

# Функция с постоянной эластичностью замены между факторами

Подготовил студент группы Эмз-117

Печникова Ю.В.

**ACMS = Arrow,  
Chenery,  
Minhas, Solow  
1961 год**

Функция CES применяется в том случае, когда отсутствует точная информация об уровне взаимозаменяемости производственных факторов и вместе с тем есть основания предполагать, что этот уровень существенно не изменяется при изменении объемов вовлекаемых ресурсов.

# Формула

$$f(x) = A \left( \sum_{i=1}^m a_i x_i^{-\beta} \right)^{-h/\beta}, \text{ где } A > 0 \text{ — коэффициент шкалы,}$$
$$a_i \geq 0 \text{ — коэффициенты распределения, } \sum_{i=1}^m a_i = 1,$$
$$h > 0 \text{ — степень однородности,}$$
$$\beta \geq -1 \text{ — коэффициент замещения.}$$

В логарифмической форме эту функцию можно представить в виде:

$$\ln f = \ln A - \frac{h}{\beta} \ln \left( \sum_{i=1}^m a_i x_i^{-\beta} \right).$$

Дифференцируя обе части равенства по  $x_i$ , а затем умножая на  $x_i$ , получим:

$$e_i = \frac{\partial f / \partial x_i}{f} x_i = \frac{h a_i x_i^{-\beta}}{\sum_{j=1}^m a_j x_j^{-\beta}},$$

для эластичности производства будем иметь:

$$e = \sum_{i=1}^m e_i = h.$$

Предельная норма замещения равна

$$h_{ij} = -\frac{f/x_j}{f/x_i} = -\frac{a_j x_j^{-\beta-1}}{a_i x_i^{-\beta-1}} = -\frac{a_j}{a_i} \left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{1+\beta}$$

Для получения эластичности замещения воспользуемся формулой

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{d(x_i/x_j)}{(x_i/x_j)} : \frac{dh_{ij}(x)}{h_{ij}(x)} \left( \frac{d \ln(x_i/x_j)}{d \ln(-h_{ij})} \right), i, j = \overline{1, m}.$$

для чего сперва найдём  $\ln(-h_{ij}) = \ln(a_j/a_i) + (1+\beta)\ln(x_i/x_j)$ , а тогда будем иметь:

$$\sigma_{ij} = \frac{d(\ln(x_i/x_j))}{d(\ln(-h_{ij}))} = \frac{1}{1+\beta}.$$

ВИДИМ, ЧТО:

- 1)  $\sigma \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow -1$ , В первом случае при  $h = 1$  CES-функция становится линейной ПФ.
- 2)  $\sigma \rightarrow 1$  при  $\beta \rightarrow 0$ , во втором случае будем иметь ПФ Кобба-Дугласа,
- 3)  $\sigma \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow \infty$ . в третьем — ПФ Леонтьева.



Рассмотрим изокванты. Для двух переменных имеем:

$$f_{\text{CES}} = A \left( \frac{a_1}{x_1^\beta} + \frac{a_2}{x_2^\beta} \right)^{-h/\beta}.$$

Для упрощения положим  $h = 1$ . Пусть  $Q = Q_0$ . Тогда

$$\left( \frac{Q_0}{A} \right)^{-\beta} = \frac{a_1}{x_1^\beta} + \frac{a_2}{x_2^\beta},$$

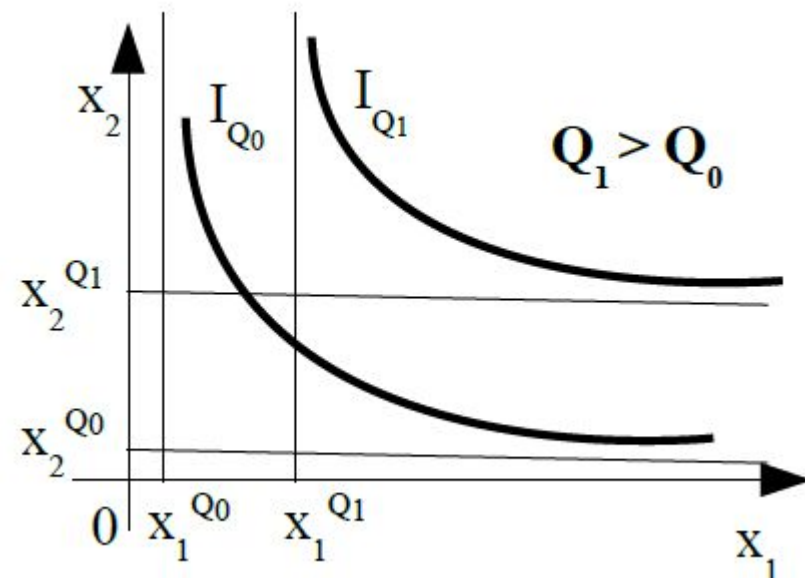
откуда следует

$$x_1 = x_1(x_2) = \left( \frac{1}{a_1} \left( \frac{Q_0}{A} \right)^{-\beta} - \frac{a_2}{a_1} x_2^{-\beta} \right)^{-1/\beta},$$

т.е. изоквантой является кривая зависимости первого фактора от второго.

Очевидно, если  $\beta > 0$ , то будем иметь:

$$x_1(x_2) = \frac{Q_0}{A} \sqrt[\beta]{a_1} = x_1^{Q_0}. \quad x_2(x_1) = \frac{Q_0}{A} \sqrt[\beta]{a_2} = x_2^{Q_0}.$$



# Вывод:

- Как видим, при использовании CES-функции удаётся избежать тех недостатков, которые были присущи линейной ПФ и ПФ Кобба-Дугласа, в частности, нет неправдоподобного замещения одного фактора другим, а производительность труда не растёт неограниченно.
- Для описания процесса производства могут использоваться любые ПФ. Те недостатки, которые указаны выше, несущественны, так как, как правило, исследования поведения одних величин от других рассматриваются в некоторой малой окрестности заданных конечных значений параметров. Кроме того, достаточно малые значения затрат какого-либо фактора во внимание не принимаются. Единственным препятствием для использования наиболее «хорошей» с аналитической точки зрения и с точки зрения реальности CES-функции является её достаточная сложность при исследовании и оценке параметров.

**3. Производственная функция Леонтьева (затраты-выпуск)**  
(Leontiev production function "input-output").

Её вид:

$$f(x) = A \min \left\{ \frac{x_1}{c_1}, \dots, \frac{x_m}{c_m} \right\}, \quad (11)$$

где  $c_i \geq 0$  — удельные затраты  $i$ -го фактора, т.е. количество затрат  $i$ -го фактора, необходимое для производства продукции количества  $A$ . Выражает одну из заданных пропорций, которыми для производства выпуска объёма  $A$  определяется количество затрат каждого вида факторов. Для определения эластичности производства используем формулу (3):

**1. Линейная производственная функция.** Она имеет вид:

$$f(x) = \sum_{i=1}^m c_i x_i = c'x$$

где  $c_i \geq 0$  — маргинальный продукт  $i$ -го фактора. Выражает линейную зависимость объёма выпуска продукции от затрат. Согласно (4)  $\varepsilon_i = (c_i x_i) / c'x$ ,

**2. Производственная функция Кобба-Дугласа** (Cobb-Douglas production function). Она имеет вид:

$$f(x) = b_0 x_1^{b_1} \dots x_m^{b_m},$$

где  $b_0 > 0$ ,  $b_i \geq 0$ ,  $i = \overline{1, m}$ . Так как

$$\ln f(x) = \ln b_0 + \sum_{i=1}^m b_i \ln x_i, \quad (10)$$

то эта ПФ выражает логарифм выпуска как линейную функцию логарифмов затрат. Поскольку  $\partial f / \partial x_i = b_i (f/x_i)$ , то из (4) следует  $\varepsilon_i = b_i$ , а тогда  $\varepsilon = \sum_{i=1}^m \varepsilon_i$ . Таким образом,  $b_i$  — эластичность выпуска по отношению к затратам  $i$ -го фактора. Если  $\sum_{i=1}^m b_i = 1$ , то  $\varepsilon = 1$  и имеет место постоянная отдача от расширения масштаба производства. Предельная норма замещения равна

$$h_{ij} = -\frac{f/x_j}{f/x_i} = -\frac{b_j}{b_i} \frac{x_i}{x_j},$$

а тогда

$$\sigma_{ij} = \frac{d(x_i/x_j)}{d(h_{ij})} \cdot \frac{h_{ij}}{(x_i/x_j)} = \frac{d(x_i/x_j)}{(-\frac{b_j}{b_i})d(x_i/x_j)} \cdot \frac{(-\frac{b_j}{b_i})(x_i/x_j)}{(x_i/x_j)} = 1$$

### Показатели ПФ и их геометрическая интерпретация

Каждая из ПФ характеризуется несколькими показателями. В первую очередь это — *эластичность производства* (elasticity of production).

Предположим, что с целью расширения производства фирма увеличила все виды затрат в  $\alpha$  раз ( $\alpha > 0$ ). В этом случае говорят о *расширении масштаба производства*. Тогда  $(\alpha x_i - x_i)/x_i = \alpha - 1$  представляет относительный прирост каждого вида затрат, а  $(f(\alpha x) - f(x))/f(x)$  — относительный прирост продукции (или дохода, если  $f(x)$  представляет доход). Величину

$$\varepsilon(x) = \frac{f(\alpha x) - f(x)}{f(x)(\alpha - 1)}, \quad (1)$$

являющуюся пределом отношения относительного (процентного) прироста выпуска продукции к относительному (процентному) увеличению каждого вида затрат при их пропорциональном изменении, называют *эластичностью производства* в точке  $x \in X$ . Величина (1) является локальным показателем увеличения выпуска продукции при расширении масштаба производства. Если функция  $f(x)$  непрерывно дифференцируема, то из (1) следует:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\partial f'(x)}{\partial x} x. \quad (2)$$