Разложение функций в степенные ряды

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad R>0$$

$$f'(x) = 1\cdot a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2\cdot 1\cdot a_2 + \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = 0$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1\cdot a_n + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots$$ – ряд Тейлора (Маклорена)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$ – ряд Тейлора

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$ – ряд Тейлора (Маклорена)

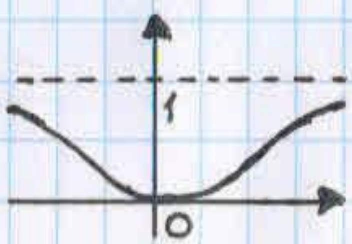
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$ – ряд Тейлора

Если $f(x)$ раскладыв. в степ. ряд $\Rightarrow$ это её ряд Тейлора (т. единств.)

Ф-я, которая есть сумма своего ряда Тейлора – аналитическая.

Не всякая бескон. дифф. ф-я – аналитическая.

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$



Можно доказать, что $f^{(n)}(0)=0\ \forall n\geq 0$

(не аналитическая функция)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$ – ряд Тейлора (<u>Маклорена</u>)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$ – ряд Тейлора

Формула Тейлора:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x,f)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x,f)$$

$$r_n(x,f)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\ \theta=\theta_x\in(0,1)$$ (Лагранж)

Формула Тейлора:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x,f)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x,f)$$

$$r_n(x,f)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad \theta=\theta_n\in(0,1)\quad(\text{Лагранж})$$

1. $f(x)=e^x$; $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1 \Rightarrow e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ (?)

Покажем, что $\forall x\in(-\infty,+\infty)$ $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+r_n(x,f)=1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$, $A>|x_0|\Rightarrow\forall x\in[-A,A]$ $|r_n(x,f)|\leqslant\frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}$ сх. (Даламбер) $\Rightarrow\frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}\to 0\Rightarrow r_n(x,f)\overset{[-A,A]}{\rightrightarrows}\varphi(x)\equiv 0\Rightarrow$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\overset{[-A,A]}{\rightrightarrows}e^x\Rightarrow e^{x_0}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x_0^n}{n!}$

Установить самостоятельно:

2. $$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ -\infty<x<+\infty$$

3. $$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,-\infty<x<+\infty$$

причём оба ряда $\rightrightarrows$ на $[-A, A]$ $\forall A>0$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x,f)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x,f)$$

$$r_n(x,f)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},\ \theta=\theta_c\in(0,1)\quad (\text{Коши})$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x,f)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x,f)$$

$$r_n(x,f)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},\ \theta=\theta_c\in(0,1)\ (\text{Коши})$$

4. $f(x)=\ln(1+x),\ f'(x)=\frac{1}{1+x},\ \ldots,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}},\ \ldots$

Установим, что $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\ldots,\ -1<x\leq 1$ (?)

$$r_n(x,f)=\frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}}(1-\theta)^n x^{n+1}\Rightarrow|r_n(x,f)|\leq\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n\leq\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)\ \forall x\in(-1,1)$. Ряд сх. и при $x=1\Rightarrow$

$\Rightarrow$ (2-я т. Абеля) $\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x),\ -1<x\leq 1$

$$x=1\Rightarrow\ln 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x,f)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+r_n(x,f)$$

$$r_n(x,f)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},\ \theta=\theta_c\in(0,1)\ \text{(Коши)}$$

5. $f(x)=(1+x)^\alpha,\ f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\ldots,\ f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$

$f^{(n+1)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},\ldots$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n+\ldots,\ x\in\langle -1,1\rangle\ (?)$$

$$r_n(x,f)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}=$$

$$=\underbrace{\frac{(\alpha-1)(\alpha-1-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-1-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n}_{\to 0\ \forall x\in(-1,1)\ \text{как общий член биномиального ряда для } \alpha-1}\cdot\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n}_{\in(0,1)}\to 0\ \forall x\in(-1,1)$$

$$|\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1}|\le\begin{cases}\alpha\cdot 2^\alpha\\ \dfrac{|\alpha|}{(1-|x|)^{|\alpha|+1}}\end{cases}\quad\forall x\in(-1,1)$$

(оценка не зависит от n)

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}x^n,\quad -1<x<1$$

Если ряд сх. при $x=1$ и (или) при $x=-1$, то по 2-й т. Абеля он сх-ся к $(1+x)^\alpha$.