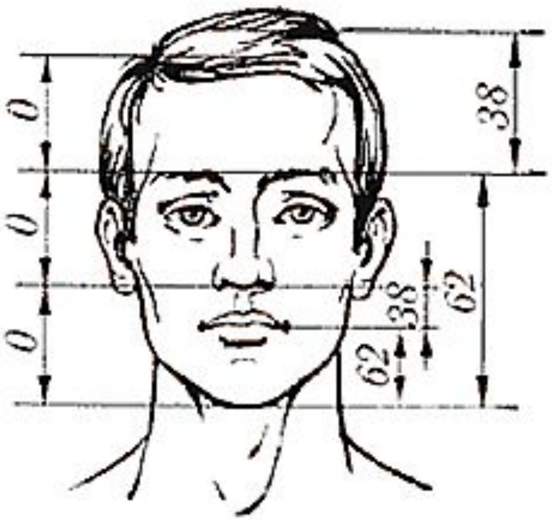
Золотое сечение

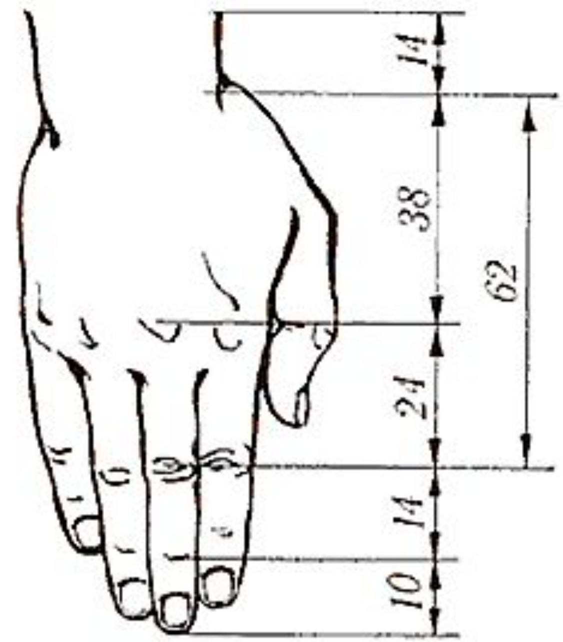
Золотым сечением называется такое делением целого на две неравные части, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

Выясним, каким числом выражается золотое сечение. Для этого выберем произвольный отрезок и примем его длину за единицу. Разобьем этот отрезок на две неравные части, и большую из них обозначим через x. Тогда меньшая часть равна $1-x$. По определению золотого отношения должно выполняться равенство $(1-x) : x = x : 1$. Мы получили уравнение относительно x, которое легко свести к квадратному $x^2 + x - 1 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}6$.

Полученное число обозначается буквой φ. Это первая буква в имени великого древнегреческого скульптора Фидия.

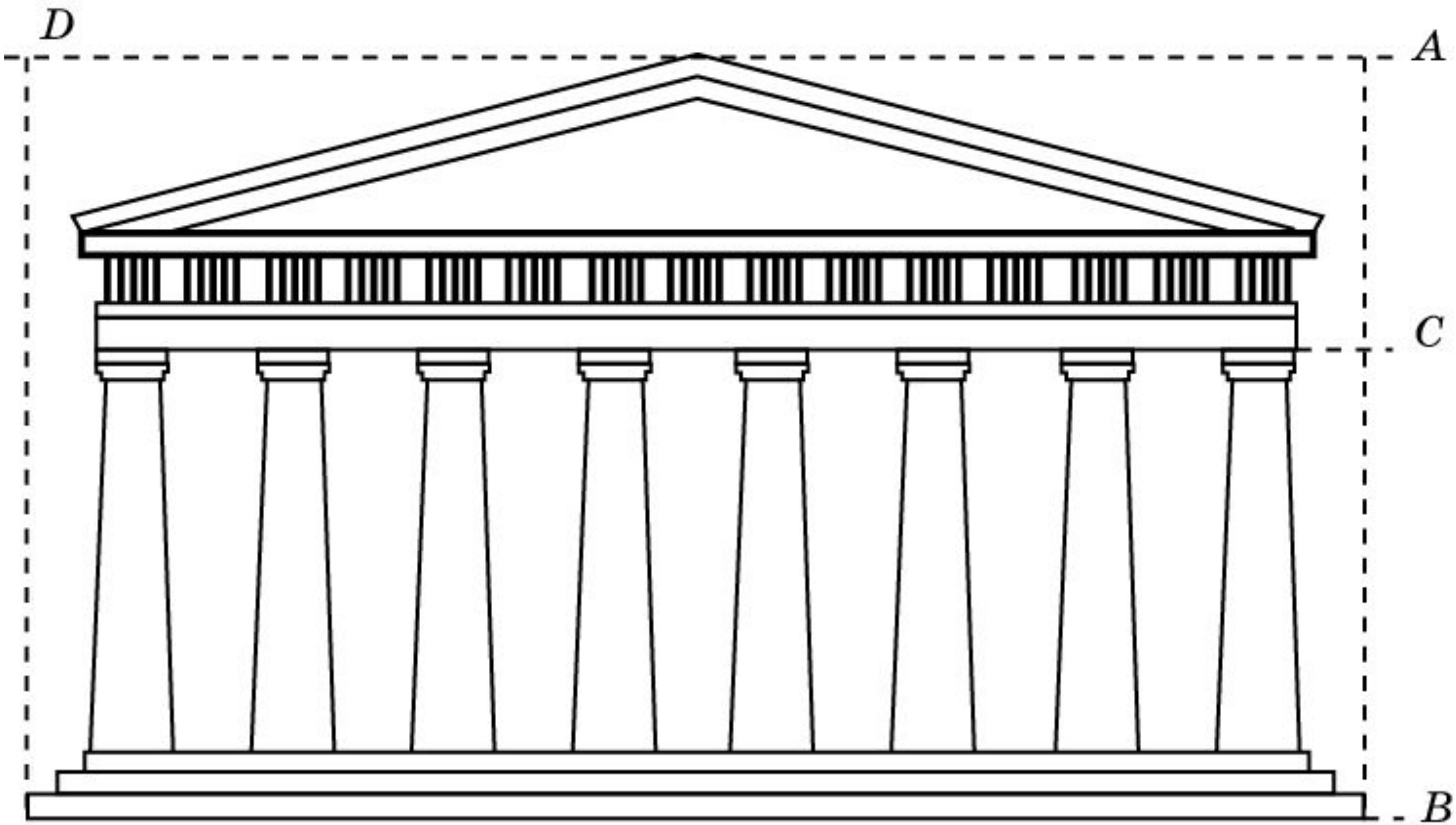
Пропорции головы и руки человека





Парфенон

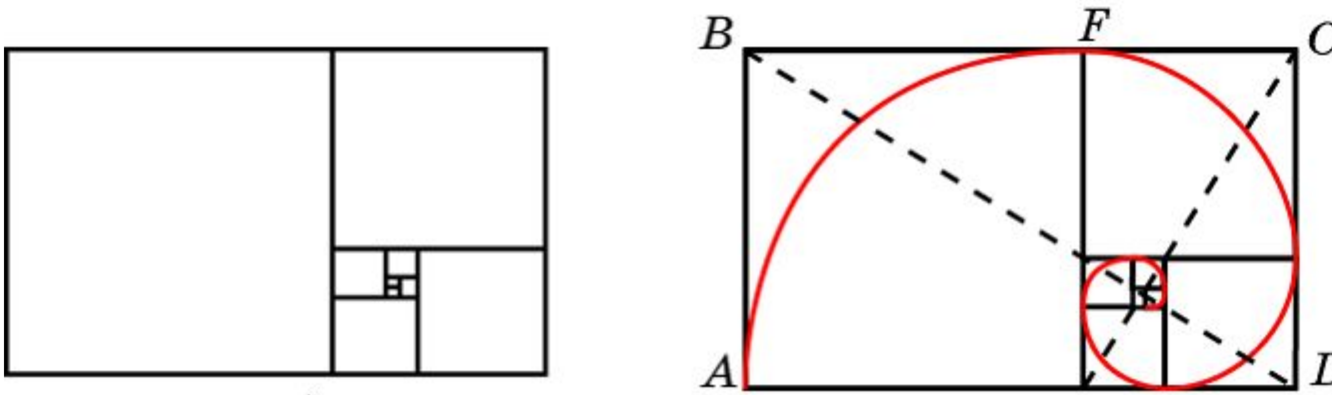
Одно из красивейших произведений древнегреческой архитектуры - Парфенон в Афинах (V в.до н.э.) содержит в себе золотые пропорции. Так отношение высоты AB здания к его длине AD равно φ. Кроме того, отношение AC к BC также равно φ.



Золотой прямоугольник

Прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении, называется золотым прямоугольником.

Если от золотого прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника, то снова получим золотой прямоугольник меньших размеров, подобный исходному.



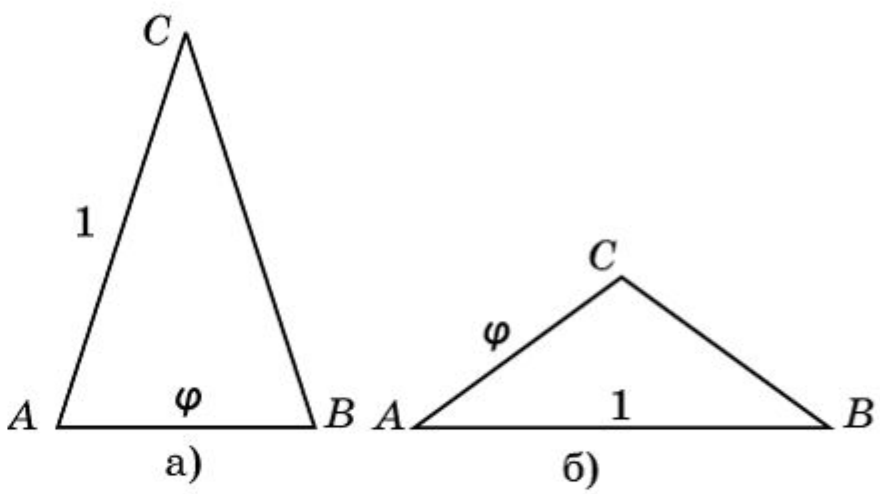
а) б)

Если этот процесс продолжить, то мы получим так называемые вращающиеся квадраты, и весь прямоугольник окажется составленным из этих квадратов (рис. а). Если вершины квадратов соединить плавной кривой, то получим кривую, называемую золотой спиралью (рис. б).

Золотые треугольники

Равнобедренный треугольник называется золотым, если его боковая сторона и основание находятся в золотом отношении.

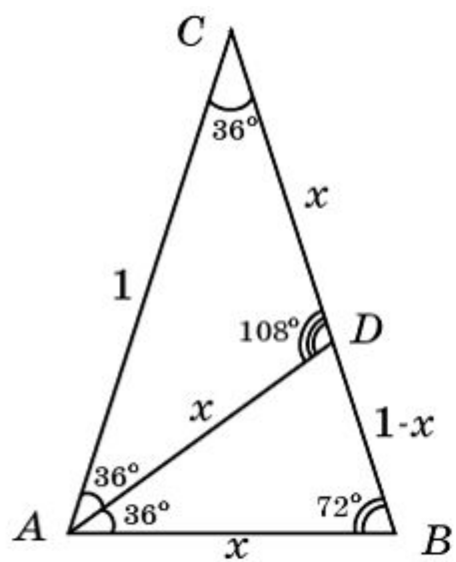
Возможны два типа золотых треугольников. В первом случае $AB : AC = \varphi$. Во втором случае $AC : AB = \varphi$.



Золотые треугольники

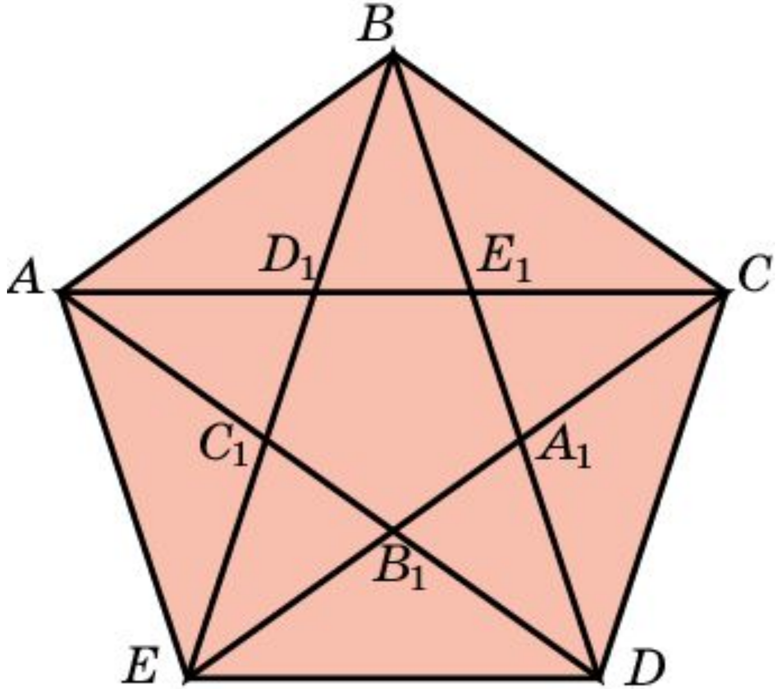
Теорема. Золотыми треугольниками являются равнобедренные треугольники с углами при вершинах 36º и 108º.

Доказательство. Пусть ABC – равнобедренный треугольник ($AC = BC = 1$, $AB = x$), угол C равен 36º. Проведем биссектрису AD. Треугольники ABD и CAB подобны по трем углам. Следовательно, $BD : AB = AB : AC$, т.е. $1 - x : x = x : 1$. Решая это уравнение относительно x, находим $x = \varphi$. Значит, треугольник ABC – золотой. Заметим, что треугольник ACD – также золотой.



Пентаграмма

Правильный пятиугольник с проведенными в нем диагоналями, образующими звездчатый правильный пятиугольник называется пентаграммой. Все треугольники, на которые при этом разбивается пятиугольник, являются золотыми.



Вопрос 1

Что называется золотым сечением?

Ответ: Золотым сечением называется такое делением целого на две неравные части, при котором меньшая часть так относится к большей, как большая часть относится ко всему целому.

Вопрос 2

Каким числом выражается золотое сечение?

Ответ: $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Вопрос 3

Как обозначается число, выражающее золотое сечение?

Ответ: φ.

Вопрос 4

В честь кого золотое сечение обозначается буквой φ?

Ответ: В честь древнегреческого скульптора Фидия.

Вопрос 5

Какой прямоугольник называется золотым?

Ответ: Золотым прямоугольником называется прямоугольник, стороны которого находятся в золотом отношении.

Вопрос 6

Какие треугольники называются золотыми?

Ответ: Золотым называется равнобедренный треугольник, боковая сторона и основание которого находятся в золотом отношении.

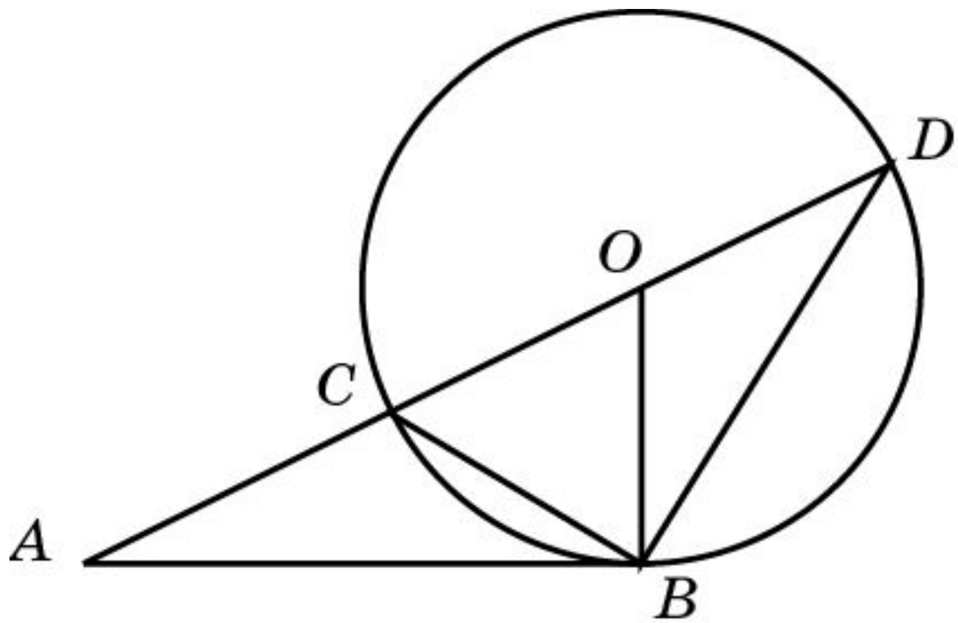
Вопрос 7

Что такое пентаграмма?

Ответ: Пентаграммой называется правильный пятиугольник с проведенными в нем диагоналями.

Упражнение 1

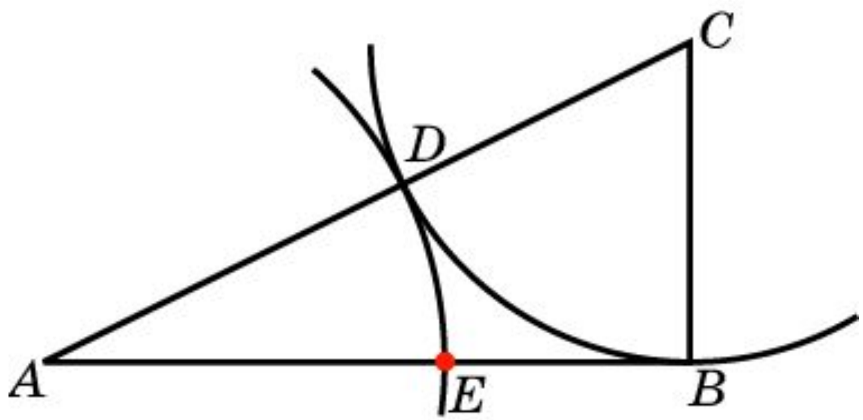
На рисунке окружность с центром в точке O касается прямой AB в точке B, $2OB = AB$. Найдите отношение отрезков AC и AB.



Ответ: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 2

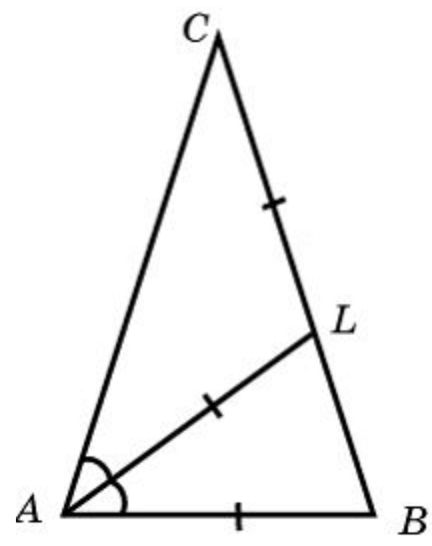
Используя циркуль и линейку, разделите данный отрезок AB в золотом отношении.



Решение: Через точку B проведем прямую, перпендикулярную прямой AB, отложим на ней отрезок BC, равный половине отрезка AB. Проведем отрезок AC. С центром в точке C проведем окружность радиуса BC, ее точку пересечения с отрезком AC обозначим D. С центром в точке A проведем окружность радиуса AD, ее точку пересечения с отрезком AB обозначим E. Эта точка и будет делить отрезок AB в золотом отношении.

Упражнение 3

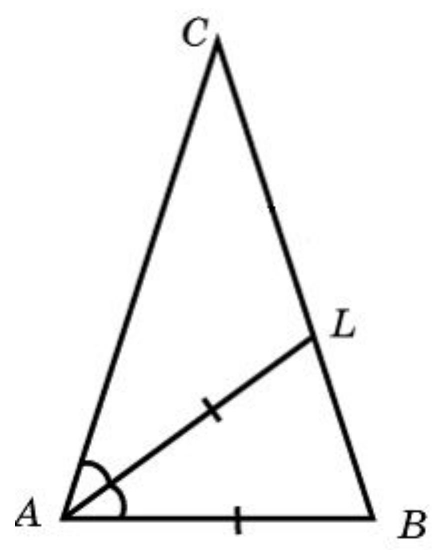
В треугольнике ABC биссектриса AL равна отрезку LC и стороне AB. Найдите угол C.



Ответ: 36°.

Упражнение 4

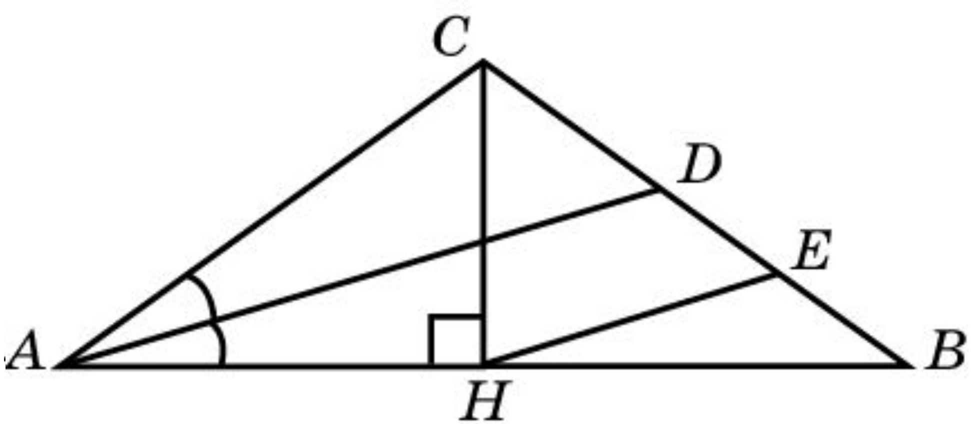
Биссектриса, проведенная из вершины основания равнобедренного треугольника, равна основанию. Найдите угол при основании этого треугольника.



Ответ: 72°.

Упражнение 5

Угол при основании равнобедренного треугольника ABC ($AC = BC$) равен 36°. Высота CH, опущенная на основание, равна 1. Найдите биссектрису AD, проведенную из вершины основания.

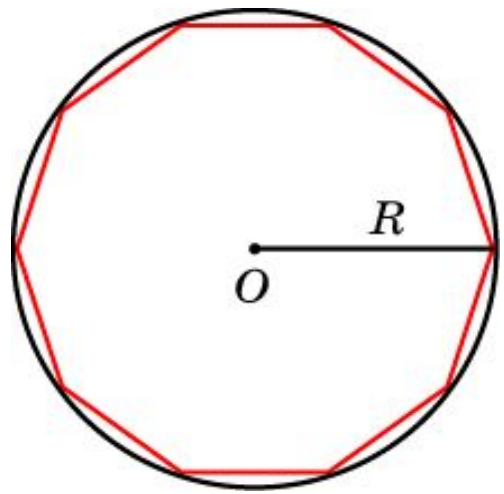


Решение. Проведем среднюю линию HE треугольника ABD. Угол HED равен углу ADC и равен 54°. Угол HCE также равен 54°. Следовательно, треугольник HCE – равнобедренный, $HC = HE =$ 0,5.

Ответ. 0,5.

Упражнение 6

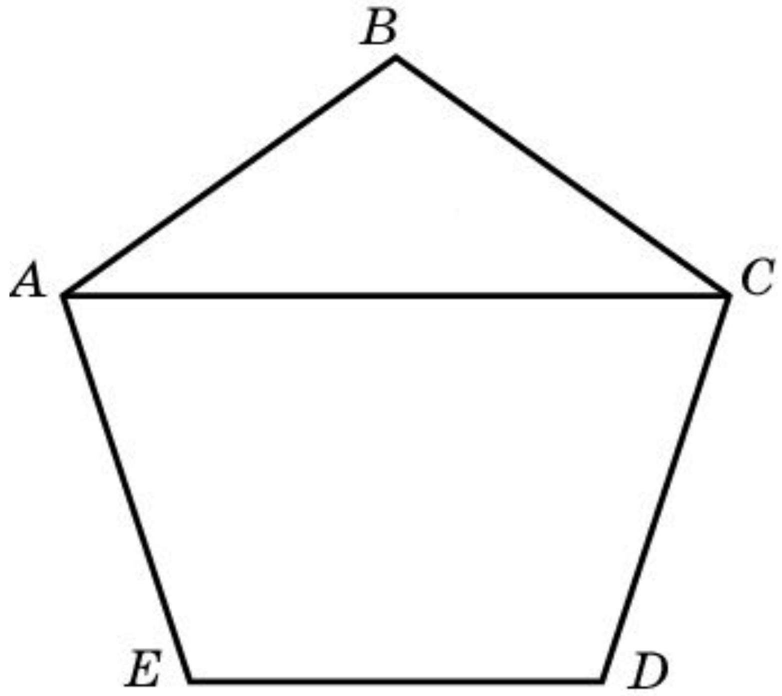
Найдите радиус окружности, описанной около правильного десятиугольника со стороной 1.



Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 7

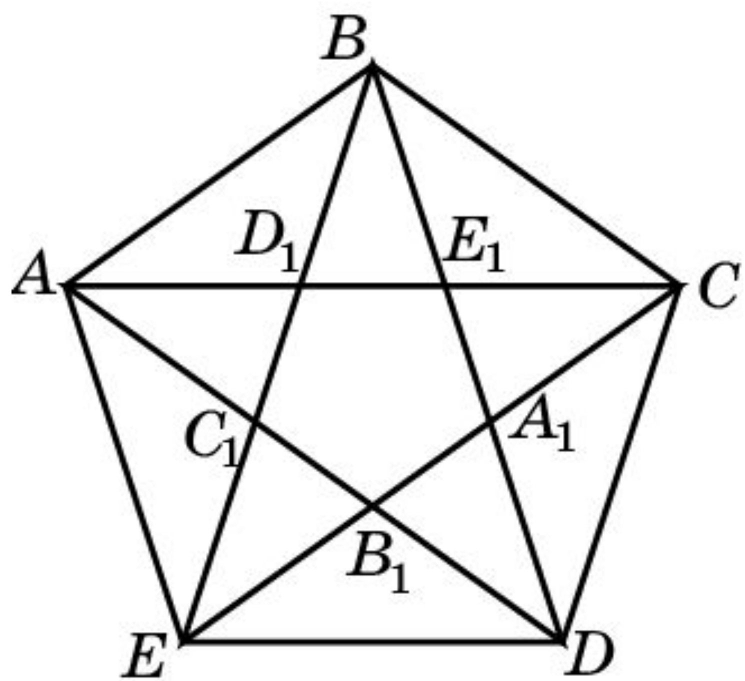
Сторона правильного пятиугольника равна 1. Найдите его диагональ.



Ответ: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 8

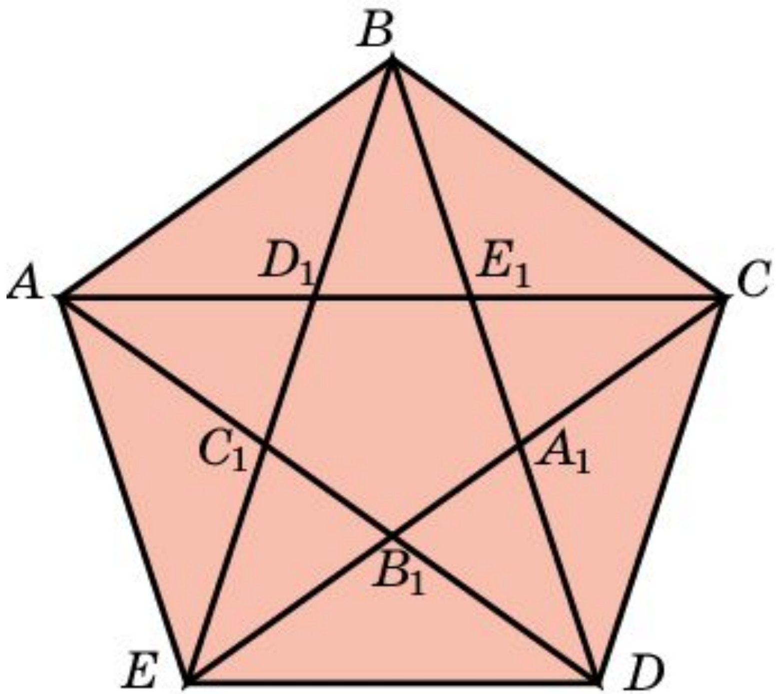
В каком отношении точка E_1 делит отрезок AC?



Ответ: В золотом.

Упражнение 9

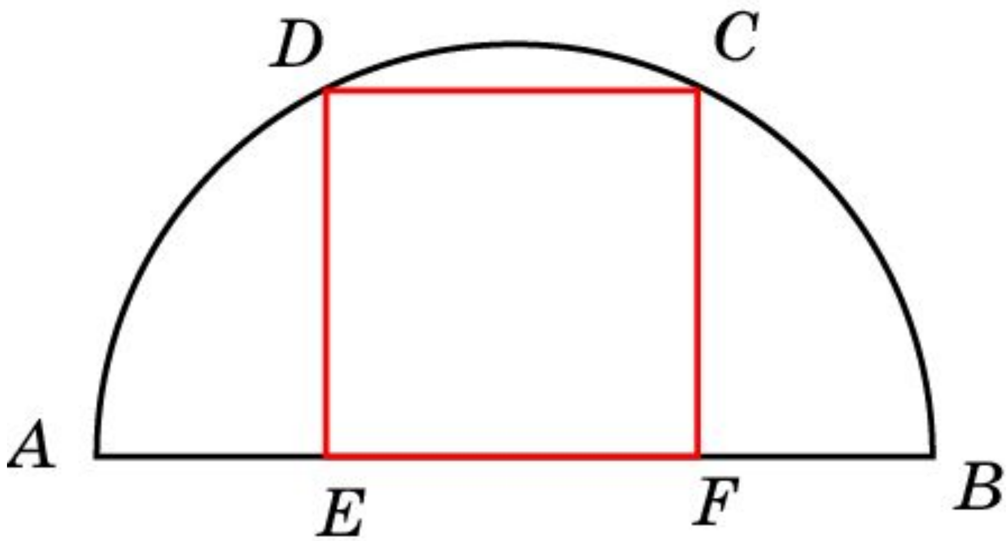
Докажите, что диагонали правильного пятиугольника образуют правильный пятиугольник. Найдите сторону этого пятиугольника, если сторона исходного пятиугольника равна 1.



Ответ: $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 10

В полукруг с диаметром AB вписан квадрат $CDEF$. Найдите отношение отрезков AE и ED.



Ответ: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Упражнение 11

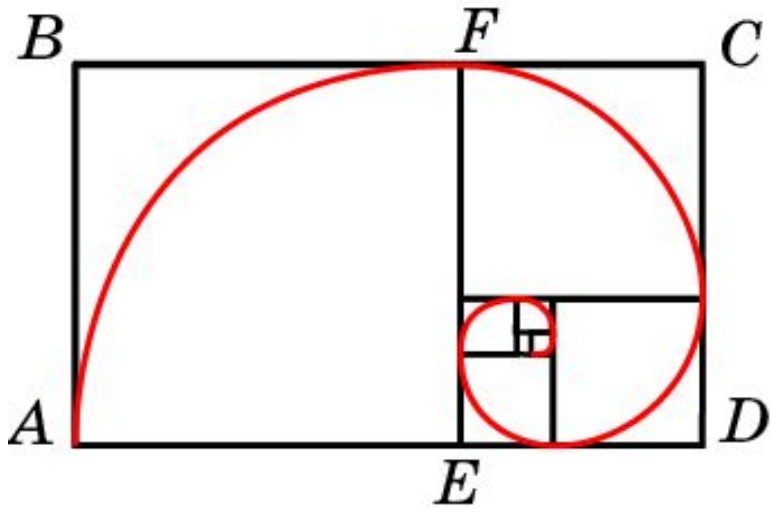
Катет прямоугольного треугольника равен 1. Найдите его гипотенузу, если угол, противолежащий данному катету, равен: а) 18°; б) 54°.

Ответ: а) $\sqrt{5}+1$;

б) $\sqrt{5}-1$.

Упражнение 12

Докажите, что каждый следующий виток золотой спирали подобен предыдущему. Найдите коэффициент подобия.

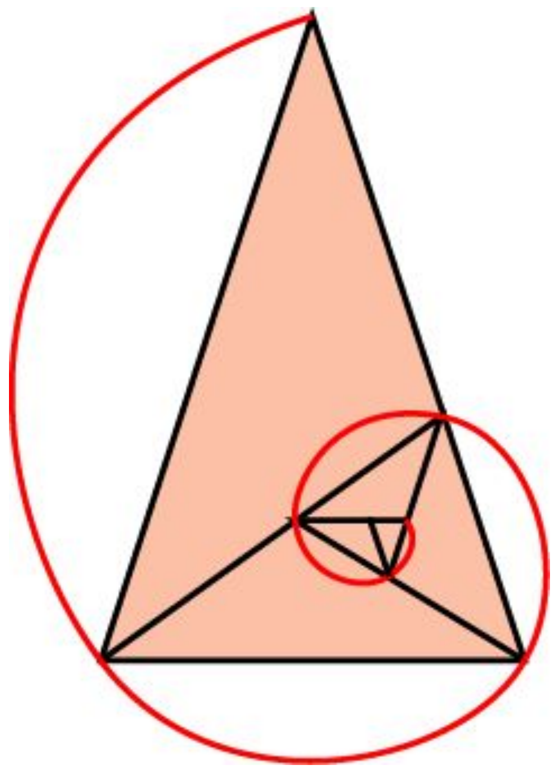


Ответ: $\varphi^4 = 2 - 3\varphi = \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2}.$

Упражнение 13

Отсекая золотые треугольники, аналогично тому, как это было сделано для золотого прямоугольника, постройте последовательность вращающихся золотых треугольников.

Ответ:



Упражнение 14*

Бумажная лента постоянной ширины завязана простым узлом и затем расправлена так, чтобы узел стал плоским. Докажите, что узел имеет форму правильного пятиугольника.