

Золотое сечение

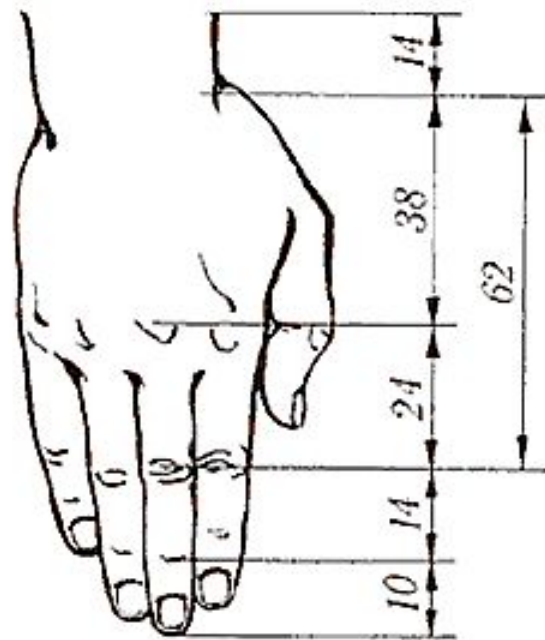
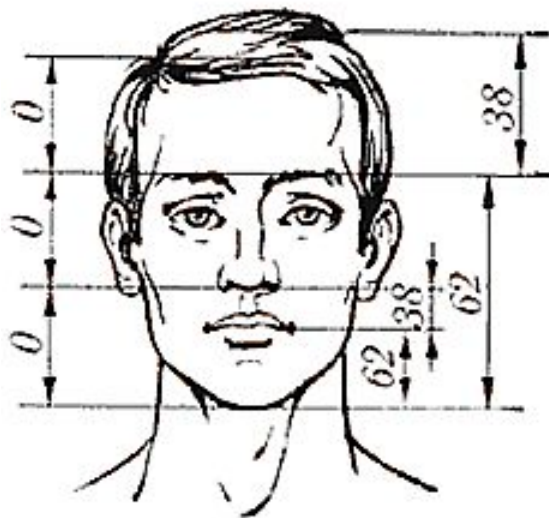
Золотым сечением называется такое делением целого на две неравные части, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

Выясним, каким числом выражается золотое сечение. Для этого выберем произвольный отрезок и примем его длину за единицу. Разобьем этот отрезок на две неравные части, и большую из них обозначим через x . Тогда меньшая часть равна $1-x$. По определению золотого отношения должно выполняться равенство $(1-x) : x = x : 1$. Мы получили уравнение относительно x , которое легко свести к квадратному $x^2 + x - 1 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0,6$.



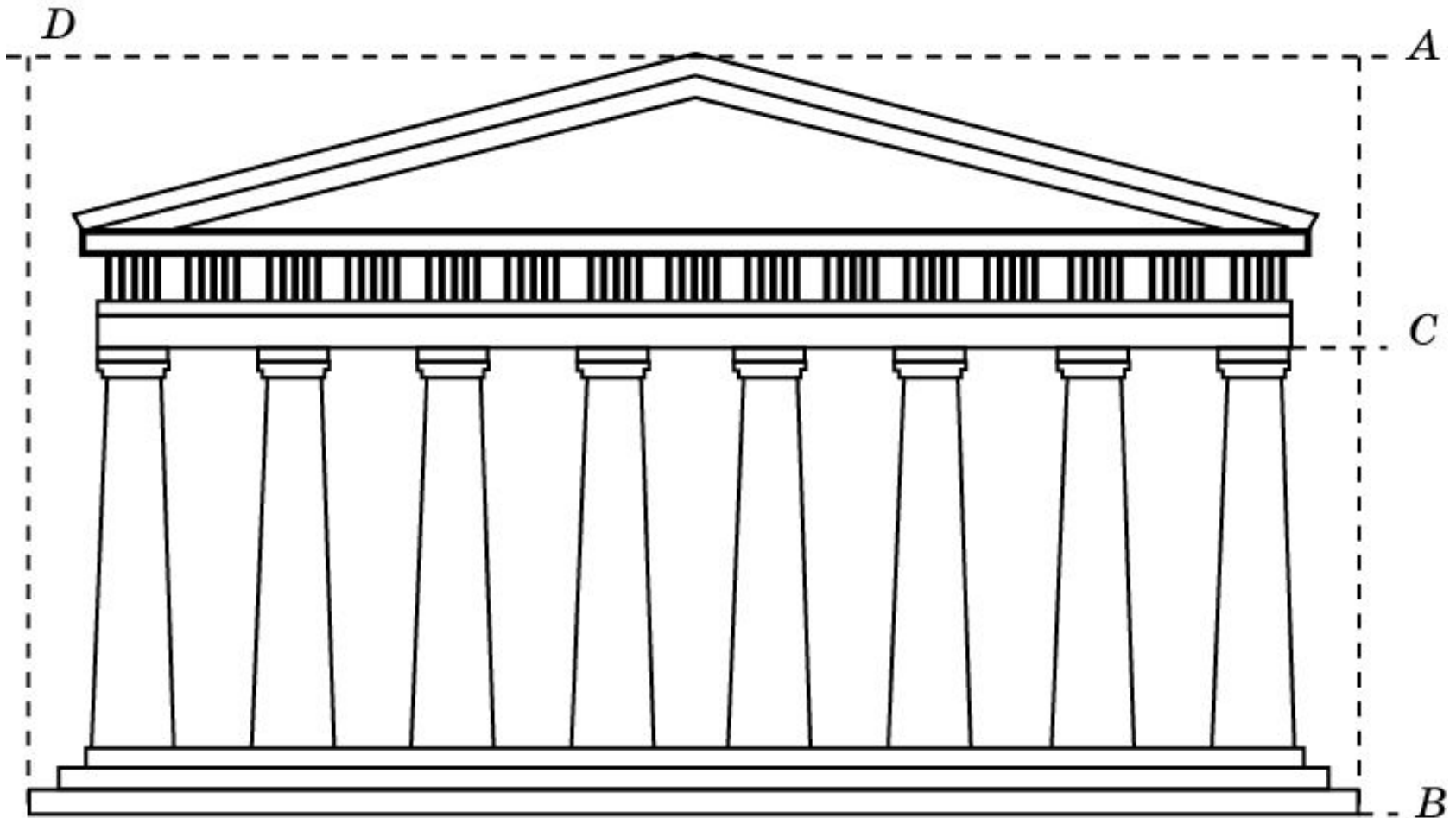
Полученное число обозначается буквой ϕ . Это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия.

Пропорции головы и руки человека



Парфенон

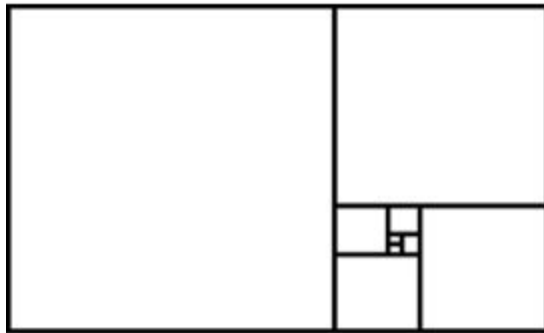
Одно из красивейших произведений древнегреческой архитектуры - Парфенон в Афинах (V в. до н.э.) содержит в себе золотые пропорции. Так отношение высоты AB здания к его длине AD равно ϕ . Кроме того, отношение AC к BC также равно ϕ .



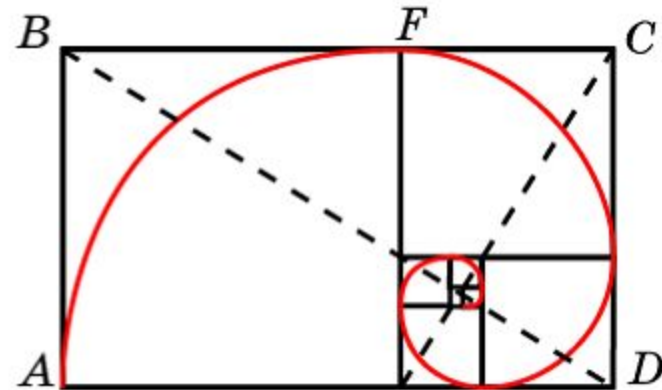
Золотой прямоугольник

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, называется **золотым прямоугольником**.

Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то снова получим золотой прямоугольник меньших размеров, подобный исходному.



а)



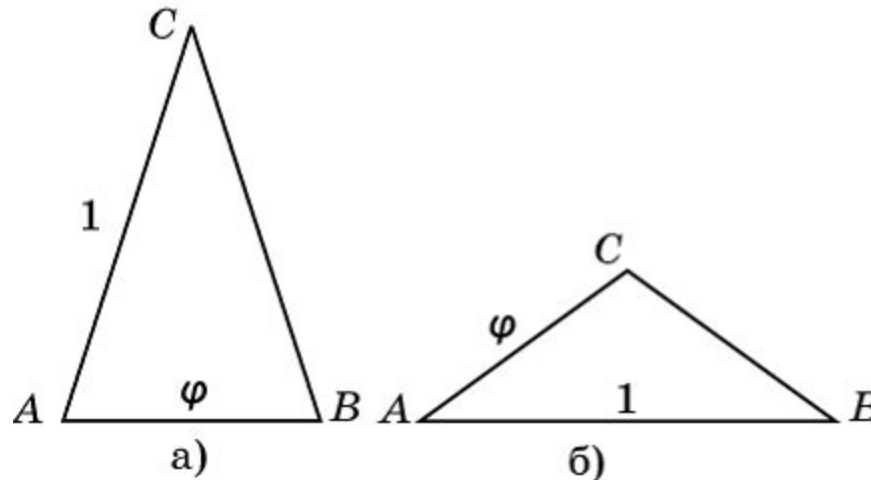
б) E

Если этот процесс продолжить, то мы получим так называемые вращающиеся квадраты, и весь прямоугольник окажется составленным из этих квадратов (рис. а). Если вершины квадратов соединить плавной кривой, то получим кривую, называемую **золотой спиралью** (рис. б).

Золотые треугольники

Равнобедренный треугольник называется **ЗОЛОТЫМ**, если его боковая сторона и основание находятся в золотом отношении.

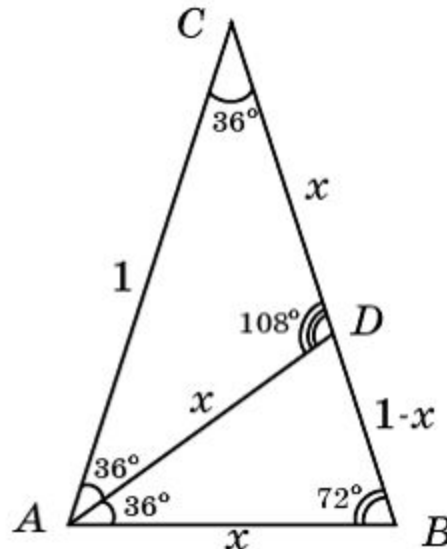
Возможны два типа золотых треугольников. В первом случае $AB : AC = \varphi$. Во втором случае $AC : AB = \varphi$.



Золотые треугольники

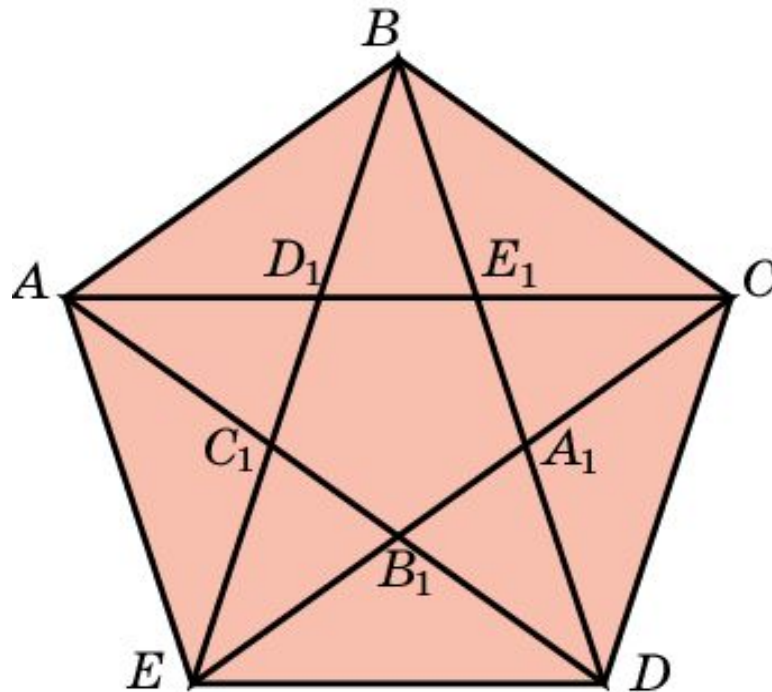
Теорема. Золотыми треугольниками являются равнобедренные треугольники с углами при вершинах 36° и 108° .

Доказательство. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC = 1$, $AB = x$), угол C равен 36° . Проведем биссектрису AD . Треугольники ABD и $СAB$ подобны по трем углам. Следовательно, $BD : AB = AB : AC$, т.е. $1 - x : x = x : 1$. Решая это уравнение относительно x , находим $x = \varphi$. Значит, треугольник ABC – золотой. Заметим, что треугольник ACD – также золотой.



Пентаграмма

Правильный пятиугольник с проведенными в нем диагоналями, образующими звездчатый правильный пятиугольник называется **пентаграммой**. Все треугольники, на которые при этом разбивается пятиугольник, являются золотыми.



Вопрос 1

Что называется золотым сечением?

Ответ: Золотым сечением называется такое делением целого на две неравные части, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

Вопрос 2

Каким числом выражается золотое сечение?

Ответ: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Вопрос 3

Как обозначается число, выражающее золотое сечение?

Ответ: φ .

Вопрос 4

В честь кого золотое сечение обозначается буквой φ?

Ответ: В честь древнегреческого скульптора Фидия.

Вопрос 5

Какой прямоугольник называется золотым?

Ответ: Золотым прямоугольником называется прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении.

Вопрос 6

Какие треугольники называются золотыми?

Ответ: Золотым называется равнобедренный треугольник, боковая сторона и основание которого находятся в золотом отношении.

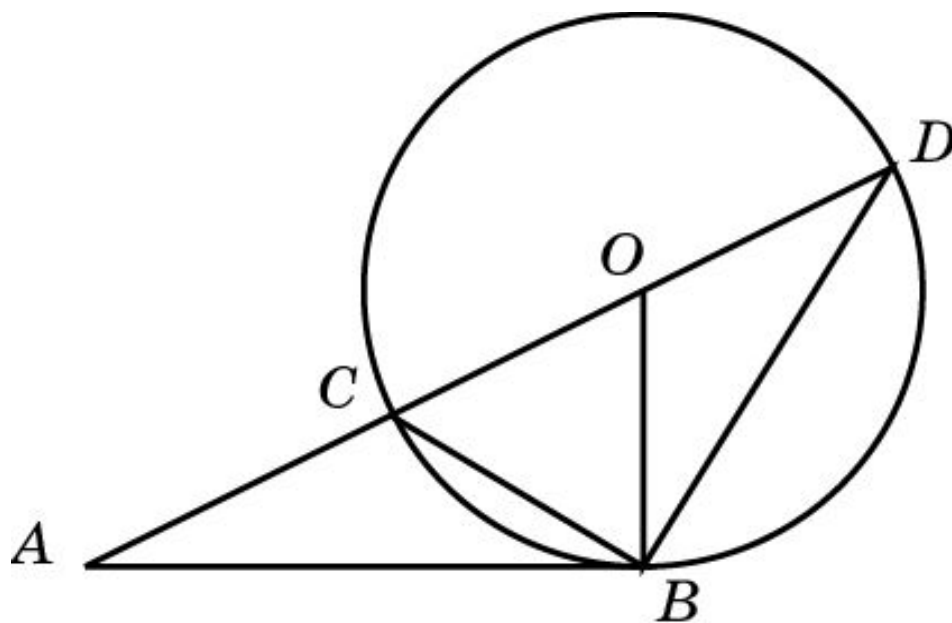
Вопрос 7

Что такое пентаграмма?

Ответ: Пентаграммой называется правильный пятиугольник с проведенными в нем диагоналями.

Упражнение 1

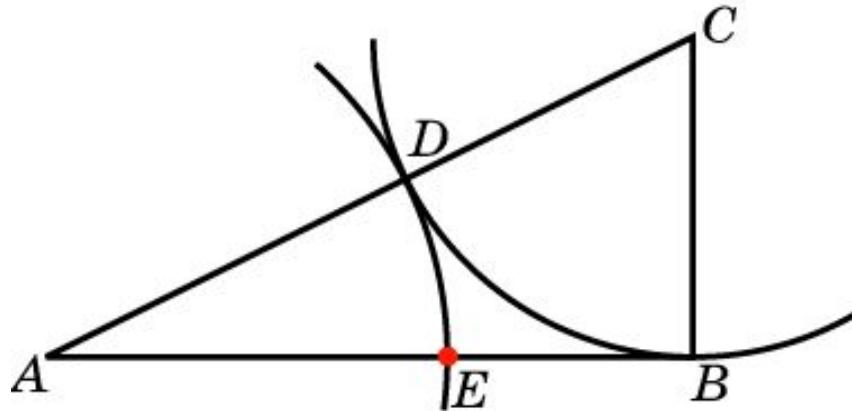
На рисунке окружность с центром в точке O касается прямой AB в точке B , $2OB = AB$.
Найдите отношение отрезков AC и AB .



Ответ: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 2

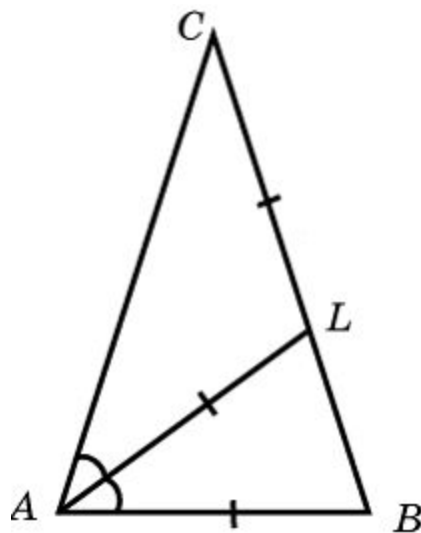
Используя циркуль и линейку, разделите данный отрезок AB в золотом отношении.



Решение: Через точку B проведем прямую, перпендикулярную прямой AB , отложим на ней отрезок BC , равный половине отрезка AB . Проведем отрезок AC . С центром в точке C проведем окружность радиуса BC , ее точку пересечения с отрезком AC обозначим D . С центром в точке A проведем окружность радиуса AD , ее точку пересечения с отрезком AB обозначим E . Эта точка и будет делить отрезок AB в золотом отношении.

Упражнение 3

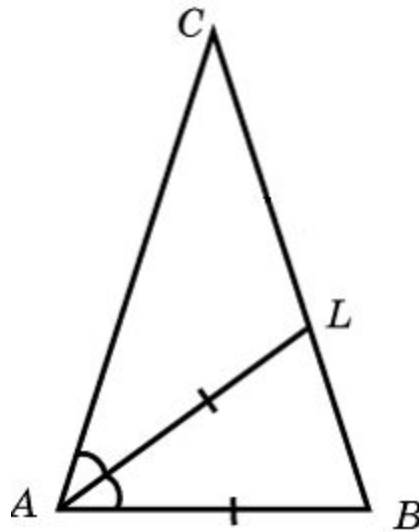
В треугольнике ABC биссектриса AL равна отрезку LC и стороне AB . Найдите угол C .



Ответ: 36° .

Упражнение 4

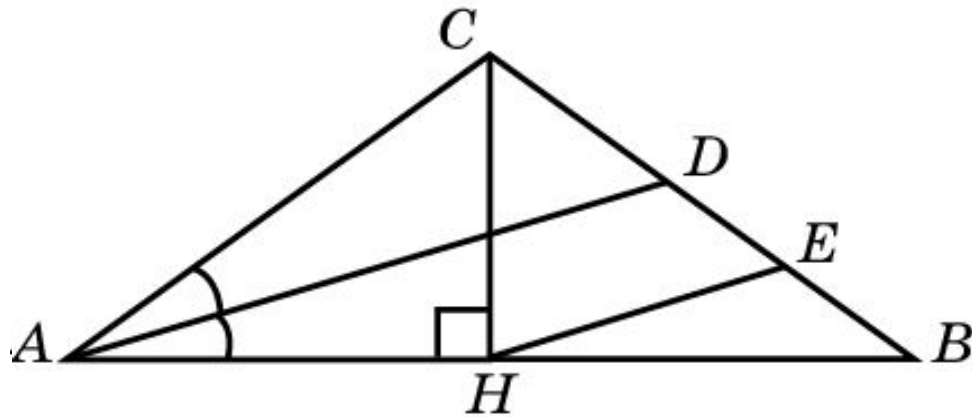
Биссектриса, проведенная из вершины основания равнобедренного треугольника, равна основанию. Найдите угол при основании этого треугольника.



Ответ: 72° .

Упражнение 5

Угол при основании равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) равен 36° . Высота CH , опущенная на основание, равна 1. Найдите биссектрису AD , проведенную из вершины основания.

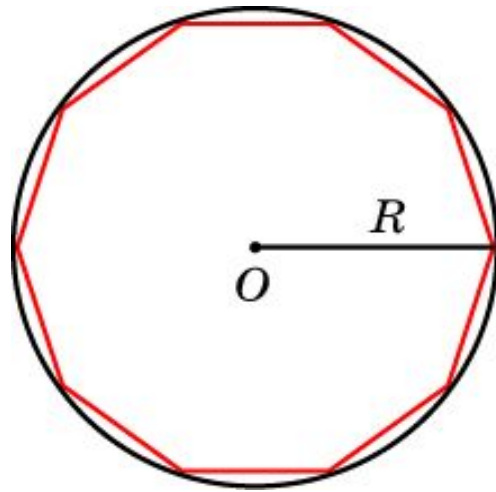


Решение. Проведем среднюю линию HE треугольника ABD . Угол HEC равен углу ADC и равен 54° . Угол HCE также равен 54° . Следовательно, треугольник HCE – равнобедренный, $HC = HE = 0,5$.

Ответ. 0,5.

Упражнение 6

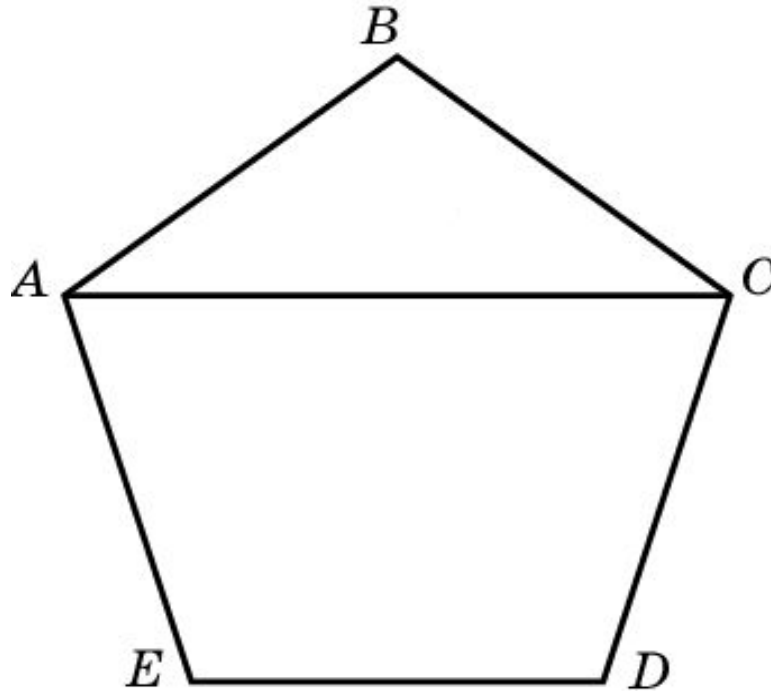
Найдите радиус окружности, описанной около правильного десятиугольника со стороной 1.



Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 7

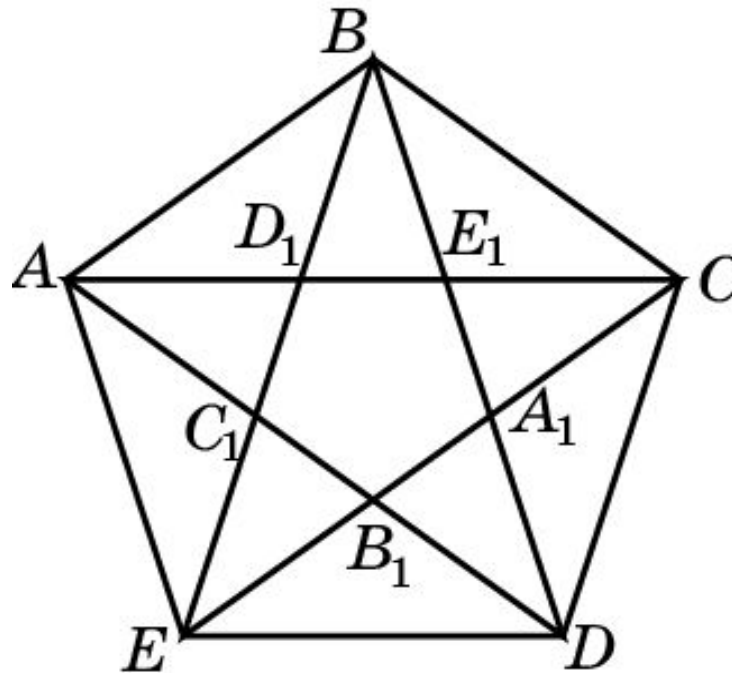
Сторона правильного пятиугольника равна 1.
Найдите его диагональ.



Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 8

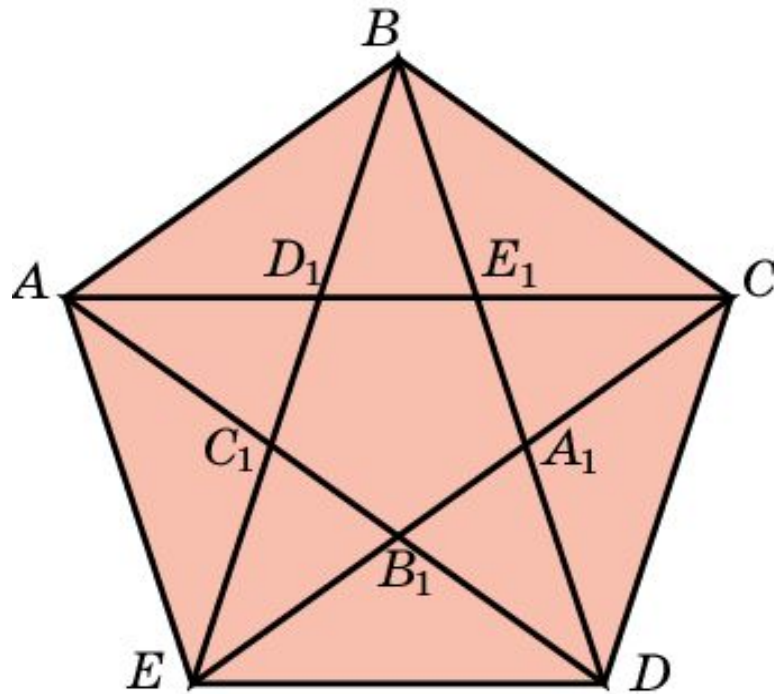
В каком отношении точка E_1 делит отрезок AC ?



Ответ: В золотом.

Упражнение 9

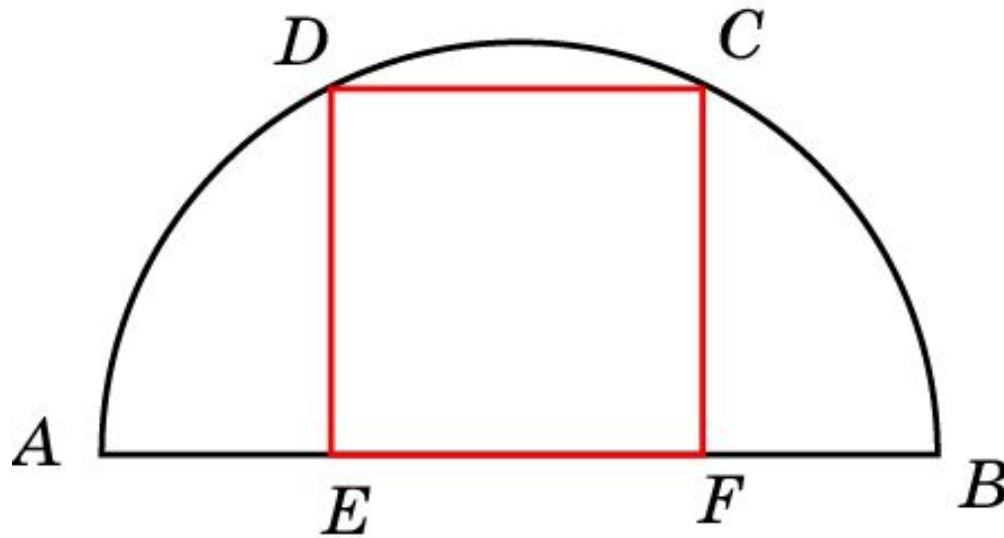
Докажите, что диагонали правильного пятиугольника образуют правильный пятиугольник. Найдите сторону этого пятиугольника, если сторона исходного пятиугольника равна 1.



Ответ: $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 10

В полукруг с диаметром AB вписан квадрат $CDEF$. Найдите отношение отрезков AE и ED .



Ответ: $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 11

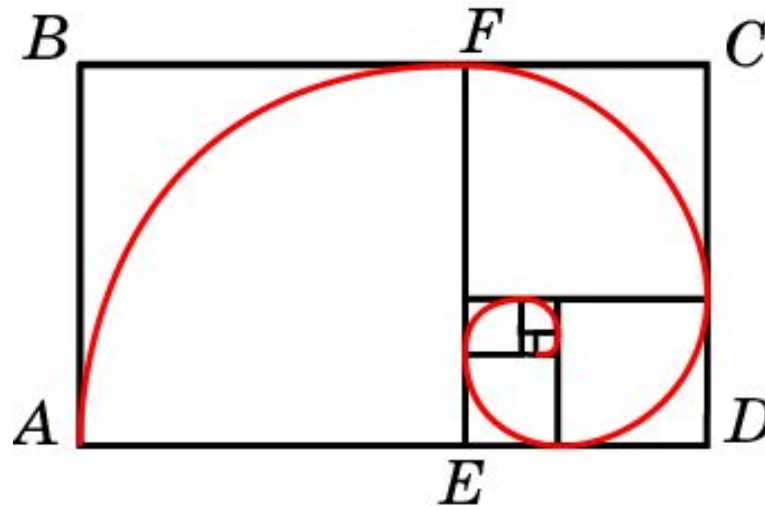
Катет прямоугольного треугольника равен 1. Найдите его гипотенузу, если угол, противолежащий данному катету, равен: а) 18° ; б) 54° .

Ответ: а) $\sqrt{5} + 1$;

б) $\sqrt{5} - 1$.

Упражнение 12

Докажите, что каждый следующий виток золотой спирали подобен предыдущему. Найдите коэффициент подобия.

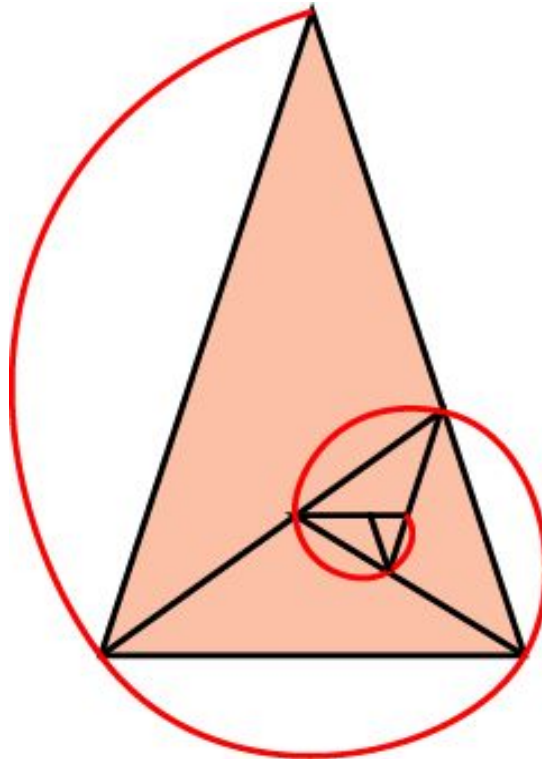


Ответ: $\varphi^4 = 2 - 3\varphi = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 13

Отсекая золотые треугольники, аналогично тому, как это было сделано для золотого прямоугольника, постройте последовательность вращающихся золотых треугольников.

Ответ:



Упражнение 14*

Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем расправлена так, чтобы узел стал плоским. Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.

