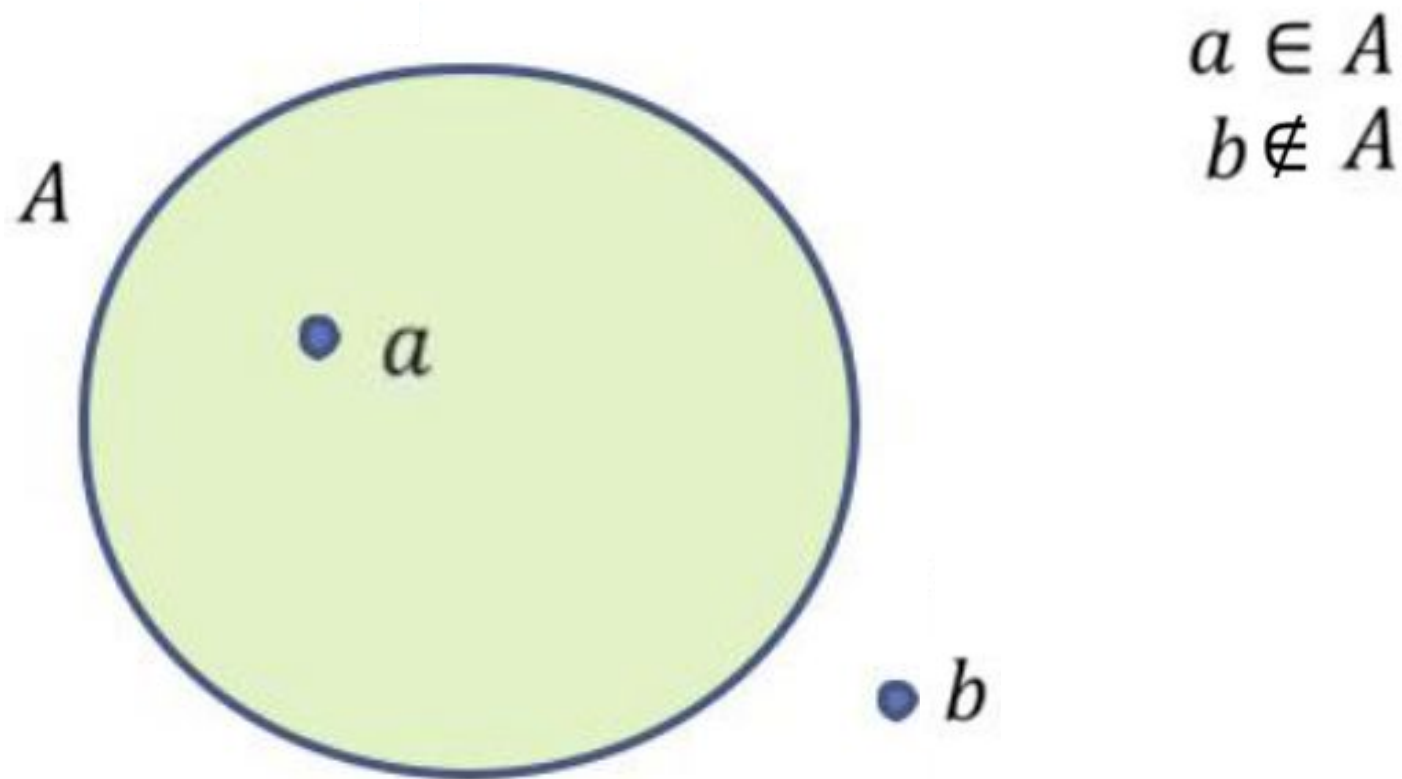


НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МНОЖЕСТВАХ

- **Множество** – это объект, образованный за счет мысленного собирания в единое целое каких-либо предметов, в том числе, возможно, и самих множеств.
- Элементы множества обозначают буквами латинского алфавита a, b, c, \dots , а сами множества – прописными буквами A, B, C, \dots
- **Множество задано**, если известно, из каких элементов (предметов) оно состоит.

- Пустое множество не содержит ни одного элемента и обозначается \emptyset .
- Запись $a \in A$ означает, что элемент a принадлежит множеству A .
- Множества изображают с помощью диаграмм Эйлера-Венна



$a \in A$

$b \notin A$

- Множества бывают **конечные** и **бесконечные**.

Примеры:

- 1) множество жителей г. Москвы конечное;
- 2) множество натуральных чисел бесконечное.

- **Задание множеств** осуществляется несколькими способами

1. Если множество содержит конечное число элементов и легко обозримо, оно может быть задано **перечислением** его элементов. Так, список лиц, входящих в некоторую учебную группу, задает множество студентов этой группы.

Запись $M = \{a, b, c\}$ означает, что множество M состоит из трех элементов a, b и c .

2. Множество может быть задано **аналитически** – посредством некоторого признака, присущего всем его и только его элементам. Например, фраза «множество целых чисел таких, что они делятся на 2» задает множество четных чисел. В математике множества часто задают формулами. Например, если A – множество корней уравнения $f(x) = 0$, то $A = \{x : f(x) = 0\}$ (читается: "множество A состоит из всех элементов x таких, что $f(x) = 0$ ").

3. Множество может быть задано **алгоритмически** – некоторым алгоритмом, порождающим из одних элементов множества другие его элементы. Например, множество всех натуральных чисел можно породить из числа 1 процедурой присоединения 1 к ранее уже построенному числу.

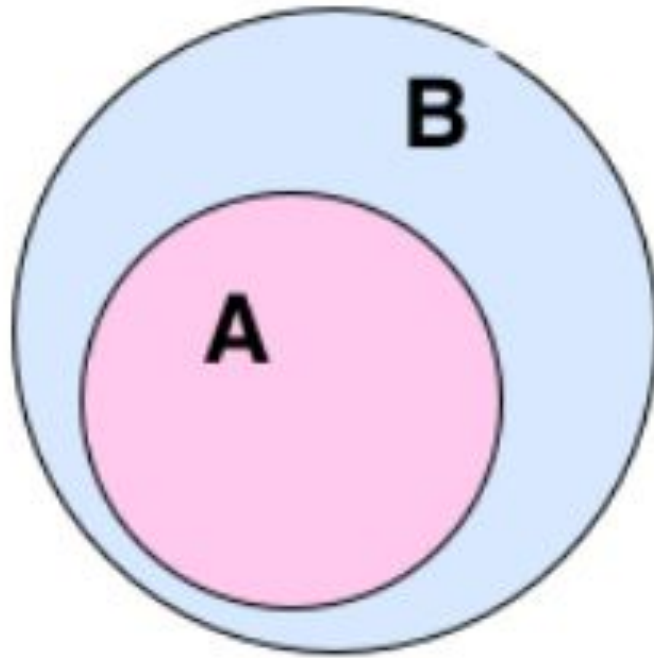
Другой пример алгоритмического задания множества.

Пусть $M = \{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$ — множество степеней числа 2. Тогда его можно задать алгоритмом:

1) $1 \in M$;

2) если $x \in M$, то $2x \in M$.

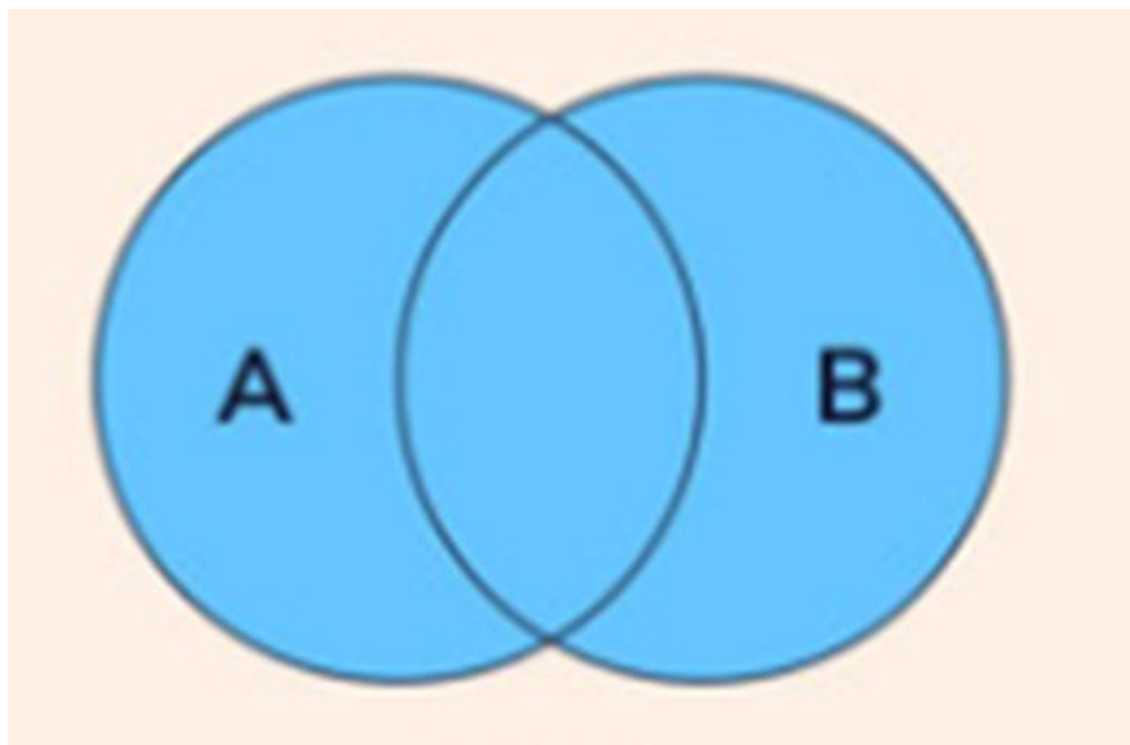
- Пусть A и B – два множества. Если каждый элемент множества A является элементом множества B (т.е. из условия $x \in A$ следует, что $x \in B$), то A называют **подмножеством** множества B и пишут $A \subset B$.



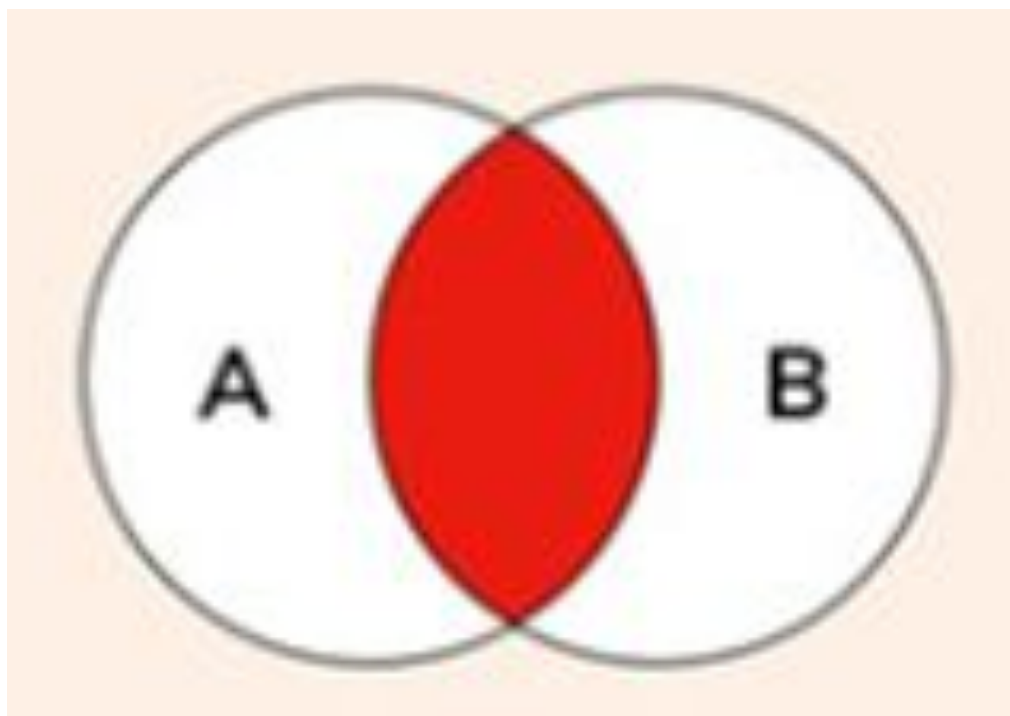
- Множества A и B называют **равными** и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$.
- Равные множества состоят из одних и тех же элементов.



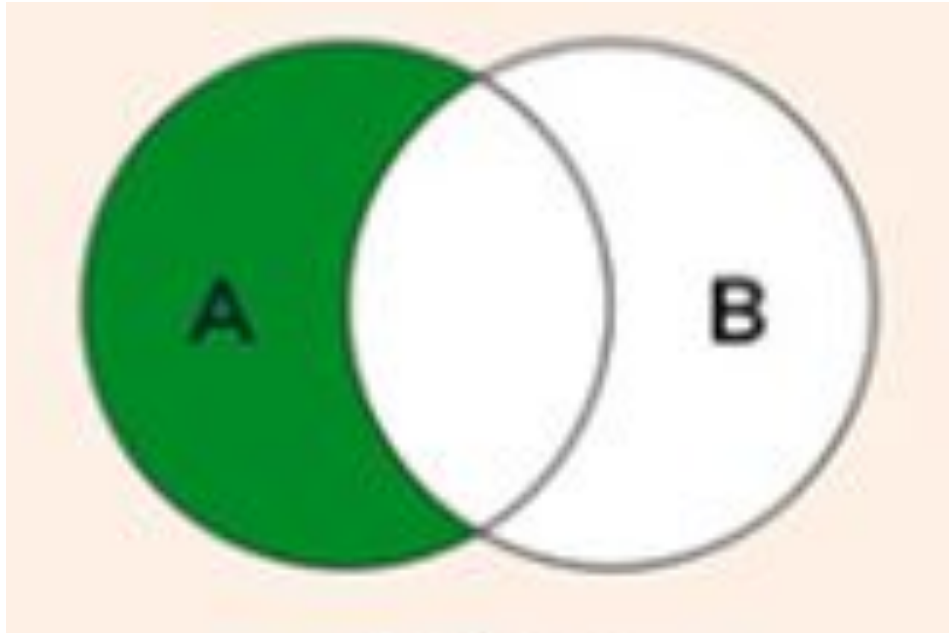
- $A \cup B$ – **объединение** множеств A и B
($x \in A \cup B$, если $x \in A$ или $x \in B$);



- $A \cap B$ – **пересечение** множеств A и B
($x \in A \cap B$, если $x \in A$ и $x \in B$).



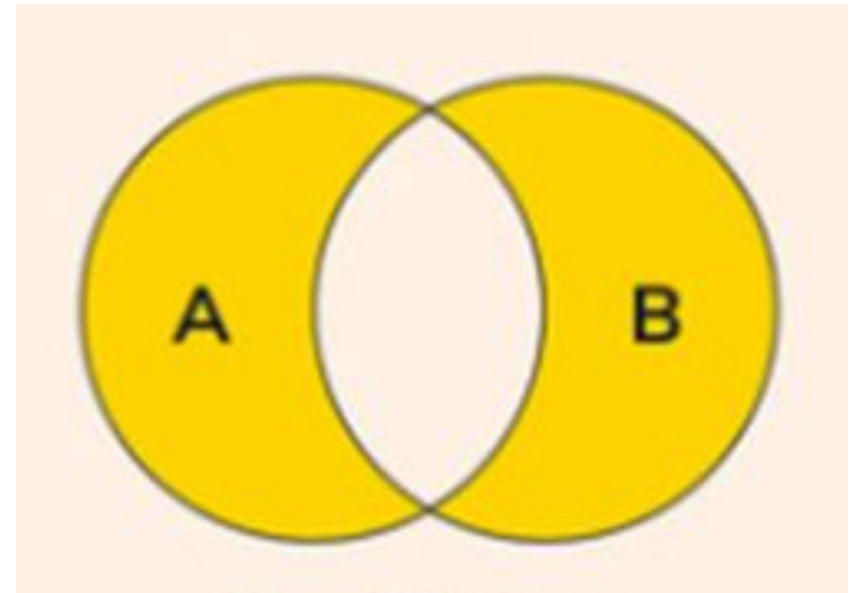
- $A \setminus B$ – **вычитание** множеств A и B
($x \in A \setminus B$, если $x \in A$ и $x \notin B$).



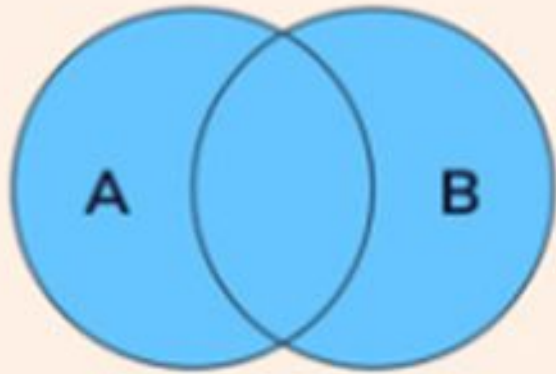
- Симметрической разностью $A \Delta B$

множеств A и B называется множество, содержащее те и только те элементы, которые принадлежат одному из множеств либо A , либо B .

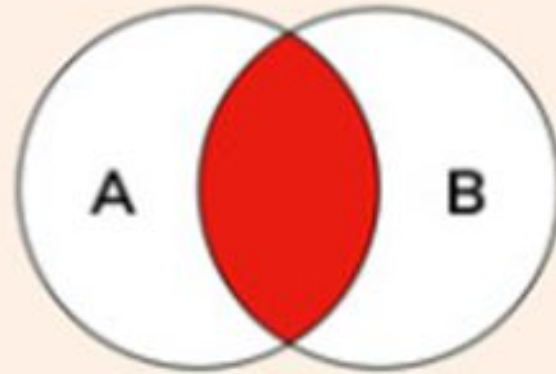
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$



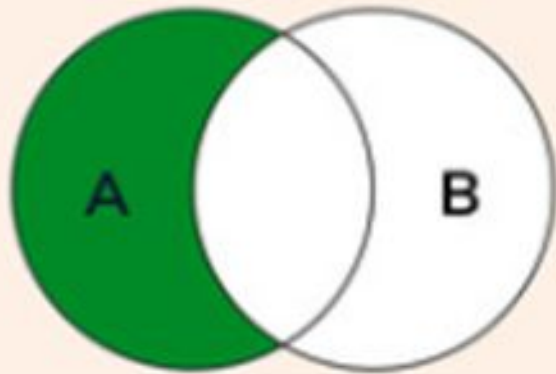
- Верно равенство $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$



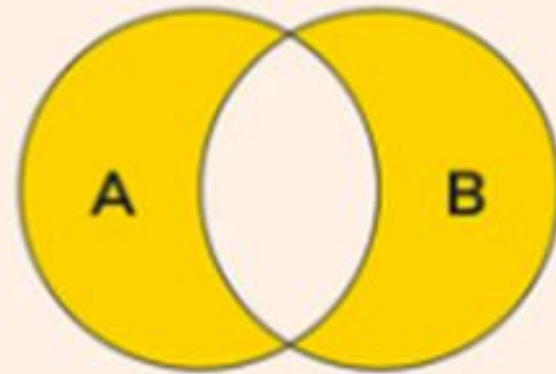
Union



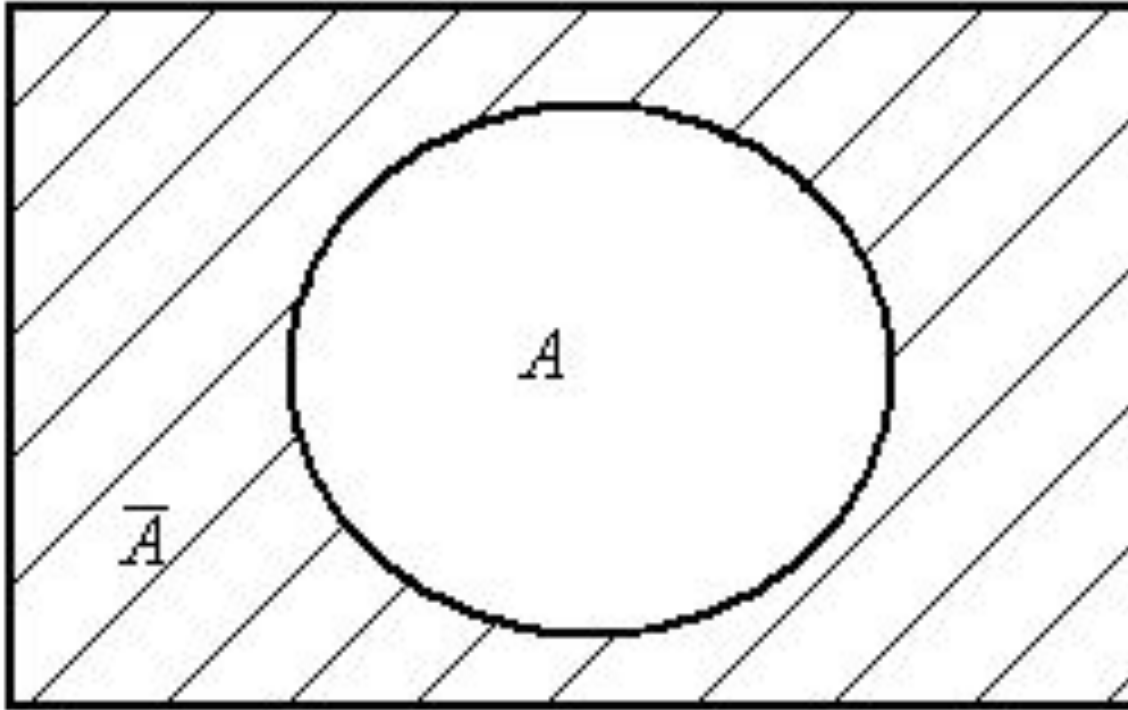
Intersection



Difference



Symmetric Difference



- Если U – универсальное множество, то разность $U \setminus A$ называется **дополнением** множества A и обозначается \bar{A} .

$$\bar{A} = \{x : x \notin A, x \in U\}$$

Декартово произведение множеств A и B обозначается $A \times B$ и состоит из всех упорядоченных пар $(x; y)$ таких, что $x \in A$ и $y \in B$.

Таким образом,

$$A \times B = \{(x; y) : x \in A, y \in B\}$$

Пример. Даны множества $X = \{1, 4, a, d\}$,
 $Y = \{1, d\}$, $Z = \{4, a, \beta\}$.

Найдите $X \cap Y$, $X \cap Z$, $(Y \cap Z) \setminus X$, $(X \setminus Z) \cap Y$,
 $X \Delta Z$, $Z \times Y$.

Решение. $X \cap Y = \{1, 4, a, d\}$, $X \cap Z = \{4, a\}$,
 $(Y \cap Z) \setminus X = \{\beta\}$, $(X \setminus Z) \cap Y = \{1, d\}$,

$X \Delta Z = \{1, d, \beta\}$,

$Z \times Y = \{(4;1), (4;d), (a;1), (a;d), (\beta;1), (\beta;d)\}$.

Вопрос: $Y \times Z = ?$

- Обозначим через $|A|$ число элементов конечного множества A .
- Если множества A и B не имеют ни одного общего элемента, т.е. $A \cap B = \emptyset$, то говорят, что множества A и B не пересекаются.
- Множество $A \times A$ обозначают A^2 и называют декартовым квадратом множества A .
- Если множество A конечно и $|A| = n$, то $|A^2| = n^2$.

Правило умножения

Если элемент x можно выбрать m способами, а элемент y можно выбрать n способами, то упорядоченную пару (x, y) можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Иначе говоря, для любых конечных множеств A и B верна формула

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Правило сложения

Число элементов множества $A \boxtimes B$ находится по формуле

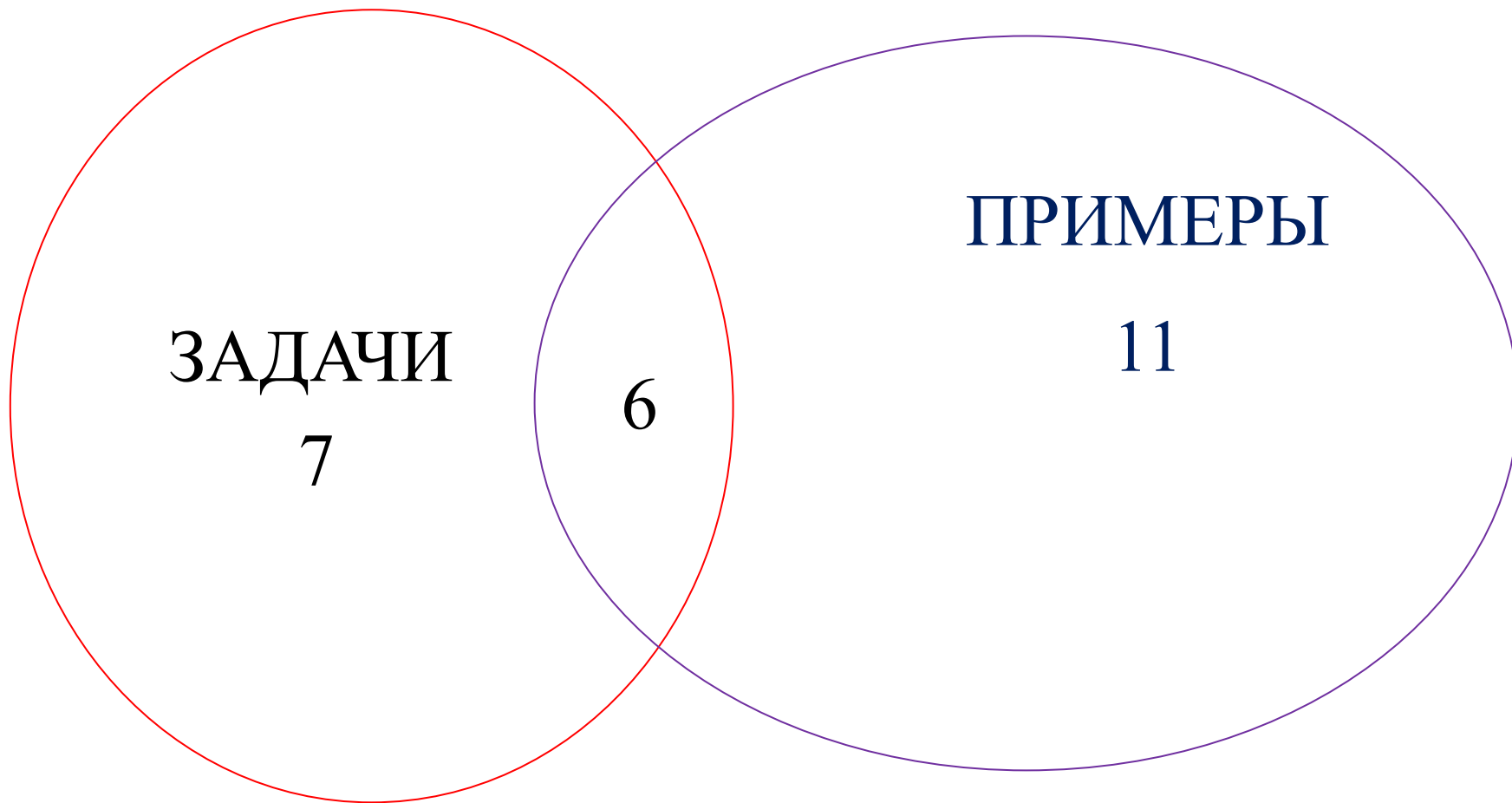
$$|A \boxtimes B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

В частности, если множества A и B не пересекаются, т.е. $A \cap B = \emptyset$, то

$$|A \boxtimes B| = |A| + |B|$$

Пример. В группе из 27 студентов 17 пишут стихи, а 13 летают во сне. Трое студентов не умеют ни того, ни другого. Найдите число студентов, которые и стихи сочиняют и во сне летают.

Решение. По условию, хотя бы одним даром обладают $27 - 3 = 24$ студента. Значит, только летают (а стихи не пишут) $24 - 17 = 7$ чел., а $13 - 7 = 6$ чел. и стихосложением занимаются и летают.



ЗАДАЧИ

7

6

ПРИМЕРЫ

11

Пример. Из 50 студентов курса 42 изучают английский язык, 31 – немецкий язык, а 25 – английский и немецкий языки. Сколько студентов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

Решение. Пусть A – множество студентов курса, изучающих английский язык, B – множество студентов курса, изучающих немецкий язык, C – множество всех студентов курса. По условию задачи $|A| = 42$, $|B| = 31$, $|A \cap B| = 25$, $|C| = 50$.

Требуется найти число студентов курса, не изучающих ни английского, ни немецкого языка.

1 способ.

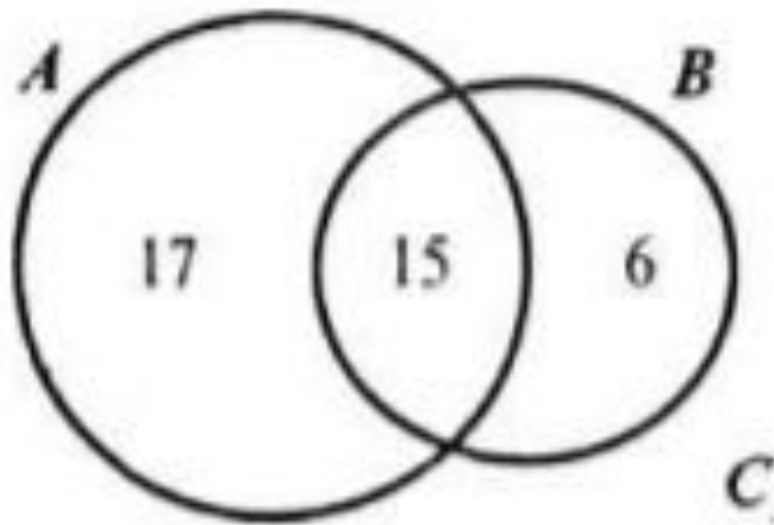
1) Найдем число элементов в объединении данных множеств. Для этого воспользуемся формулой правила сложения:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 42 + 31 - 25 = 48.$$

2) Найдем число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки: $50 - 48 = 2$.

2 способ.

Изобразим данные множества при помощи кругов Эйлера и определим число элементов в каждом из непересекающихся подмножеств. Поскольку в пересечении множеств A и B содержится 25 элементов, то



только английский
25 = 17), а студентов,
немецкий, - 6 (т.
).
- 25 + 6 = 48, и,
студентов курса,
зучают ни английский, ни
= 2.

Ответ: 2

Спасибо за внимание!