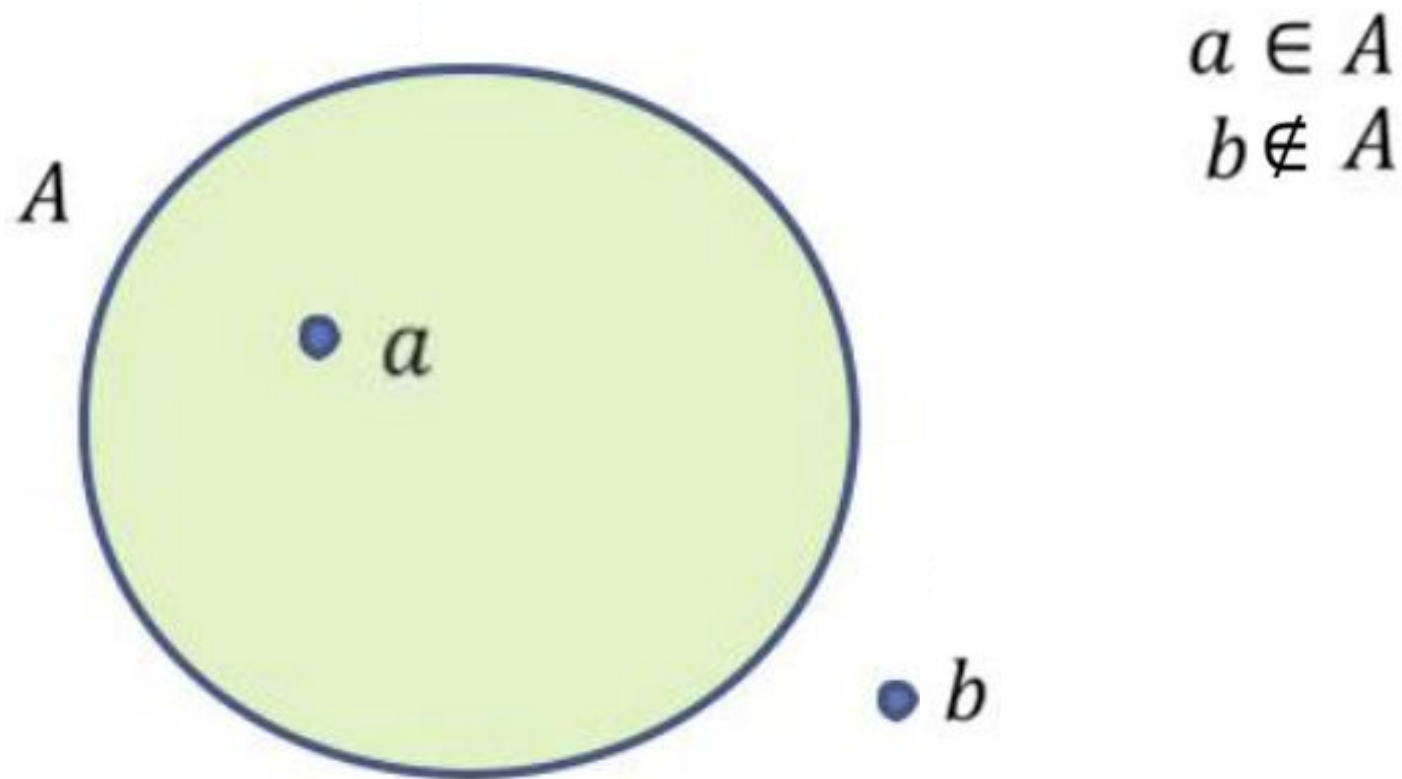


# **НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МНОЖЕСТВАХ**

- **Множество** – это объект, образованный за счет мысленного собирания в единое целое каких-либо предметов, в том числе, возможно, и самих множеств.
- Элементы множества обозначают буквами латинского алфавита  $a, b, c, \dots$ , а сами множества – прописными буквами  $A, B, C, \dots$
- **Множество задано**, если известно, из каких элементов (предметов) оно состоит.

- **Пустое множество** не содержит ни одного элемента и обозначается  $\emptyset$  .
- Запись  $a \in A$  означает, что элемент  $a$  **принадлежит** множеству  $A$  .
- Множества изображают с помощью диаграмм **Эйлера-Венна**



$a \in A$   
 $b \notin A$

- Множества бывают **конечные** и **бесконечные**.

Примеры:

- 1) множество жителей г. Москвы конечное;
- 2) множество натуральных чисел бесконечное.

- **Задание множеств** осуществляется несколькими способами

1. Если множество содержит конечное число элементов и легко обозримо, оно может быть задано **перечислением** его элементов. Так, список лиц, входящих в некоторую учебную группу, задает множество студентов этой группы.

Запись  $M = \{a, b, c\}$  означает, что множество  $M$  состоит из трех элементов  $a, b$  и  $c$ .

2. Множество может быть задано **аналитически** – посредством некоторого признака, присущего всем его и только его элементам. Например, фраза «множество целых чисел таких, что они делятся на 2» задает множество четных чисел. В математике множества часто задают формулами. Например, если  $A$  – множество корней уравнения  $f(x) = 0$ , то  $A = \{x : f(x) = 0\}$  (читается: "множество  $A$  состоит из всех элементов  $x$  таких, что  $f(x) = 0$ ").

3. Множество может быть задано **алгоритмически** – некоторым алгоритмом, порождающим из одних элементов множества другие его элементы. Например, множество всех натуральных чисел можно породить из числа 1 процедурой присоединения 1 к ранее уже построенному числу.



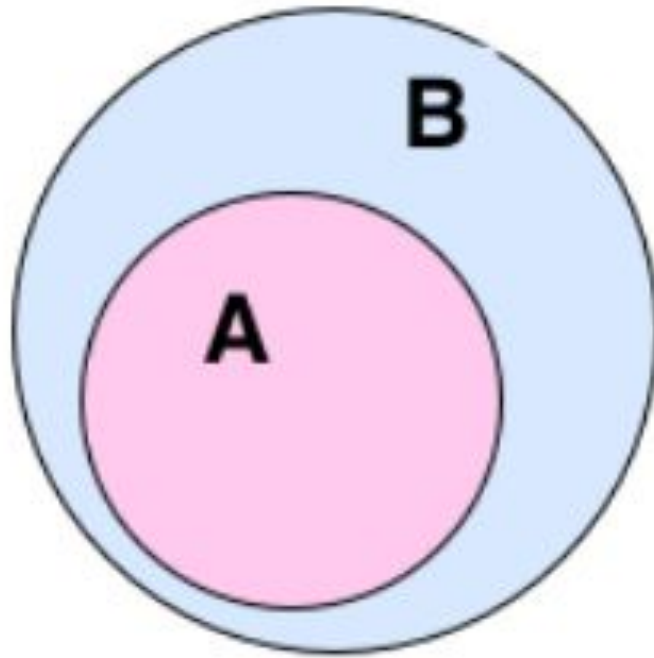
Другой пример алгоритмического задания множества.

Пусть  $M = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$  — множество степеней числа 2. Тогда его можно задать алгоритмом:

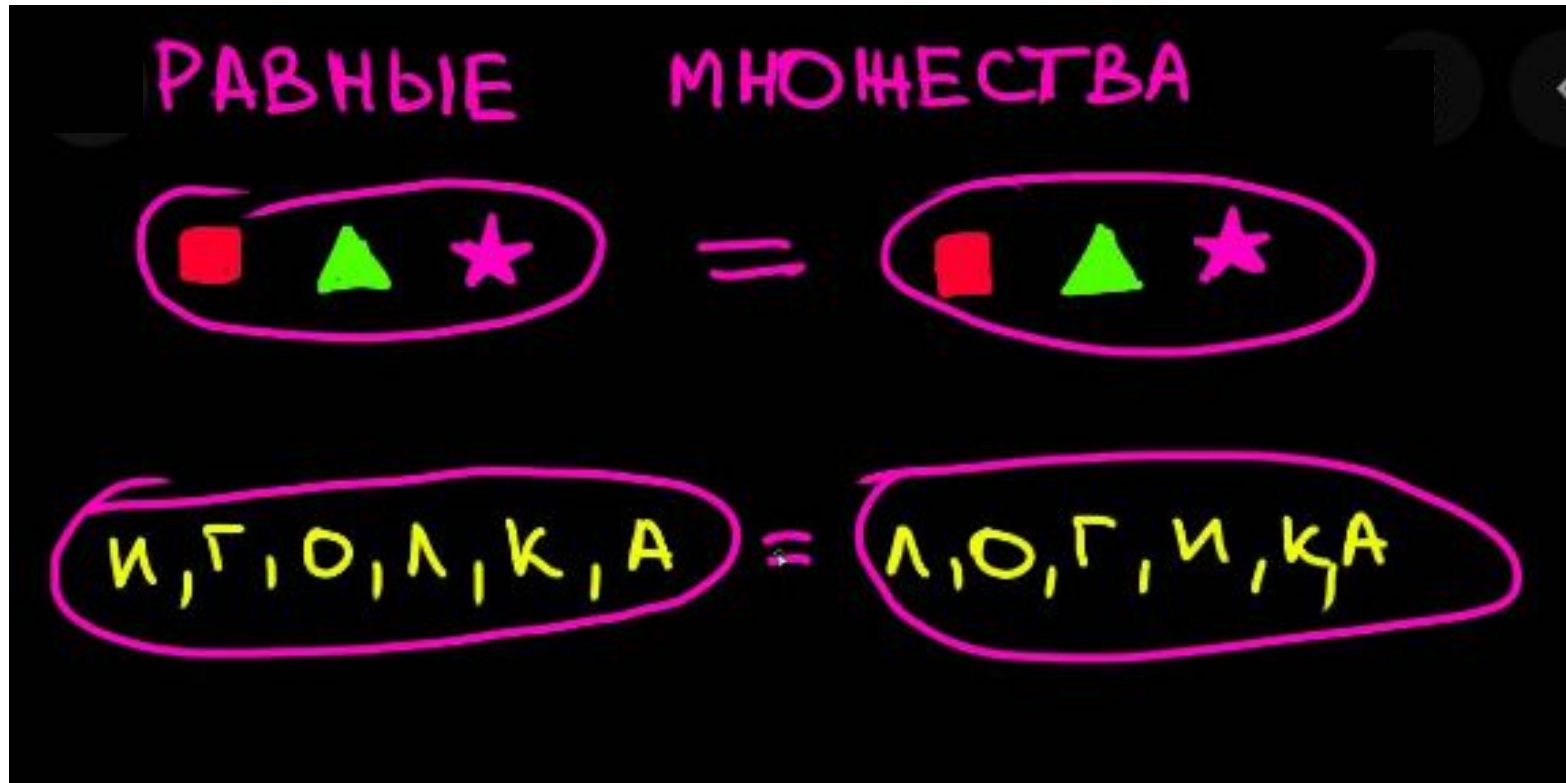
1)  $1 \in M$ ;

2) если  $x \in M$ , то  $2x \in M$ .

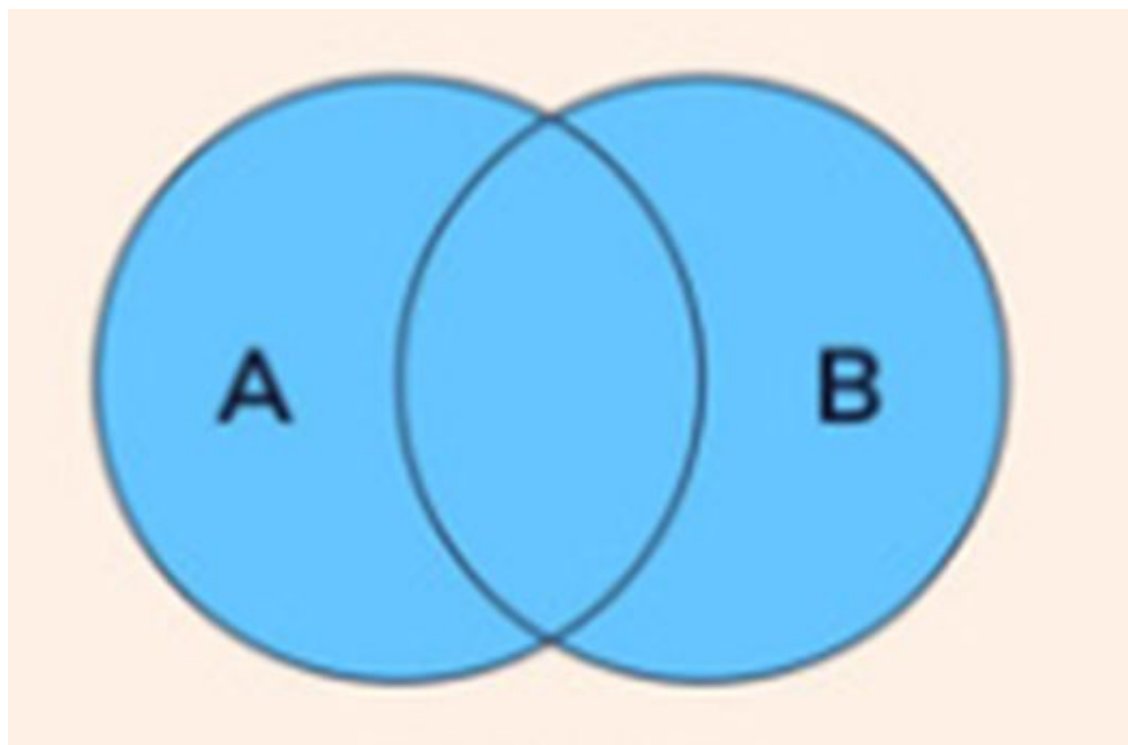
- Пусть  $A$  и  $B$  – два множества. Если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$  (т.е. из условия  $x \in A$  следует, что  $x \in B$ ), то  $A$  называют **подмножеством** множества  $B$  и пишут  $A \subset B$ .



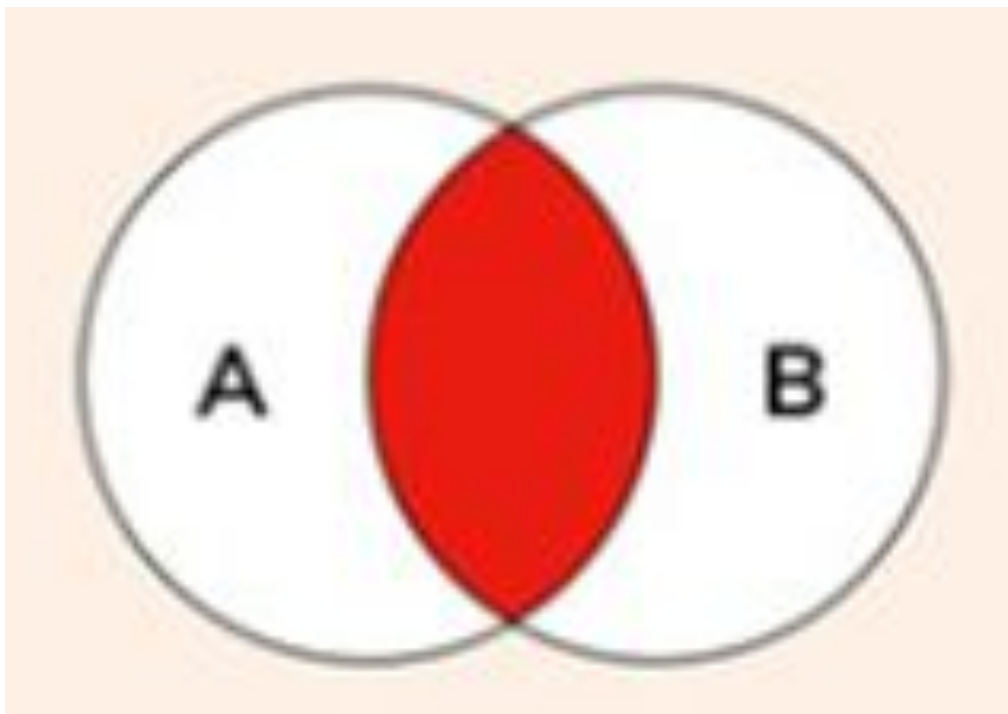
- Множества  $A$  и  $B$  называют **равными** и пишут  $A = B$ , если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ .
- Равные множества состоят из одних и тех же элементов.



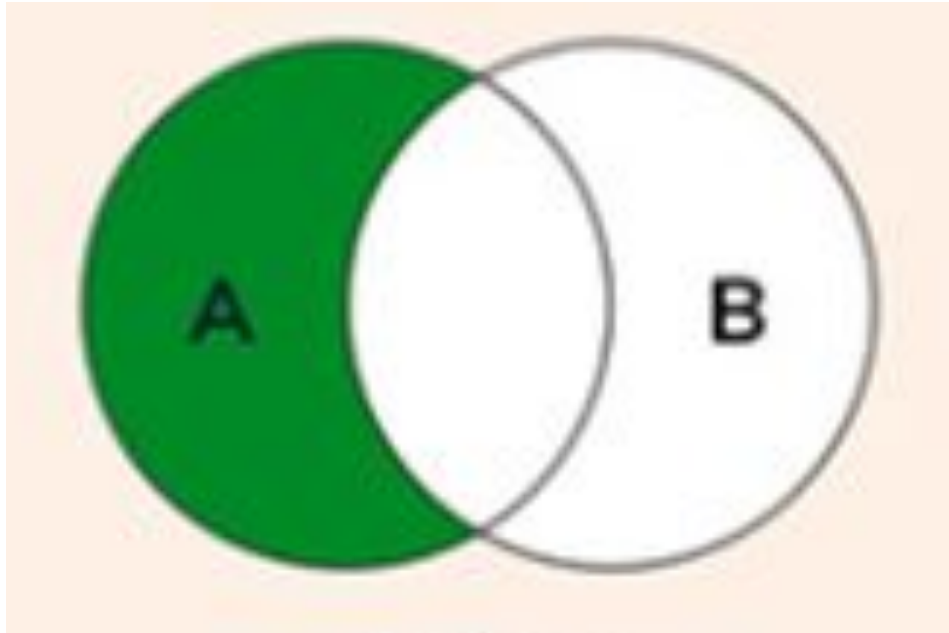
- $A \sqcup B$  – **объединение** множеств  $A$  и  $B$   
( $x \in A \sqcup B$ , если  $x \in A$  или  $x \in B$ );



- $A \cap B$  – **пересечение** множеств  $A$  и  $B$   
( $x \in A \cap B$ , если  $x \in A$  и  $x \in B$ ).



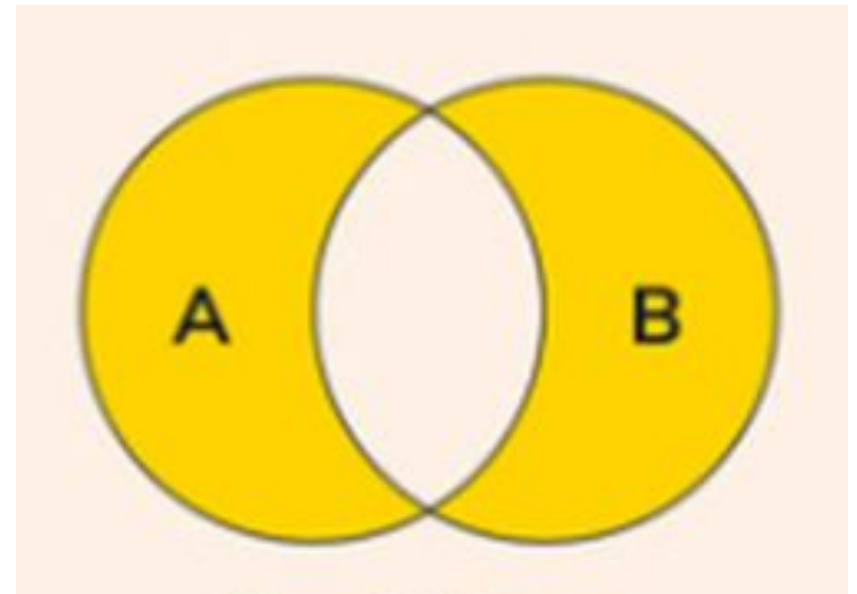
- $A \setminus B$  – **вычитание** множеств  $A$  и  $B$   
( $x \in A \setminus B$ , если  $x \in A$  и  $x \notin B$  ).



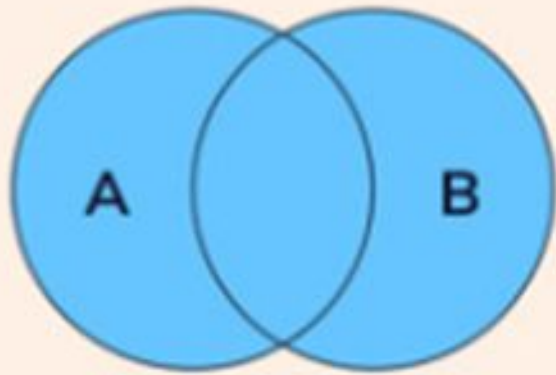
- Симметрической разностью  $A \Delta B$

множеств  $A$  и  $B$  называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств либо  $A$ , либо  $B$ .

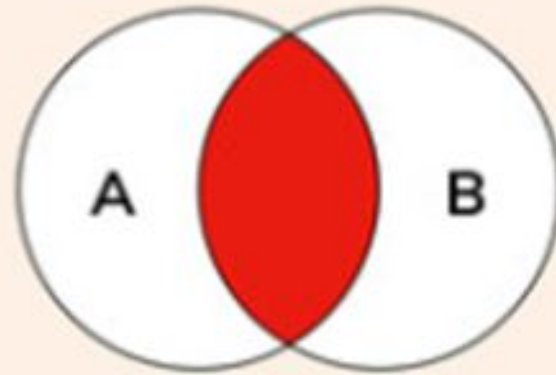
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



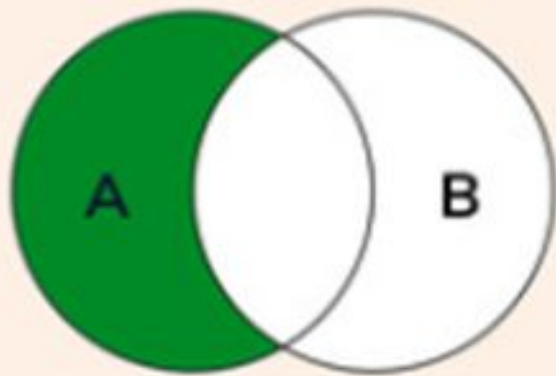
- Верно равенство  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$



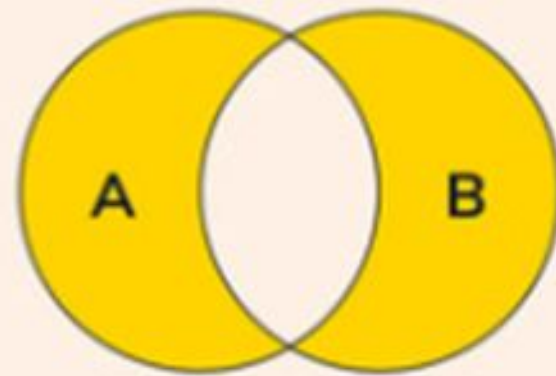
Union



Intersection

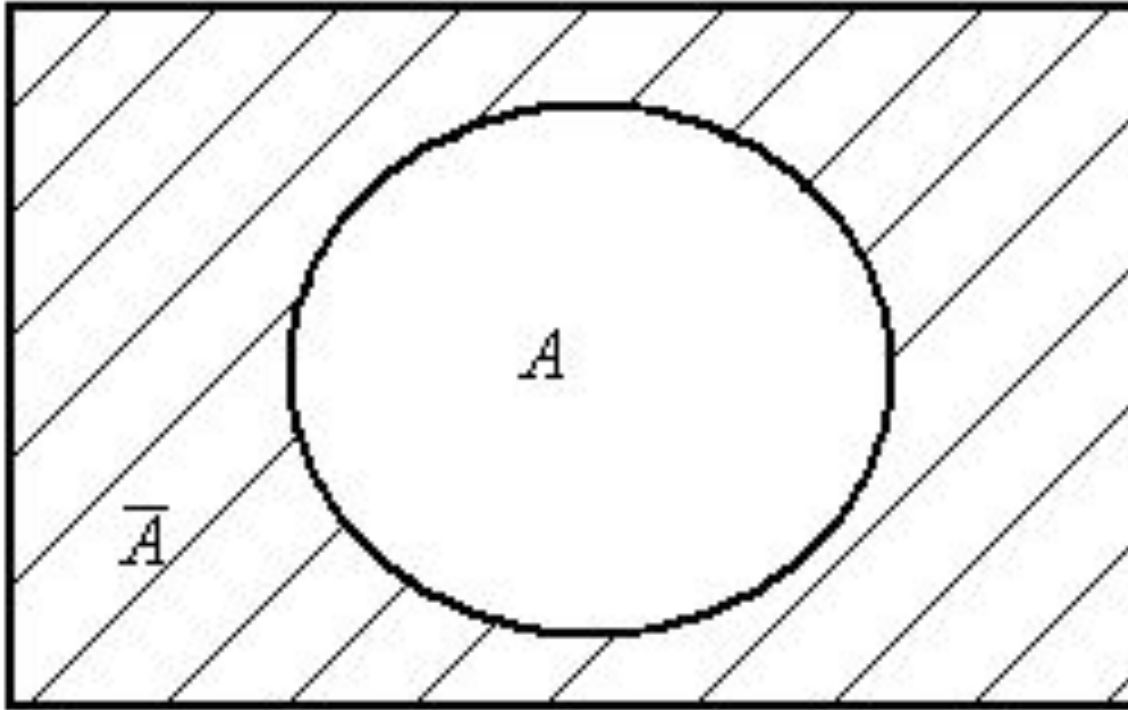


Difference



Symmetric Difference





- Если  $U$  – универсальное множество, то разность  $U \setminus A$  называется **дополнением** множества  $A$  и обозначается  $\overline{A}$ .

$$\overline{A} = \{x : x \notin A, x \in U\}$$

Декартово произведение множеств  $A$  и  $B$  обозначается  $A \times B$  и состоит из всех упорядоченных пар  $(x; y)$  таких, что  $x \in A$  и  $y \in B$  .

Таким образом,

$$A \times B = \{(x; y) : x \in A, y \in B\}$$

**Пример.** Даны множества  $X = \{1, 4, a, d\}$ ,  
 $Y = \{1, d\}$ ,  $Z = \{4, a, \beta\}$ .

Найдите  $X \cap Y$ ,  $X \cap Z$ ,  $(Y \cap Z) \setminus X$ ,  $(X \setminus Z) \cap Y$ ,  
 $X \Delta Z$ ,  $Z \times Y$ .

**Решение.**  $X \cap Y = \{1, 4, a, d\}$ ,  $X \cap Z = \{4, a\}$ ,  
 $(Y \cap Z) \setminus X = \{\beta\}$ ,  $(X \setminus Z) \cap Y = \{1, d\}$ ,

$X \Delta Z = \{1, d, \beta\}$ ,

$Z \times Y = \{(4;1), (4;d), (a;1), (a;d), (\beta;1), (\beta;d)\}$ .

**Вопрос:**  $Y \times Z = ?$

- Обозначим через  $|A|$  число элементов конечного множества  $A$ .
- Если множества  $A$  и  $B$  не имеют ни одного общего элемента, т.е.  $A \cap B = \emptyset$ , то говорят, что множества  $A$  и  $B$  не пересекаются.
- Множество  $A \times A$  обозначают  $A^2$  и называют декартовым квадратом множества  $A$ .
- Если множество  $A$  конечно и  $|A| = n$ , то  $|A^2| = n^2$ .

## Правило умножения

Если элемент  $x$  можно выбрать  $m$  способами, а элемент  $y$  можно выбрать  $n$  способами, то упорядоченную пару  $(x, y)$  можно выбрать  $m \cdot n$  способами.

Иначе говоря, для любых конечных множеств  $A$  и  $B$  верна формула

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

# Правило сложения

Число элементов множества  $A \boxtimes B$  находится по формуле

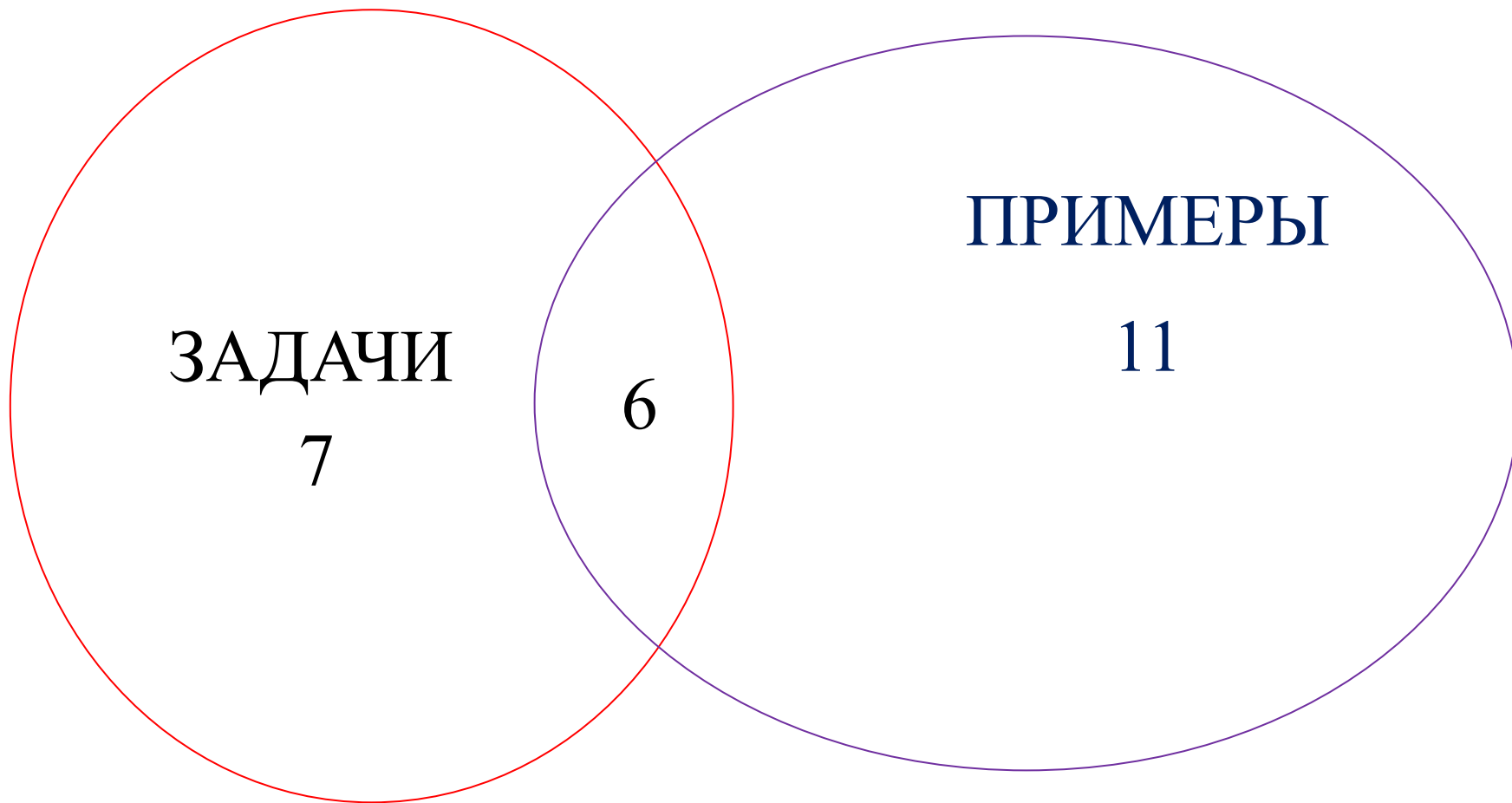
$$|A \boxtimes B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

В частности, если множества  $A$  и  $B$  не пересекаются, т.е.  $A \cap B = \emptyset$ , то

$$|A \boxtimes B| = |A| + |B|$$

**Пример.** В группе из 27 студентов 17 пишут стихи, а 13 летают во сне. Трое студентов не умеют ни того, ни другого. Найдите число студентов, которые и стихи сочиняют и во сне летают.

**Решение.** По условию, хотя бы одним даром обладают  $27 - 3 = 24$  студента. Значит, только летают (а стихи не пишут)  $24 - 17 = 7$  чел., а  $13 - 7 = 6$  чел. и стихосложением занимаются и летают.



ЗАДАЧИ

7

6

ПРИМЕРЫ

11



**Пример.** Из 50 студентов курса 42 изучают английский язык, 31 – немецкий язык, а 25 – английский и немецкий языки. Сколько студентов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

**Решение.** Пусть  $A$  – множество студентов курса, изучающих английский язык,  $B$  – множество студентов курса, изучающих немецкий язык,  $C$  – множество всех студентов курса. По условию задачи  $|A| = 42$ ,  $|B| = 31$ ,  $|A \cap B| = 25$ ,  $|C| = 50$ .

Требуется найти число студентов курса, не изучающих ни английского, ни немецкого языка.

1 способ.

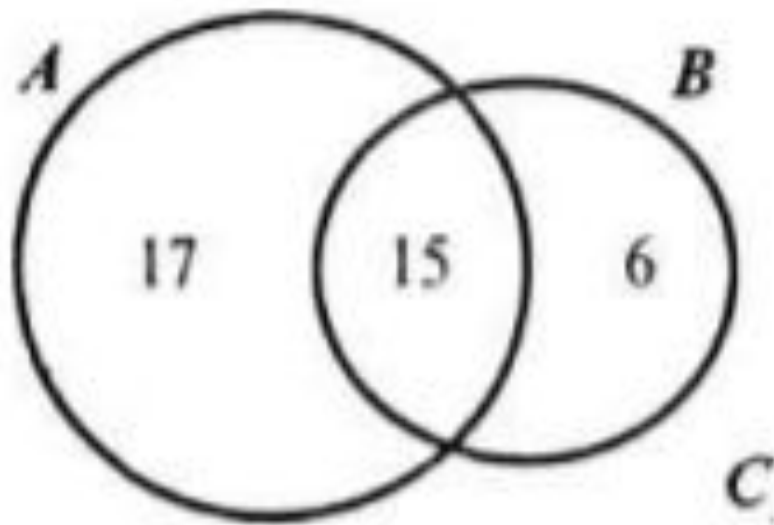
1) Найдем число элементов в объединении данных множеств. Для этого воспользуемся формулой правила сложения:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 42 + 31 - 25 = 48.$$

2) Найдем число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки:  $50 - 48 = 2$ .

2 способ.

Изобразим данные множества при помощи кругов Эйлера и определим число элементов в каждом из непересекающихся подмножеств. Поскольку в пересечении множеств  $A$  и  $B$  содержится 25 элементов, то



только английский (т. е.  $25 = 17$ ), а студентов, немецкий, - 6 (т. е.  $25 - 17 = 8$ ).  
-  $25 + 6 = 48$ , и, студентов курса, зучают ни английский, ни немецкий, - 2.

Ответ: 2

*Спасибо за внимание!*