Энергия системы неподвижных точечных зарядов

Рассмотрим два неподвижных точечных заряда q_1 и q_2, расположенные на некотором расстоянии друг от друга. Каждый из зарядов находится в электростатическом поле, созданном другим зарядом. Выразим энергию их взаимодействия. Если считать, что поле создано зарядом q_1, то потенциальная энергия зарядов будет равна: $W = q_2\varphi_2$, где φ_2 – потенциал, создаваемый зарядом q_1 в точке, где находится заряд q_2. Если же полагать, что поле создано зарядом q_2, то потенциальная энергия этой системы зарядов будет равна: $W = q_1\varphi_1$, где φ_1 – потенциал, создаваемый зарядом q_2 в точке, где находится заряд q_1.

Отсюда $$q_1 \varphi_1 = q_2 \varphi_2$$

Тогда можно записать $W = \frac{q_2\varphi_2}{2} + \frac{q_1\varphi_1}{2}$ и так как $q_1\varphi_1 = q_2\varphi_2$,

то
$$W = \frac{q_1\varphi_1}{2} + \frac{q_2\varphi_2}{2} = \frac{1}{2}\left(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2\right)$$

Полученный результат можно обобщить на систему из любого числа точечных зарядов:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i$$

где φ_i – потенциал, создаваемый всеми зарядами, кроме q_i в точке, где находится заряд q_i.

Собственная энергия заряженного проводника и конденсатора

Заряд, находящийся на проводнике, можно рассматривать как систему взаимодействующих между собой точечных зарядов. Такая система обладает потенциальной энергией.

Потенциальная энергия, которой обладает заряженный проводник в отсутствие внешнего электрического поля, называется собственной энергией проводника.

Будем заряжать проводник, перенося заряды малыми порциями dq с нулевого уровня потенциала на поверхность проводника. Пусть очередная порция dq переносится, когда на проводнике уже имеется заряд q и проводник обладает потенциалом φ.

Элементарная работа, совершаемая силами поля при этом равна

$$\delta A = dq(0 - \varphi) = -dq\varphi$$

Приращение заряда проводника при этом $dq = C\,d\varphi$,

тогда $$\delta A = -C\,\varphi\,d\varphi,$$

но $$W = -\int \delta A + const,$$ тогда

$$W = \int C\varphi\,d\varphi + const = \frac{C\varphi^2}{2} + const$$

Примем const=0,

тогда $$W = \frac{C\varphi^2}{2}$$

Если использовать соотношение $C = \dfrac{q}{\varphi}$, то можно записать также

$$W = \frac{q^2}{2C} \quad \text{или} \quad W = \frac{q\varphi}{2}$$

Найдём выражение для *собственной энергии конденсатора.* Так как заряды обкладок равны, то процесс зарядки конденсатора можно представить, как перенос малых порций заряда dq с одной обкладки на другую. Элементарная работа, совершаемая силами поля при переносе заряда dq равна $\delta A = dq(\varphi_1 - \varphi_2) = -dq\Delta\varphi$,

но
$$W = -\int \delta A + const$$

тогда
$$W = \int dq\Delta\varphi + const = \int \frac{qdq}{C} + const = \frac{q^2}{2C} + const$$

Принимая const=0, получим

$$W = \frac{q^2}{2C}$$ или, учитывая что $q = C\,\Delta\varphi$,

$$W = \frac{C\Delta\varphi^2}{2} \quad \text{или} \quad W = \frac{q\Delta\varphi}{2}$$

Энергия электрического поля

Можно поставить вопрос о локализации собственной энергии проводника и конденсатора. Где сосредоточена эта энергия: на зарядах или в окружающем проводник электрическом поле?

Решить вопрос в рамках электростатики невозможно, так как электростатическое поле неотделимо от создающих его зарядов. Изучение же переменных электрических полей позволяет заключить, что носителем энергии является поле.

Преобразуем, выражение для энергии конденсатора так, чтобы в него вошли характеристики поля – напряжённость или смещение. Сделаем это на примере плоского конденсатора. Энергия конденсатора равна:

$$W = \frac{C\Delta\varphi^2}{2}, \text{ где } C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Так как поле в конденсаторе однородно, то $\Delta\varphi = E\,d$.

Получим $W = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S E^2 d^2}{d2} = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 S d}{2} E^2 = \dfrac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} V$,

где $V = S\,d$ – объем занимаемый полем конденсатора.

Пространственное распределение энергии характеризуется плотностью энергии w, то есть энергией поля, заключённой в единице объема. Если энергия распределена равномерно, то плотность энергии $w = \frac{W}{V}$, если неравномерно, то $w = \frac{dW}{dV}$. Поскольку поле конденсатора однородно, то $w = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$,

то есть $w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$

Отметим, что полученное соотношение справедливо для любых электрических полей, в том числе неоднородных и переменных. Учитывая, что в изотропном диэлектрике $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$,

можно записать также $w = \frac{ED}{2}$

Зная пространственное распределение плотности энергии можно решить обратную задачу – найти энергию, заключенную в любом интересующем нас объеме V:

$$W = \int_V w(x, y, z)\,dV$$

ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Понятие об электрическом токе

Электрическим током называют любое упорядоченное движение носителей электрического заряда.

Электрический ток называется макроскопическим или током свободных зарядов, если он создается движением свободных носителей заряда. Макроток, создаваемый движением свободных зарядов в макроскопическом проводнике, называется *током проводимости*. Ток проводимости в металлах обусловлен движением электронов, в электролитах – движением положительных и отрицательных ионов, в газах – ионов и электронов.

Для того чтобы в проводнике возник электрический ток, необходимо создать в нем электрическое поле. При наличии поля на хаотическое движение свободных зарядов накладывается направленное движение: положительные заряды перемещаются в направлении поля, то есть в сторону убыли потенциала, отрицательные – против поля (в сторону возрастания потенциала).

Таким образом: *Наличие электрического поля и свободных электрических зарядов – непременное условие возникновения и существования тока.*

Поскольку электрический ток может быть обусловлен движением и положительных и отрицательных зарядов, то необходимо условиться о том, что принимать за направление тока. Независимо от природы носителей заряда за направление тока принимается направление движения положительных зарядов.

Количественной характеристикой интенсивности движения зарядов является *сила тока i – скалярная физическая величина, модуль которой равен абсолютной величине заряда, прошедшего через данную поверхность S за единицу времени.*

Если dq – заряд, прошедший через S за время dt, то

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Сила тока – величина алгебраическая: она может быть положительной и отрицательной. Если направление тока образует с нормалями к элементам S острые углы, то $i>0$, а если тупые, то $i < 0$ (направление нормалей выбирают произвольно).

Обычно интересуются током, протекающим через площадь S поперечного сечения проводника, поэтому под силой тока в проводнике будем подразумевать именно эту величину.

Если ток создается и положительными и отрицательными носителями заряда, то

$$|i| = \frac{|dq_+|}{dt} + \frac{|dq_-|}{dt},$$

где dq_+ и dq_- – положительный и отрицательный заряды, прошедшие через рассматриваемую поверхность за время dt.

Ток называется *постоянным* или стационарным, если он не изменяется ни по модулю, ни по направлению. Сила постоянного тока обозначается буквой I. Тогда для случая постоянного тока:

$$I = \frac{q}{t}$$

Ток называется *пульсирующим*, если он изменяется только по модулю.

Ток называется *переменным*, если он изменяется и по модулю и по направлению.

Может случиться, что ток распределяется по рассматриваемой поверхности неравномерно. Для характеристики распределения тока по поверхности, сквозь которую он течет, вводится векторная величина, называемая плотностью тока.

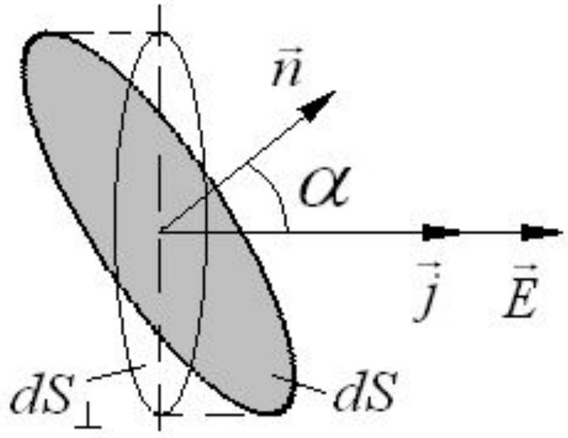

Рис. 1

Плотность тока $\vec{j}$ - вектор, численно равный модулю тока, протекающего через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к электрическому полю, вызвавшему этот ток, и совпадающий по направлению с направлением тока (т. е. направлением движения положительных зарядов). Если dS – элементарная площадка, α – угол между нормалью $\vec{n}$ к этой площадке и направлением поля в том месте, где расположена площадка, dI – ток, протекающий через dS, то числовое значение вектора $\vec{j}$ равно

$$j = \frac{|dI|}{dS\cos\alpha} = \frac{|dI|}{dS_{\perp}},$$

где $dS_{\perp} = dS\cos\alpha$ – проекция площадки dS на плоскость перпендикулярную к линиям поля (рис. 1).

Из этого следует, что сила тока, протекающего через элементарную площадку *dS,* ориентированную в проводнике произвольно, равна

$$dI = jdS\cos\alpha = \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

где $d\vec{S}$ - вектор, численно равный dS и направленный по нормали к площадке dS.

Чтобы найти силу тока, протекающего через всю поверхность S, например через площадь поперечного сечения проводника, нужно проинтегрировать по S.

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

То есть *сила тока, протекающего через данную поверхность S, есть поток вектора плотности тока* $\vec{j}$ *через эту поверхность.*

Закон Ома для однородного участка цепи

Ом в 1826 г. экспериментально установил закон, согласно которому сила электрического тока, текущего от точки 1 к точке 2 однородного участка цепи, пропорциональна разности потенциалов на концах этого участка (рис. 2). (Однородный – участок цепи, в котором на заряды действуют только электростатические силы).

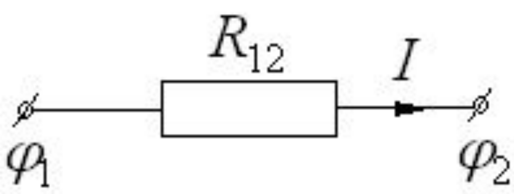

Рис. 2

$$I_{12} = G_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

G_{12} называется *электрической проводимостью* участка цепи.

Величина, обратная проводимости, называется *электрическим сопротивлением*.

$$\frac{1}{G_{12}} = R_{12}$$

Тогда
$$I_{12} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R_{12}}$$

Сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна разности потенциалов, приложенной к его концам, и обратно пропорциональна сопротивлению участка.

Сопротивление зависит от формы и размеров проводника, по которому течет ток, его химического состава и физического состояния (температуры, давления и т. д.). Если проводник однородный и имеет постоянное поперечное сечение, то его сопротивление рассчитывается по формуле (при данной температуре):

$$R_t = \rho_t \frac{l}{S},$$

где l – длина проводника,

S – площадь поперечного сечения,

ρ_t – удельное сопротивление, то есть сопротивление проводника единичной длины и единичного поперечного сечения.

Для большинства проводников удельное сопротивление изменяется с температурой по линейному закону:

$$\rho_t = \rho_0(1+\alpha t),$$

где ρ_0 - удельное сопротивление при $0^0 C$,

t - температура по Цельсию,

α - температурный коэффициент сопротивления.

Тогда
$$R_t = \rho_0(1+\alpha t)\frac{l}{S} = R_0(1+\alpha t),$$

где $R_0 = \rho_0 \dfrac{l}{S}$, т. е. сопротивление при $0^0 C$.

Вернемся к закону Ома. Записанная нами формула – интегральная. В ней отражается связь силы тока, протекающего через любое сечение проводника, с разностью потенциалов на его концах, то есть связь между величинами, относящимся к разным точкам проводника. Приведем это выражение к дифференциальному виду.

Выберем внутри проводника в окрестностях интересующей нас точки M элементарный объем в виде прямоугольного цилиндра, образующие которого параллельны вектору $\vec{j}$ в точке M (рис. 3). Пусть длина выделенного цилиндра dl, площадь основания dS. Электрическое поле внутри такого элементарного объема можно считать однородным, сопротивление выделенного объема:

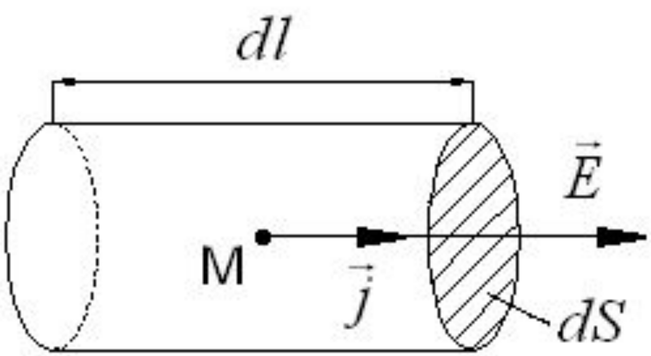

Рис. 3

$$dR = \rho \frac{dl}{dS}$$

Абсолютное значение разности потенциалов между торцами цилиндра равно:

$$|d\varphi| = Edl$$

где E – модуль напряженности поля $\vec{E}$ в точке M.

Сила тока, протекающего через поперечное сечение цилиндра по абсолютной величине равна:

$$|dI| = jdS$$

Применив теперь закон Ома: $|dI| = \dfrac{|d\varphi|}{dR}$, получим $jdS = \dfrac{E \cdot dl \cdot dS}{\rho dl}$

или $$j = \frac{1}{\rho} E$$

Вектор плотности тока $\vec{j}$ в каждой точке проводника направлен так же, как и вектор напряженности $\vec{E}$, поэтому равенство можно записать в векторном виде:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$

Величина, обратная удельному сопротивлению, называется удельной проводимостью или электропроводимостью $\frac{1}{\rho} = \sigma$

Тогда окончательно $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ – закон Ома для однородного участка цепи в дифференциальной форме.

Плотность тока $\vec{j}$ в каждой точке однородного участка цепи пропорциональна напряженности электрического поля в этой же точке и совпадает по направлению с вектором $\vec{E}$.

Закон Джоуля-Ленца

При прохождении электрического тока по проводнику энергия тока превращается в другие виды энергии: во внутреннюю энергию проводника и окружающей среды (при нагревании) в механическую энергию проводника (при его движении в магнитном поле) и т.д.

Если проводник, по которому течет ток, неподвижен, в проводнике под действием тока не проходит химических реакций и температура не изменяется (стационарное состояние), то вся энергия, выделяющаяся в проводнике, отдается в окружающую среду в форме теплопередачи. Джоуль (Англия) и Ленц (Россия) установили экспериментальный закон, согласно которому *количество тепла, отдаваемого проводником в окружающую среду, пропорционально сопротивлению проводника, квадрату силы тока и времени прохождения тока.*

$$Q_{12} = I^2 R_{12} t$$

В тех случаях, когда сила тока в проводнике изменяется по определенному закону $I = I(t)$ в течение некоторого промежутка времени от момента t_1 до момента t_2, количество тепла, выделяемое в проводнике, рассчитывается интегрированием:

$$Q_{12} = \int_{t_1}^{t_2} I^2(t)\, R_{12}\, dt.$$

Преобразуем теперь закон Джоуля-Ленца к дифференциальному виду. Для этого опять выделим внутри проводника элементарный объем в виде прямого цилиндра, образующие которого параллельны вектору плотности тока (рис. 3) и подсчитаем количества тепла, которое выделяет этот объем за время dt.

По закону Джоуля-Ленца это количество тепла δQ равно

$$\delta Q = (jdS)^2 \rho \frac{dl}{dS} dt = \rho j^2 dl dS dt = \rho j^2 dV dt,$$

где dV – объем цилиндра.

Количество тепла, выделяемое единицей объема проводника за единицу времени, называется *плотностью тепловой мощности тока (или удельной тепловой мощностью)*

$$w = \frac{\delta Q}{dVdt}$$

Тогда $w = \rho\, j^2$

Наконец, учитывая, что $j = \sigma E$ и $\rho = 1/\sigma$, получим закон Джоуля-Ленца в дифференциальной форме:

$$w = \sigma E^2$$

Плотность тепловой мощности тока в данной точке проводника пропорциональна квадрату напряженности электрического поля в этой же точке.

Электродвижущая сила.
Закон Ома для полной цепи

Для возникновения в проводнике электрического тока необходимо, чтобы внутри проводника существовало электрическое поле, признаком которого является наличие разности потенциалов на концах проводника.

Создать электрическое поле в электрической цепи можно за счет имеющихся в ней зарядов. Для этого достаточно разделить заряды противоположных знаков, сосредоточив в одном месте цепи избыточный положительный заряд, в другом – отрицательный (чтобы создать заметные поля, достаточно разделить ничтожно малую часть зарядов).

Разделение разноименных зарядов не может быть осуществлено силами электростатического (кулоновского) взаимодействия, так как эти силы не только не разъединяют, а наоборот, стремятся соединить заряды противоположных знаков, что неизбежно приводит к выравниванию потенциалов и исчезновению поля в проводниках. Разделение разноименных зарядов в электрической цепи может быть осуществлено только силами неэлектрического происхождения.

Силы, разделяющие заряды в электрической цепи, создающие в ней электростатическое поле, называются сторонними. Устройства, в которых действуют сторонние силы, называются *источниками тока.*

Участок цепи, в котором на заряды действуют только электростатические силы, называется, как уже говорилось, *однородным*. Участок, в котором на заряды одновременно действуют и электростатические, и сторонние силы, называется *неоднородным*. Иными словами, неоднородный участок – это участок, содержащий источник тока. При перемещении зарядов по такому участку электростатические и сторонние силы совершают работу. Работу сторонних сил характеризует *электродвижущая сила* (сокращенно ЭДС).

Электродвижущей силой на данном участке цепи 1-2 называется скалярная физическая величина, численно равная работе, совершаемая сторонними силами при перемещении единичного, положительного точечного заряда из точки 1 в точку 2

$$\varepsilon_{12} = \frac{A_{стор1-2}}{q_+}$$

Сила тока в замкнутой цепи прямо пропорциональна ЭДС и обратно пропорционально полному сопротивлению цепи – закон Ома для полной цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}$$

Мощность электрического тока на однородном участке цепи с сопротивлением R_{12} достаточно просто можно найти как отношение работы, совершаемой силами электростатического поля по перемещению в проводнике зарядов, ко времени, за которое совершается эта работа:

$$P_{12} = \frac{A_{12}}{t} = \frac{q\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{t} = \frac{I\,t\left(\varphi_1 - \varphi_2\right)}{t} = I \cdot I\,R_{12} = I^2 R_{12}\,.$$

Таким образом, *мощность электрического тока на участке цепи пропорциональна квадрату силы тока и сопротивлению участка.*

Правила Кирхгофа

Первое правило Кирхгофа гласит, что алгебраическая сумма токов в каждом узле любой цепи равна нулю. При этом направленный к узлу ток принято считать положительным, а направленный от узла — отрицательным. Алгебраическая сумма токов, направленных к узлу, равна сумме токов, направленных от узла.

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0$$

Второе правило Кирхгофа (правило напряжений Кирхгофа) гласит, что алгебраическая сумма падений напряжений на всех ветвях, принадлежащих любому замкнутому контуру цепи, равна алгебраической сумме ЭДС ветвей этого контура. Если в контуре нет источников ЭДС (идеализированных генераторов напряжения), то суммарное падение напряжений равно нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k R_k = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$