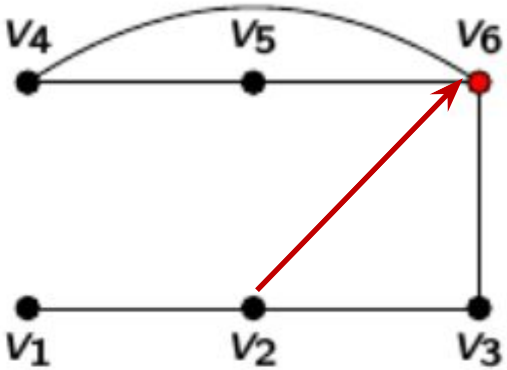


4 Удалим из текущего графа ребро **e {v_5,v_2}** и внесем в список.
5 Так как в текущем графе еще остались ребра, возвращаемся на шаг 2

v_1-v_5-v_2-

1 Выбрать произвольную вершину
2 Выбрать произвольное ребро *e*, инцидентное текущей вершине.
3 Назначить текущей вторую вершину, инцидентную *e*.
***4* Удалить *e* из текущего графа и внести в список.**
***5* Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2**

АЛГОРИТМ ПОИСКА ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА



1 Текущая вершина – ***v_2***

2 Выберем произвольное ребро *e*{v_2,v_6}, инцидентное текущей вершине.

3 Назначим текущей вторую вершину, инцидентную ***e*** – вершину v_6.

v_1-v_5-v_2-

***1* Выбрать произвольную вершину**

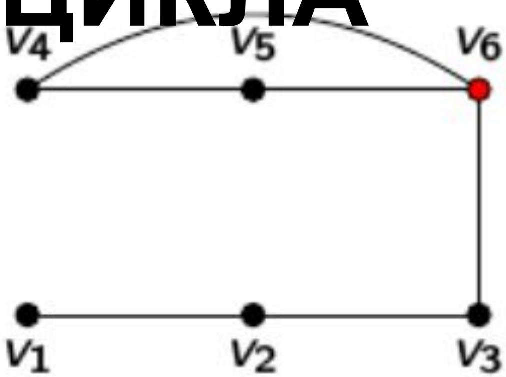
***2* Выбрать произвольное ребро e, инцидентное текущей вершине.**

***3* Назначить текущей вторую вершину, инцидентную *e*.**

4 Удалить *e* из текущего графа и внести в список.

5 Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2

АЛГОРИТМ ПОИСКА ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА

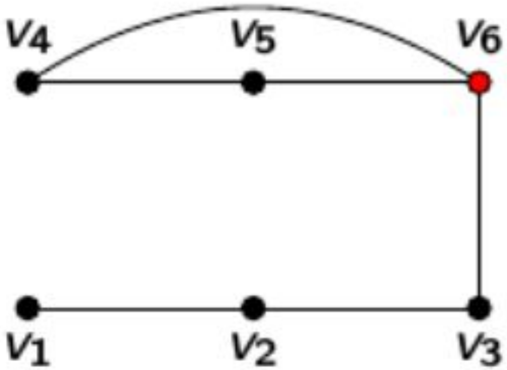


4 Удалим из текущего графа ребро **e** **$\{v_2,v_6\}$** и внесем в список.
5 Так как в текущем графе еще остались ребра, возвращаемся на шаг 2

v_1-v_5-v_2-v_6-

1 Выбрать произвольную вершину
2 Выбрать произвольное ребро *e*, инцидентное текущей вершине.
3 Назначить текущей вторую вершину, инцидентную *e*.
***4* Удалить *e* из текущего графа и внести в список.**
***5* Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2**

АЛГОРИТМ ПОИСКА ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА



1 Текущая вершина – ***v_6***

2 Выберем ребро *e*{v_6,v_4}, инцидентное текущей вершине. **РЕБРО {v_6,v_3} ВЫБИРАТЬ НЕЛЬЗЯ**!

3 Назначим текущей вторую вершину, инцидентную ***e*** – вершину v_4.

v_1-v_5-v_2-v_6-

***1* Выбрать произвольную вершину**

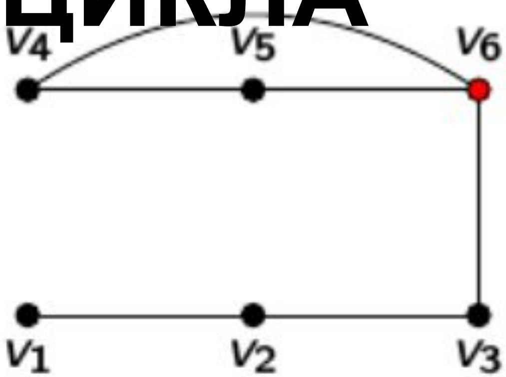
***2* Выбрать произвольное ребро *e*, инцидентное текущей вершине.**

***3* Назначить текущей вторую вершину, инцидентную *e*.**

4 Удалить *e* из текущего графа и внести в список.

5 Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2

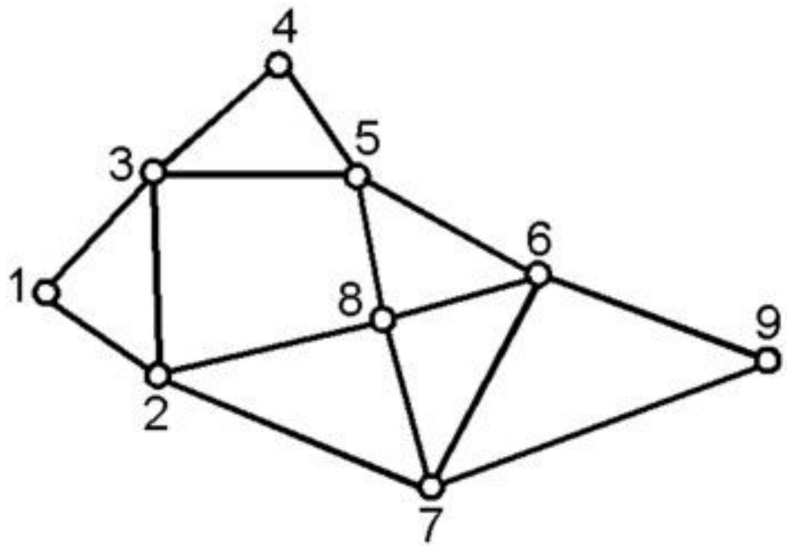
АЛГОРИТМ ПОИСКА ЭЙЛЕРОВА ЦИКЛА

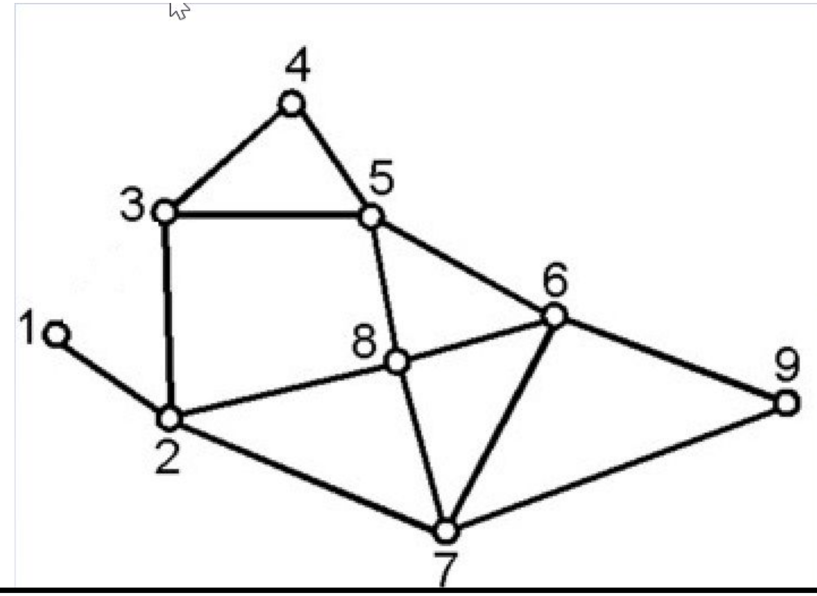


4 Удалим из текущего графа ребро **e {v_6,v_4}** и внесем в список.
5 Так как в текущем графе еще остались ребра, возвращаемся на шаг 2
… И ТАК ДАЛЕЕ

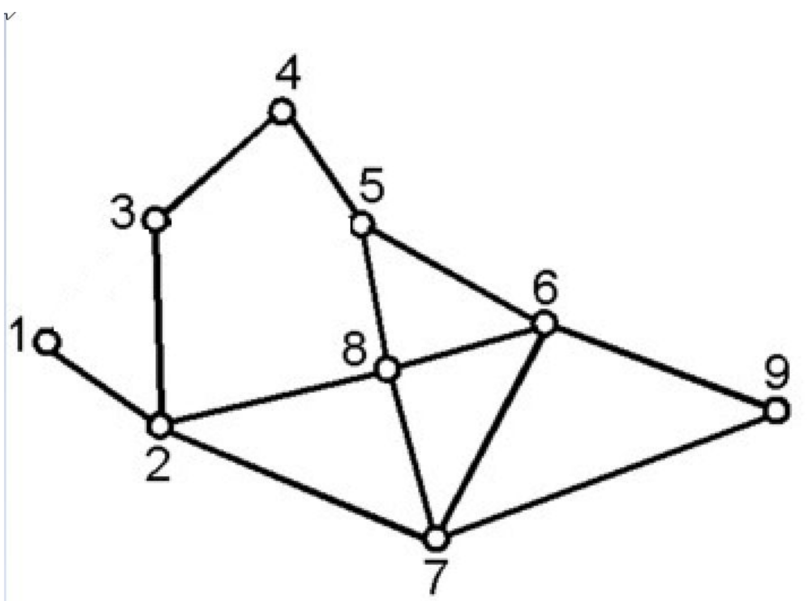
v_1-v_5-v_2-v_6- v_4- v_5- v_6- v_3- v_2- v_1

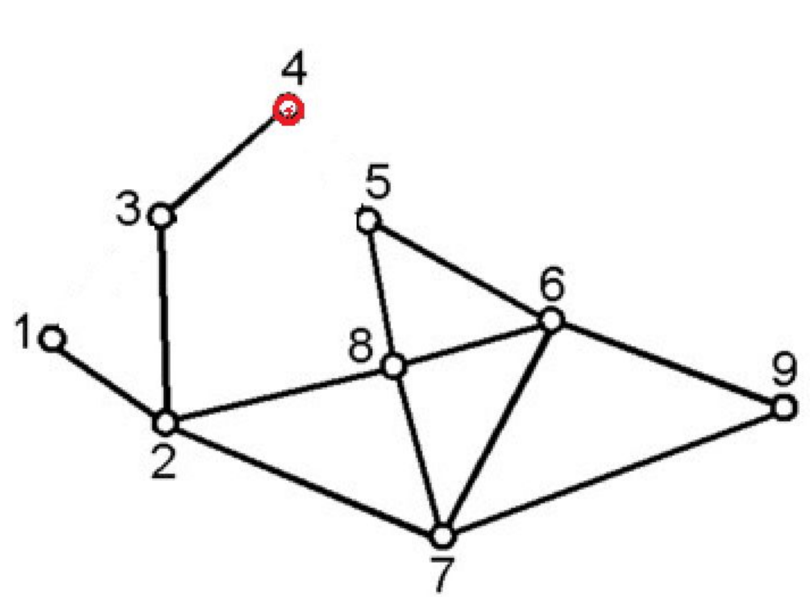
1 Выбрать произвольную вершину
2 Выбрать произвольное ребро *e*, инцидентное текущей вершине.
3 Назначить текущей вторую вершину, инцидентную *e*.
***4* Удалить *e* из текущего графа и внести в список.**
***5* Если в текущем графе еще остались ребра, вернуться на шаг 2**





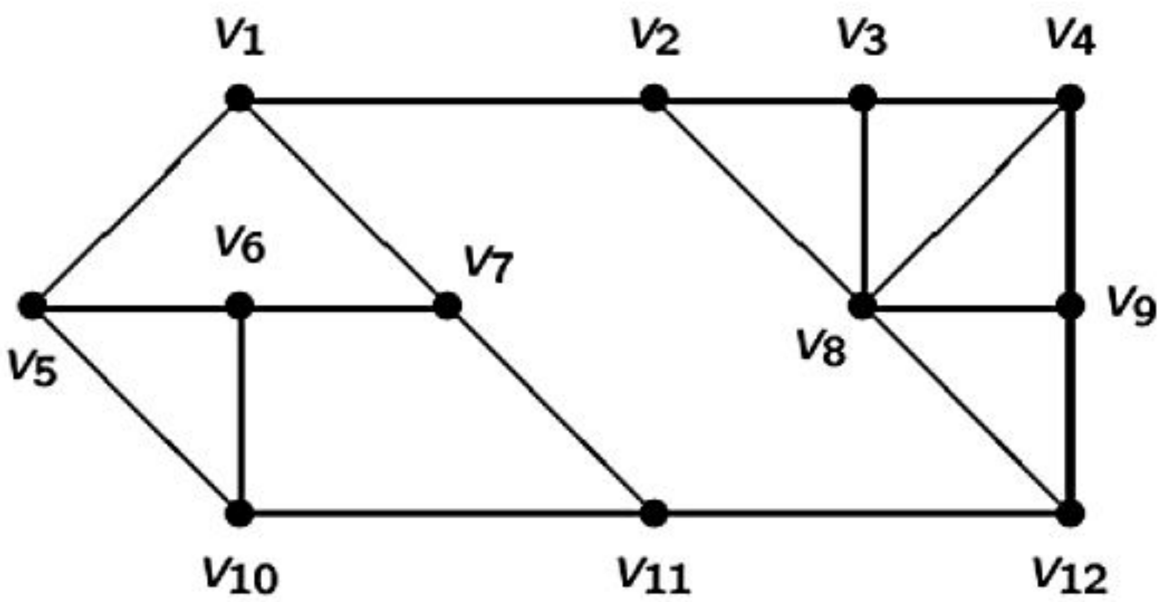
$v_1 - v_3 - V_5 - V_4 - V_3 - V_8 - V_5 - V_6 - V_9 - V_7 - \dots$

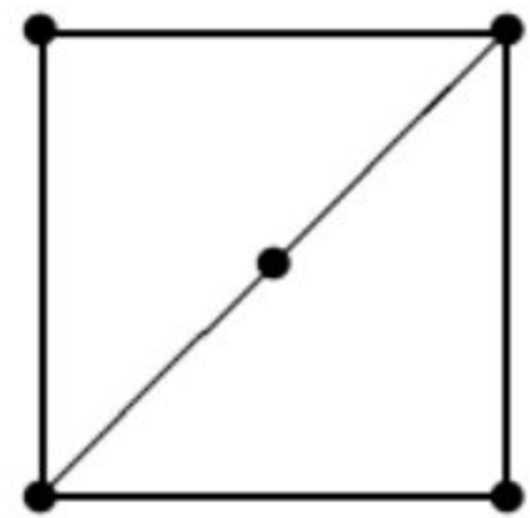




ГАМИЛЬТОНОВЫ ЦИКЛЫ

Гамильтоновым циклом (путем) называют простой цикл (путь), содержащий **все вершины** графа





v1→v2→v3→v8→v4→v9→v12→v11→v7→v6→v10→v5→v1

Задача коммивояжера:
Дан список городов, соединенных дорогами, длины которых известны. Коммивояжер должен объехать все города, побывав в каждом по одному разу, и вернуться в свой город. Требуется найти кратчайший маршрут коммивояжера.

Задача коммивояжера разрешима тогда и только тогда, когда граф этой задачи гамильтонов.

Имеется чертеж печатной платы, в которой необходимо просверлить отверстия для последующей пайки деталей. Для станка с программным управлением требуется найти кратчайший маршрут движения головки со сверлом, чтобы общая длина передвижений головки была наименьшей

СРАВНЕНИЕ ЗАДАЧ ОБ ЭЙЛЕРОВЫХ И ГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦИКЛАХ

Для решения вопроса о существовании эйлерова цикла в графе достаточно выяснить, все ли его вершины четные. **Критерий же существования гамильтонова цикла на произвольном графе до сих пор не найден.**

Для гамильтоновых циклов (и путей) **неизвестно никаких** просто проверяемых необходимых и **достаточных условий их существования**, а все известные алгоритмы требуют для некоторых графов перебора большого числа вариантов.

Такие задачи называют **задачами переборного типа** или неподдающимися задачами.

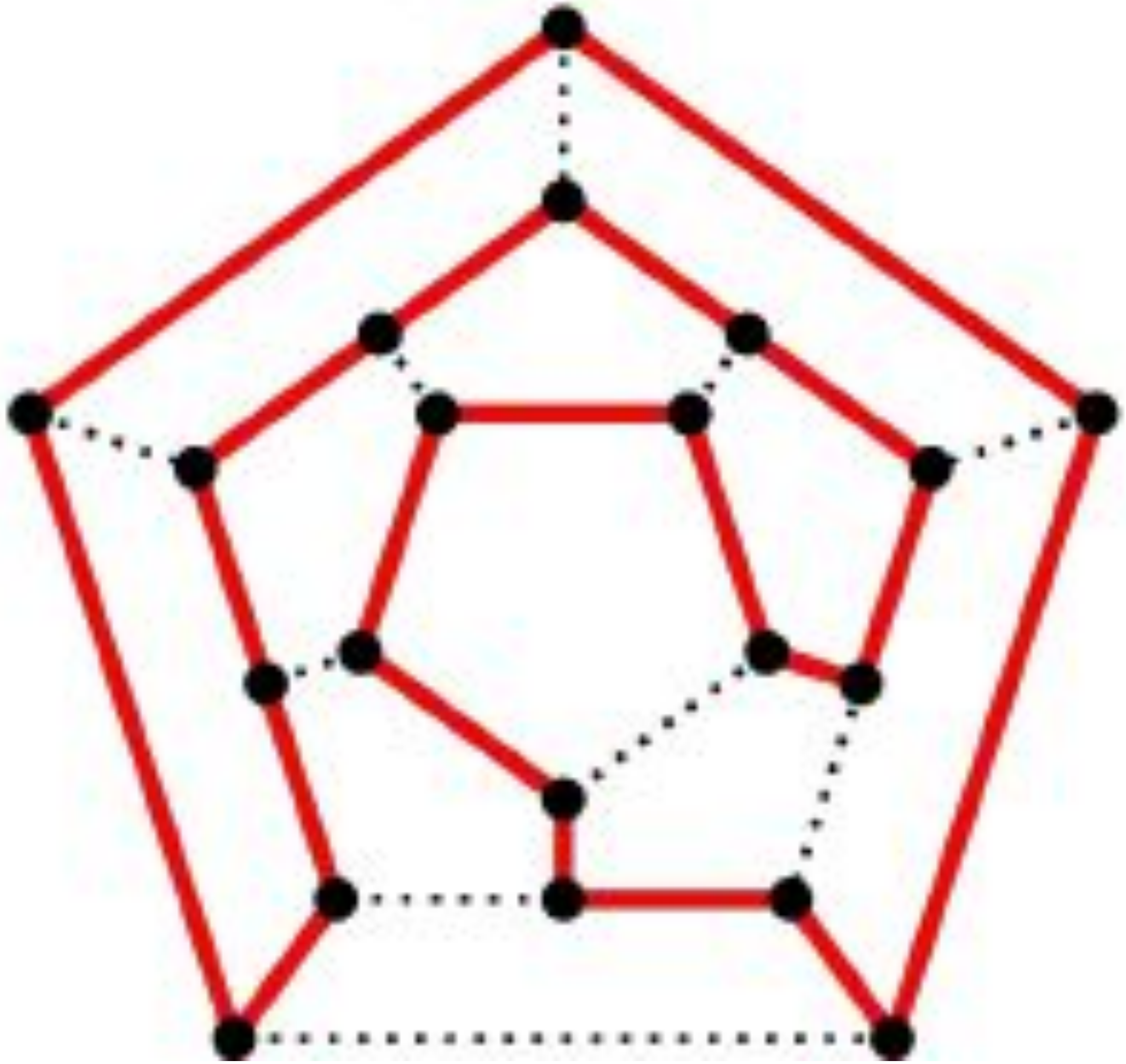
Есть несколько достаточных условий существования гамильтоновых циклов в графе:

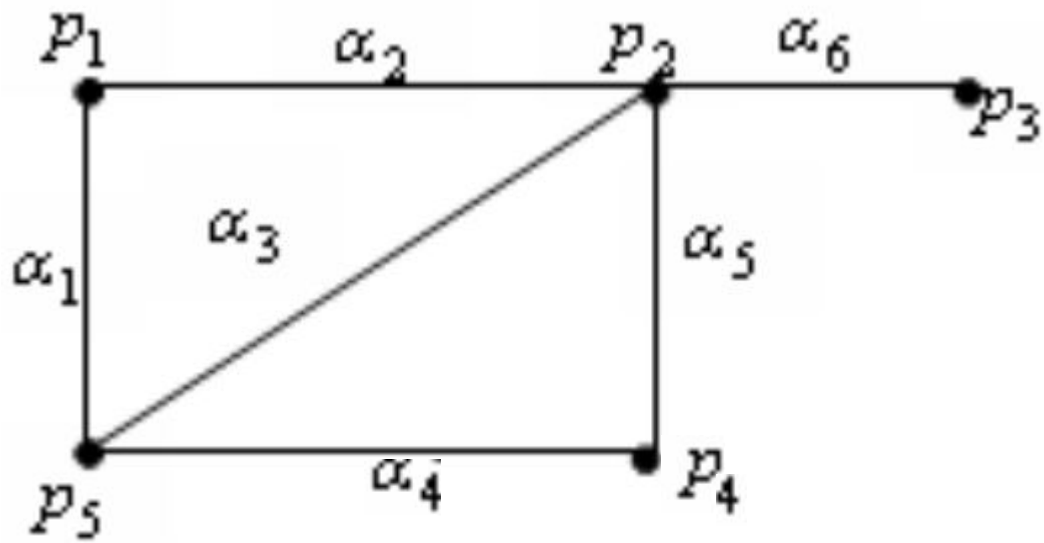
1. ***Всякий полный граф является гамильтоновым***, так как он содержит простой цикл, которому принадлежат все вершины данного графа.

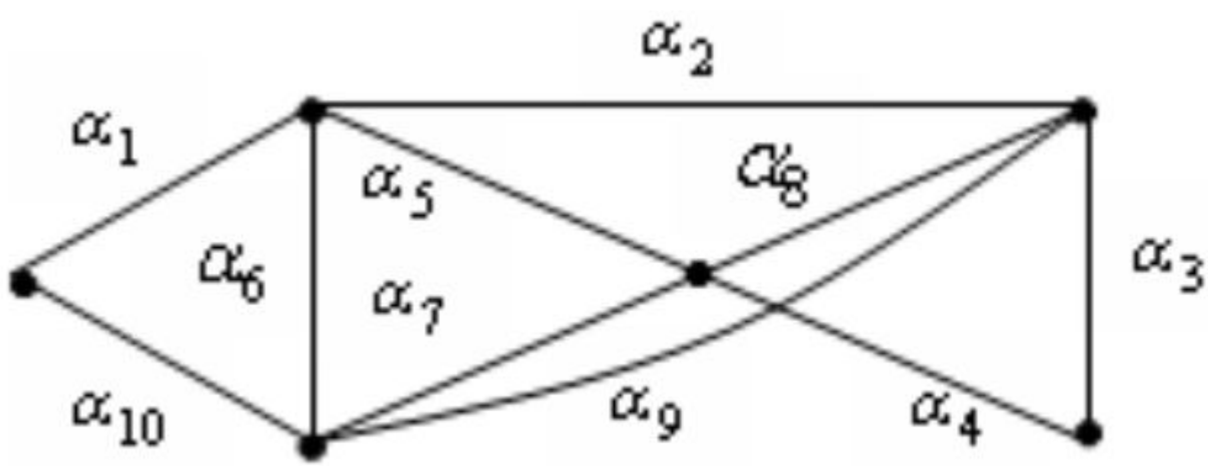
2. Если граф, помимо простого цикла, проходящего через все его вершины, содержит и другие рѐбра, то он также является гамильтоновым.

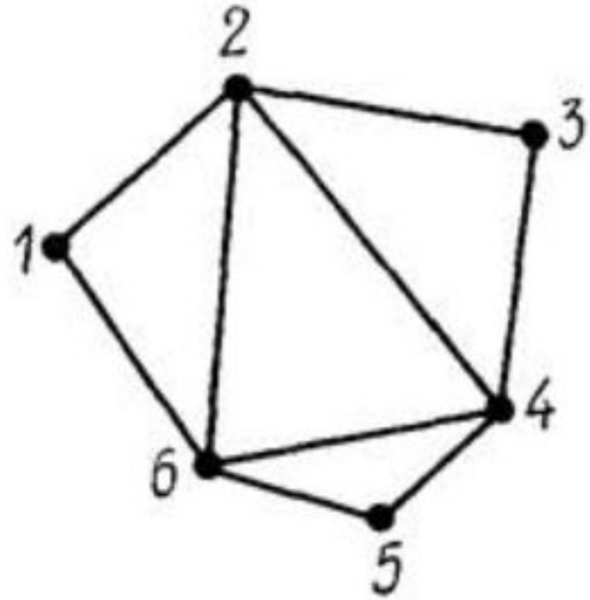
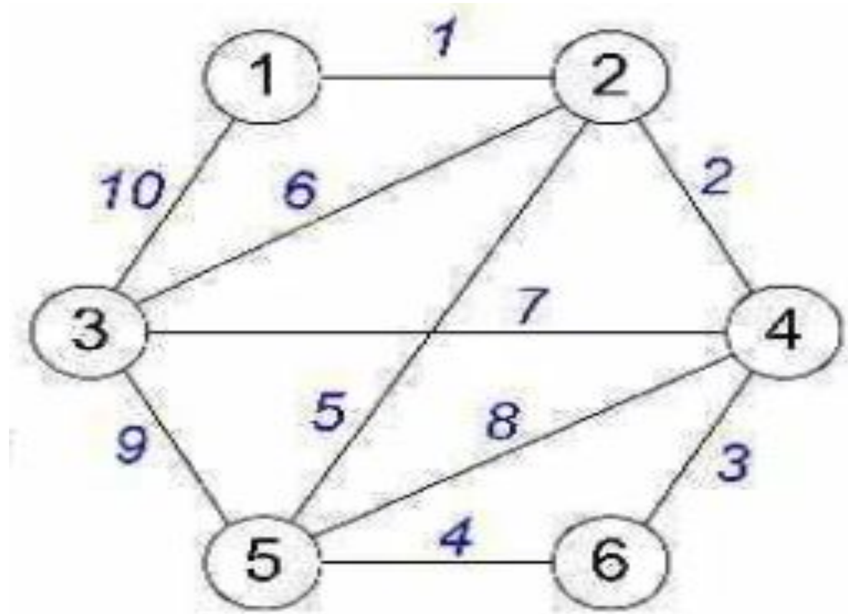
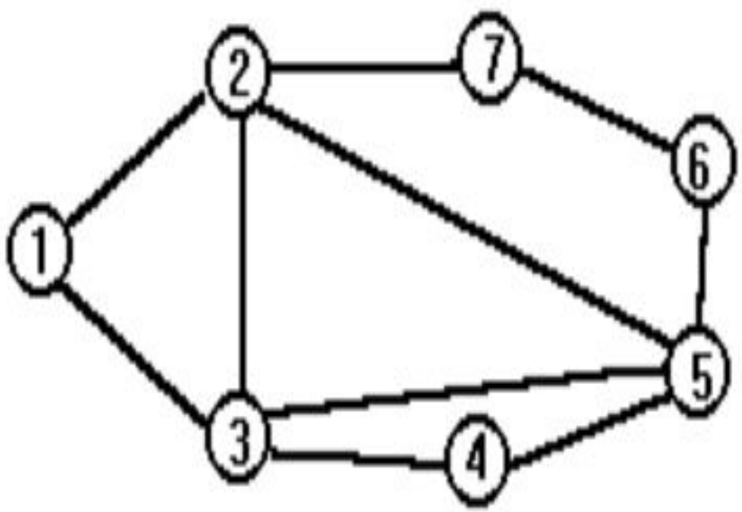
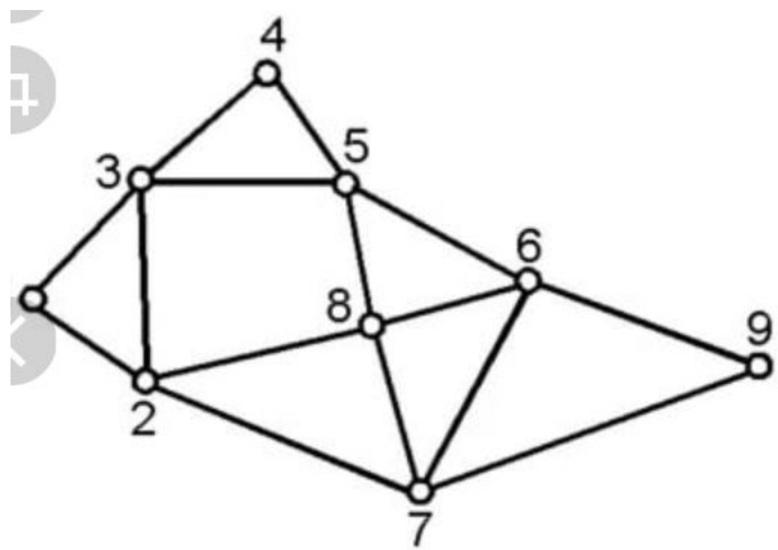
3. Если граф имеет один гамильтонов цикл, то он может иметь и другие гамильтоновы циклы.

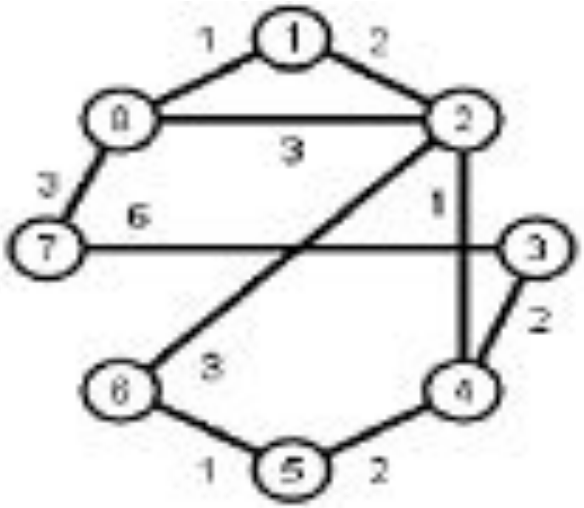
Теорема Дирака. Если в графе $G(V,E)$ с n вершинами ($n \geq 3$) выполняется условие $d(v) \geq n/2$ для любого v V, то граф G является гамильтоновым.

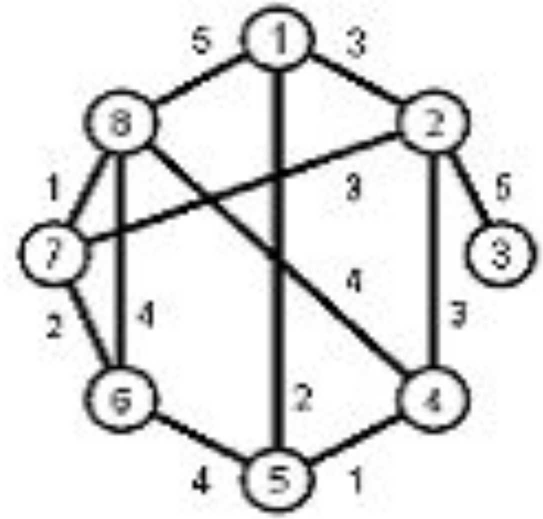


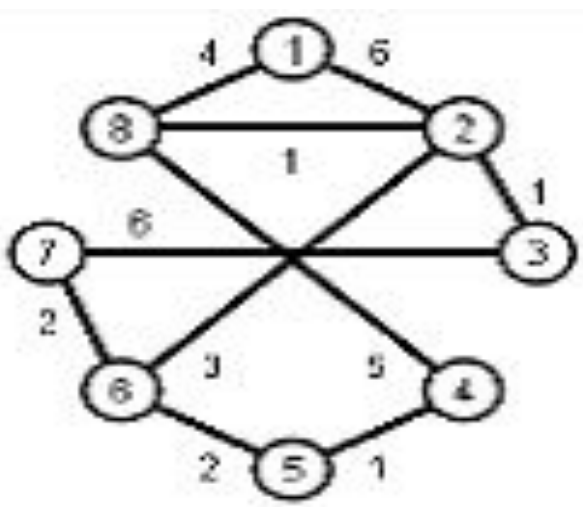

p_1
α_2
p_2
α_6
p_3
α_3
α_1
α_5
p_5
α_4
p_4

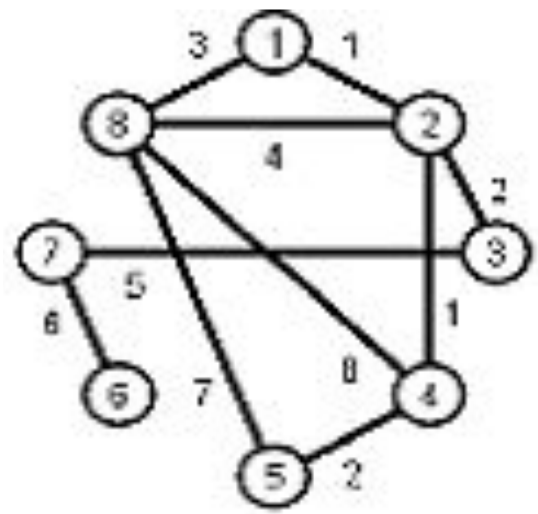

α_2
α_1
α_5
α_8
α_6
α_7
α_3
α_{10}
α_9
α_4


2
3
1
4
6
5

1
2
1
10
6
2
3
7
4
5
8
9
3
5
4
6

2
7
6
1
5
3
4

4
5
3
6
8
9
2
7


1
2
8
3
1
3
7
6
3
2
6
3
4
1
5
2


5
1
3
8
2
1
3
5
7
3
4
3
2
4
6
2
4
4
5
1


4
1
6
8
2
1
1
7
6
3
2
6
3
5
4
2
5
1


3
1
1
8
2
4
2
7
3
5
1
6
6
7
8
4
5
2

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение эйлерова графа.
2. Сформулируйте алгоритм построения эйлерова цикла.
3. Какой граф называют гамильтоновым?
4. Существует ли эйлеров граф, обладающий висячей вершиной?
5. Чем отличается эйлеров путь от гамильтонова?

Источники информации

- [Программирование, компьютеры и сети](https://progr-system.ru/) https://progr-system.ru/

Благодарю за внимание!