Функция с постоянной эластичностью замены между факторами

Подготовил студент группы Эмз-117

Печникова Ю.В.

ACMS = Arrow, Chenery, Minhas, Solow 1961 год

Функция CES применяется в том случае, когда отсутствует точная информация об уровне взаимозаменяемости производственных факторов и вместе с тем есть основания предполагать, что этот уровень существенно не изменяется при изменении объемов вовлекаемых ресурсов.

Формула

: $f(x) = A\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^{-\beta}\right)^{-h/\beta}$, где $A > 0$ — коэффициент шкалы,

$a_i \geq 0$ — коэффициенты распределения, $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$,

$h > 0$ — степень однородности,

$\beta \geq -1$ — коэффициент замещения.

В логарифмической форме эту функцию можно представить в виде:

$$\ln f = \ln A - \frac{h}{\beta} \ln\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^{-\beta}\right).$$

Дифференцируя обе части равенства по x_i, а затем умножая на x_i, получим:

$$e_i = \frac{\partial f / \partial x_i}{f} x_i = \frac{h a_i x_i^{-\beta}}{\sum_{j=1}^{m} a_j x_j^{-\beta}},$$

для эластичности производства будем иметь:

$$e = \sum_{i=1}^{m} e_i = h.$$

Предельная норма замещения равна

$$h_{ij} = -\frac{f/x_j}{f/x_i} = -\frac{a_j x_j^{-\beta-1}}{a_i x_i^{-\beta-1}} = -\frac{a_j}{a_i}\left(\frac{x_i}{x_j}\right)^{1+\beta}$$

Для получения эластичности замещения воспользуемся формулой

$$\sigma_{ij}(x) = \frac{d(x_i/x_j)}{(x_i/x_j)} : \frac{dh_{ij}(x)}{h_{ij}(x)}\left(\frac{d\ln(x_i/x_j)}{d\ln(-h_{ij})}\right), i,j = \overline{1,m}.$$

для чего сперва найдём $\ln(-h_{ij}) = \ln(a_j/a_i) + (1+\beta)\ln(x_i/x_j)$, а тогда будем иметь:

$$\sigma_{ij} = \frac{d(\ln(x_i/x_j))}{d(\ln(-h_{ij}))} = \frac{1}{1+\beta}$$

видим, что:

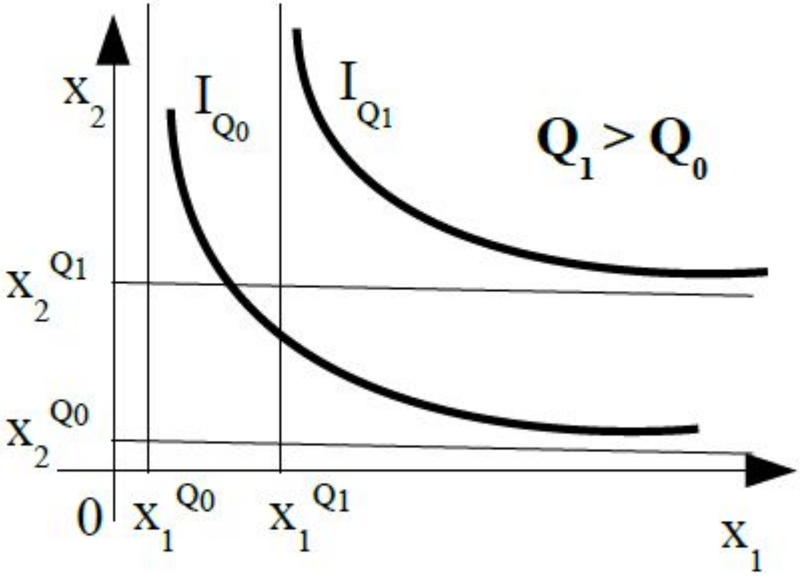
1) $\sigma \to \infty$ при $\beta \to -1$, В первом случае при $h = 1$ CES-функция становится линейной ПФ.

2) $\sigma \to 1$ при $\beta \to 0$, во втором случае будем иметь ПФ Кобба-Дугласа,

3) $\sigma \to 0$ при $\beta \to \infty$. в третьем — ПФ Леонтьева.

Рассмотрим изокванты. Для двух переменных имеем:

$$f_{\text{CES}} = A\left(\frac{a_1}{x_1^{\beta}} + \frac{a_2}{x_2^{\beta}}\right)^{-h/\beta}.$$



Для упрощения положим $h = 1$. Пусть $Q = Q_0$. Тогда

$$\left(\frac{Q_0}{A}\right)^{-\beta} = \frac{a_1}{x_1^{\beta}} + \frac{a_2}{x_2^{\beta}},$$

откуда следует

$$x_1 = x_1(x_2) = \left(\frac{1}{a_1}\left(\frac{Q_0}{A}\right)^{-\beta} - \frac{a_2}{a_1} x_2^{-\beta}\right)^{-1/\beta},$$

т.е. изоквантой является кривая зависимости первого фактора от второго. Очевидно, если $\beta > 0$, то будем иметь:

$$x_1(x_2) = \frac{Q_0}{A}\sqrt[\beta]{a_1} = x_1^{Q_0}. \qquad x_2(x_1) = \frac{Q_0}{A}\sqrt[\beta]{a_2} = x_2^{Q_0}.$$

Вывод:

- Как видим, при использовании CES-функции удаётся избежать тех недостатков, которые были присущи линейной ПФ и ПФ Кобба-Дугласа, в частности, нет неправдоподобного замещения одного фактора другим, а производительность труда не растёт неограниченно.
- Для описания процесса производства могут использоваться любые ПФ. Те недостатки, которые указаны выше, несущественны, так как, как правило, исследования поведения одних величин от других рассматриваются в некоторой малой окрестности заданных конечных значений параметров. Кроме того, достаточно малые значения затрат какого-либо фактора во внимание не принимаются. Единственным препятствием для использования наиболее «хорошей» с аналитической точки зрения и с точки зрения реальности CES-функции является её достаточная сложность при исследовании и оценке параметров.

3. ***Производственная функция Леонтьева (затраты-выпуск)*** (Leontiev production function ″input-output″).

Её вид:

$$f(x)= A\min\left\{\frac{x_1}{c_1},\dots,\frac{x_m}{c_m}\right\}, \qquad (11)$$

где $c_i \geq 0$ — удельные затраты i-го фактора, т.е. количество затрат i-го фактора, необходимое для производства продукции количества A. Выражает одну из заданных пропорций, которыми для производства выпуска объёма A определяется количество затрат каждого вида факторов. Для определения эластичности производства используем формулу (3):

1. ***Линейная производственная функция.*** Она имеет вид:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i = c'x$$

где $c_i \geq 0$ — маргинальный продукт i-го фактора. Выражает линейную зависимость объёма выпуска продукции от затрат. Согласно (4) $\varepsilon_i = (c_i x_i) / c'x$,

а тогда $e=\sum_{i=1}^{m} e_i=1$. Это означает, что имеет место постоянная отдача от

2. ***Производственная функция Кобба-Дугласа*** (Cobb-Douglas production function). Она имеет вид:

$$f(x)=b_0 x_1^{b_1}\dots x_m^{b_m},$$

где $b_0 > 0$, $b_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$. Так как

$$\ln f(x)=\ln b_0+\sum_{i=1}^{m} b_i \ln x_i, \qquad (10)$$

то эта ПФ выражает логарифм выпуска как линейную функцию логарифмов затрат. Поскольку $\partial f/\partial x_i=b_i\cdot(f/x_i)$, то из (4) следует $\varepsilon_i = b_i$, а тогда $e=\sum_{i=1}^{m} e_i$. Таким образом, b_i — эластичность выпуска по отношению к затратам i-го фактора. Если $\sum_{i=1}^{m} b_i=1$, то $\varepsilon = 1$ и имеет место постоянная отдача от расширения масштаба производства. Предельная норма замещения равна

$$h_{ij}=-\frac{f/x_j}{f/x_i}=-\frac{b_j}{b_i}\cdot\frac{x_i}{x_j},$$

а тогда

$$\sigma_{ij}=\frac{d(x_i/x_j)}{d(h_{ij})}\cdot\frac{h_{ij}}{(x_i/x_j)}=\frac{d(x_i/x_j)}{(-\frac{b_j}{b_i})d(x_i/x_j)}\cdot\frac{(-\frac{b_j}{b_i})(x_i/x_j)}{(x_i/x_j)}=1$$

Показатели ПФ и их геометрическая интерпретация

Каждая из ПФ характеризуется несколькими показателями. В первую очередь это — ***эластичность производства*** (elasticity of production).

Предположим, что с целью расширения производства фирма увеличила все виды затрат в α раз ($\alpha > 0$). В этом случае говорят о ***расширении масштаба производства.*** Тогда $(\alpha x_i - x_i)/x_i = \alpha - 1$ представляет относительный прирост каждого вида затрат, а $(f(\alpha x) - f(x))/f(x)$ — относительный прирост продукции (или дохода, если $f(x)$ представляет доход). Величину

$$\varepsilon(x) = \frac{f(\alpha x) - f(x)}{f(x)(\alpha - 1)}, \qquad (1)$$

являющуюся пределом отношения относительного (процентного) прироста выпуска продукции к относительному (процентному) увеличению каждого вида затрат при их пропорциональном изменении, называют ***эластичностью производства*** в точке $x \in X$. Величина (1) является локальным показателем увеличения выпуска продукции при расширении масштаба производства. Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, то из (1) следует:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\partial f'(x)}{\partial x} x. \qquad (2)$$