

Разложение функций в степенные ряды

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad R > 0$$

$$f'(x) = 1 \cdot a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots$$

.....

$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_n + \dots$$

.....

$x=0$

$$a_0 = f(0), a_1 = \frac{f'(0)}{1!}, a_2 = \frac{f''(0)}{2!}, \dots, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad \text{— ряд Тейлора (Маклорена)}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots \quad \text{— ряд Тейлора}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad \text{— ряд Тейлора (Маклорена)}$$

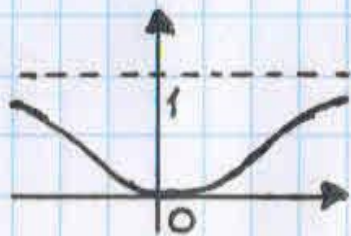
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots \quad \text{— ряд Тейлора}$$

Если $f(x)$ раскладыв. в степен. ряд \Rightarrow это её ряд Тейлора (т. единств.)

φ -я, которая есть сумма своего ряда Тейлора — аналитическая.

Не всякая бескон. диффр. φ -я — аналитическая.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Можно доказать, что $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \geq 0$

(не аналитическая функция)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad - \text{ряд Тейлора (Маклорена)}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + \dots \quad - \text{ряд Тейлора}$$

Формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x, f) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x, f)$$

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta = \theta_x \in (0, 1) \quad (\text{Лагранж})$$

Формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x, f) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x, f)$$

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \theta = \theta_x \in (0, 1) \quad (\text{Лагранж})$$

1. $f(x) = e^x$; $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1 \Rightarrow e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (?)$

Покажем, что $\forall x \in (-\infty, +\infty) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + r_n(x, f) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty), \quad A > |x_0| \Rightarrow \forall x \in [-A, A] \quad |r_n(x, f)| \leq \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!} \text{ с.к. (Даламбер)} \Rightarrow \frac{e^A A^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0 \Rightarrow r_n(x, f) \xrightarrow{[-A, A]} \varphi(x) \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{[-A, A]} e^x \Rightarrow e^{x_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!}$$

Установить самостоятельно:

$$2. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots, -\infty < x < +\infty$$

$$3. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, -\infty < x < +\infty$$

применяя для ряда \Rightarrow на $[-A, A] \quad \forall A > 0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x, f) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x, f)$$

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}, \theta = \theta_c \in (0, 1) \text{ (Kowu)}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x, f) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x, f)$$

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}, \theta = \theta_c \in (0, 1) \text{ (Ковши)}$$

$$4. f(x) = \ln(1+x), f'(x) = \frac{1}{1+x}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(1+x)^n}, f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}, \dots$$

$$\text{Установим, что } \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots, -1 < x \leq 1 (?)$$

$$r_n(x, f) = \frac{(-1)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} (1-\theta)^n x^{n+1} \Rightarrow |r_n(x, f)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^n \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x) \quad \forall x \in (-1, 1). \text{ Ряд сх. и при } x=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\text{-я т. Абеля}) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), -1 < x \leq 1$$

$$x=1 \Rightarrow \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x, f) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + r_n(x, f)$$

$$r_n(x, f) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1}, \theta = \theta_c \in (0, 1) \text{ (Кочу)}$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha, f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \dots, f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},$
 $f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1}, \dots$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n + \dots, x \in (-1, 1) \text{ (?)}$$

$$r_n(x, f) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!} (1-\theta)^n x^{n+1} =$$

$$= \underbrace{\frac{(\alpha-1)(\alpha-1-1)\dots(\alpha-1-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n}_{\rightarrow 0 \forall x \in (-1, 1) \text{ как единственный член биномиального ряда для } \alpha-1} \cdot \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1} \cdot \underbrace{\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n}_{\in (0, 1)} \rightarrow 0 \forall x \in (-1, 1)$$

$\rightarrow 0 \forall x \in (-1, 1)$ как единственный член биномиального ряда для $\alpha-1$

$$|\alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1}| \leq \begin{cases} \alpha \cdot 2^\alpha \\ \frac{|\alpha|}{(1-|x|)^{|\alpha|+1}} \end{cases} \forall x \in (-1, 1)$$

(оценка не зависит от n)

$$\Rightarrow (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{1 \cdot 2 \dots n} x^n, \quad -1 < x < 1$$

Если ряд сх. при $x=1$ и (или) при $x=-1$, то по 2-й т. Абеля

он сх-ся к $(1+x)^\alpha$.