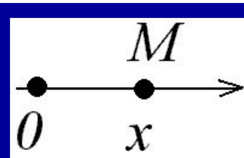
Лекция № 1

"ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ"

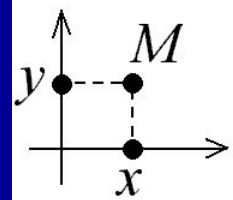
Понятие n-мерного пространства

Одномерное пространство
– множество действительных чисел



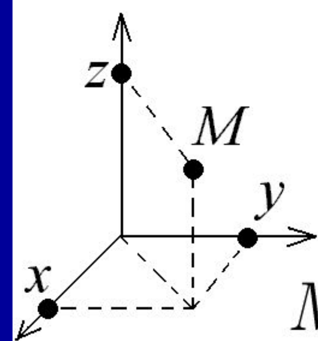
$$M \longleftrightarrow x \; ; \quad M \in \mathbf{R}$$

Двумерное пространство
– множество точек на плоскости



$$M \longleftrightarrow (x, y) \; ; \quad M \in \mathbf{R}^2$$

Трехмерное пространство
– множество точек в пространстве



$$M \longleftrightarrow (x, y, z) \; ; \quad M \in \mathbf{R}^3$$

n-**мерное пространство** – множество упорядоченных наборов из n действительных чисел

$$M \longleftrightarrow (x_1, x_2, ..., x_n) \; ; \quad M \in \mathbf{R}^n \; , \quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$$

Геометрически представить пространство размерности 4 или больше **невозможно**.

Радиус-вектор точки M, т.е. вектор $\overrightarrow{OM}$, соединяющий начало координат (точку O) с точкой M:

$$\overrightarrow{OM} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

Длина радиус-вектора (по теореме Пифагора):

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\ ; \quad \rho(O, M)$$

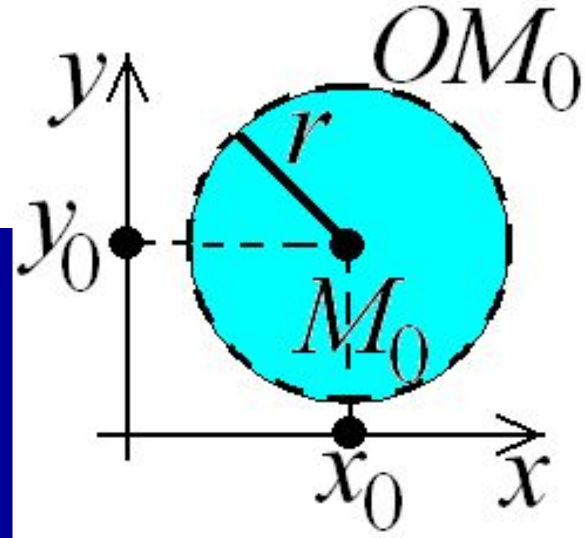
Вектор, соединяющий точки $A(a_1, a_2, ..., a_n)$ и $B(b_1, b_2, ..., b_n)$:

$$\overrightarrow{AB} = \{b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n\}$$

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + ... + (b_n - a_n)^2}$$

Окрестность точки $M_o(x_1^o, x_2^o, ..., x_n^o)$:

$$OM_o = \{M \ : \ \rho(M_o, M) < r,\ r > 0\}$$



Множество (D) точек n-мерного пространства называется **ограниченным**,
если оно располагается в n-мерном шаре конечного радиуса с центром в начале координат:

$$(D) \subseteq \text{Шар}_r O = \{\ M\ :\ \ \rho(O, M) \leq r\ ,\ r = \text{const} > 0\ \}$$

Множество (D) точек n-мерного пространства называется **замкнутым**, если граница этого множества также принадлежит множеству (D).

Определение функции многих переменных

Функция одной переменной:

$$x \in X \subseteq \mathbf{R}\,,\ y \in Y \subseteq \mathbf{R}\ :\quad x \xrightarrow{f} y \text{ или } y = f(x)$$

Функция двух переменных:

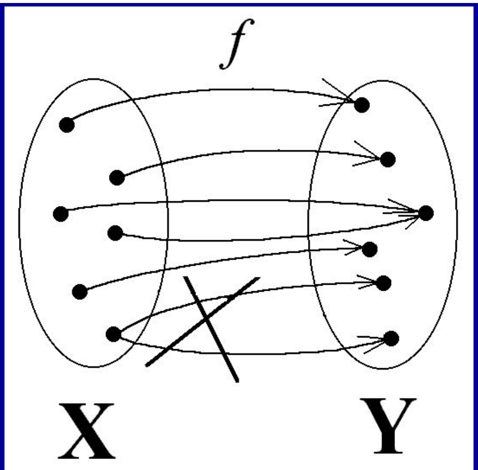
$$(x, y) \in X \subseteq \mathbf{R}^2,\ z \in Y \subseteq \mathbf{R} : (x, y) \xrightarrow{f} z \text{ или } z = f(x, y)$$

Функция n переменных:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \subseteq \mathbf{R}^n, u \in Y \subseteq \mathbf{R} : (x_1, x_2, \ldots, x_n) \xrightarrow{f} u$$

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Далее в основном функция двух переменных: $z = f(x, y)$.



Способы задания функции двух переменных: **аналитический**, **табличный** или **графический**.
Например: $z = x^2 + y^2$, $z = xy$.

Определение Функция $z = f(x, y)$ будет называться **элементарной**,
если она образована с помощью арифметических операций, с помощью степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных им функций, а также с помощью взятия сложной функции.

Таблично задать функцию $z = f(x, y)$ – задать **таблицу с двумя входами**

$$\downarrow$$

$$\rightarrow$$

	y_1	y_2	$\cdots$	y_ℓ
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	$\cdots$	$f(x_1, y_\ell)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	$\cdots$	$f(x_2, y_\ell)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
x_k	$f(x_k, y_1)$	$f(x_k, y_2)$	$\cdots$	$f(x_k, y_\ell)$

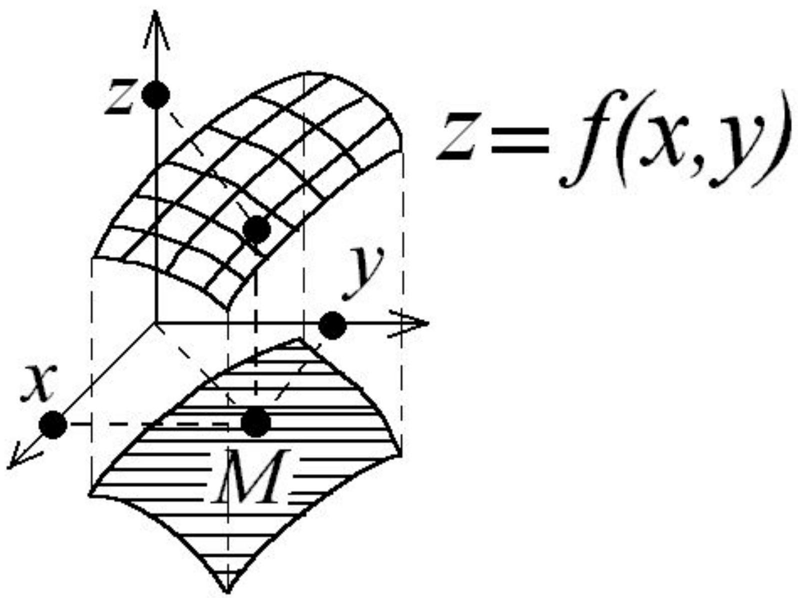
На обложках в конце школьных тетрадей иногда приводится

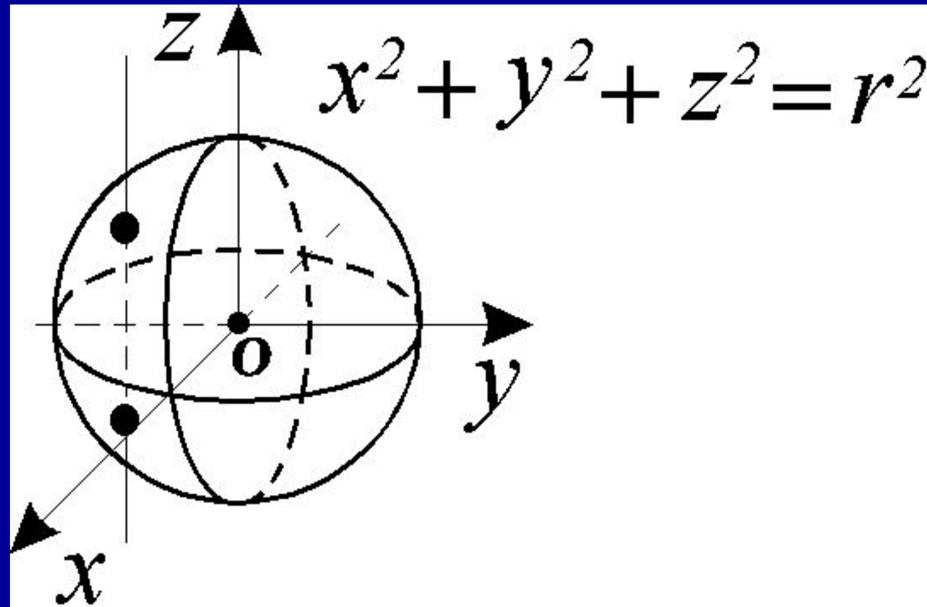
таблица Пифагора

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Это функция: $z = xy$.

Графиком функции $z = f(x, y)$ является поверхность в трехмерном пространстве, расположенная над областью определения этой функции и обладающая следующим свойством: каждая вертикаль, проходящая через точку области определения, пересекает данную поверхность только в одной точке.



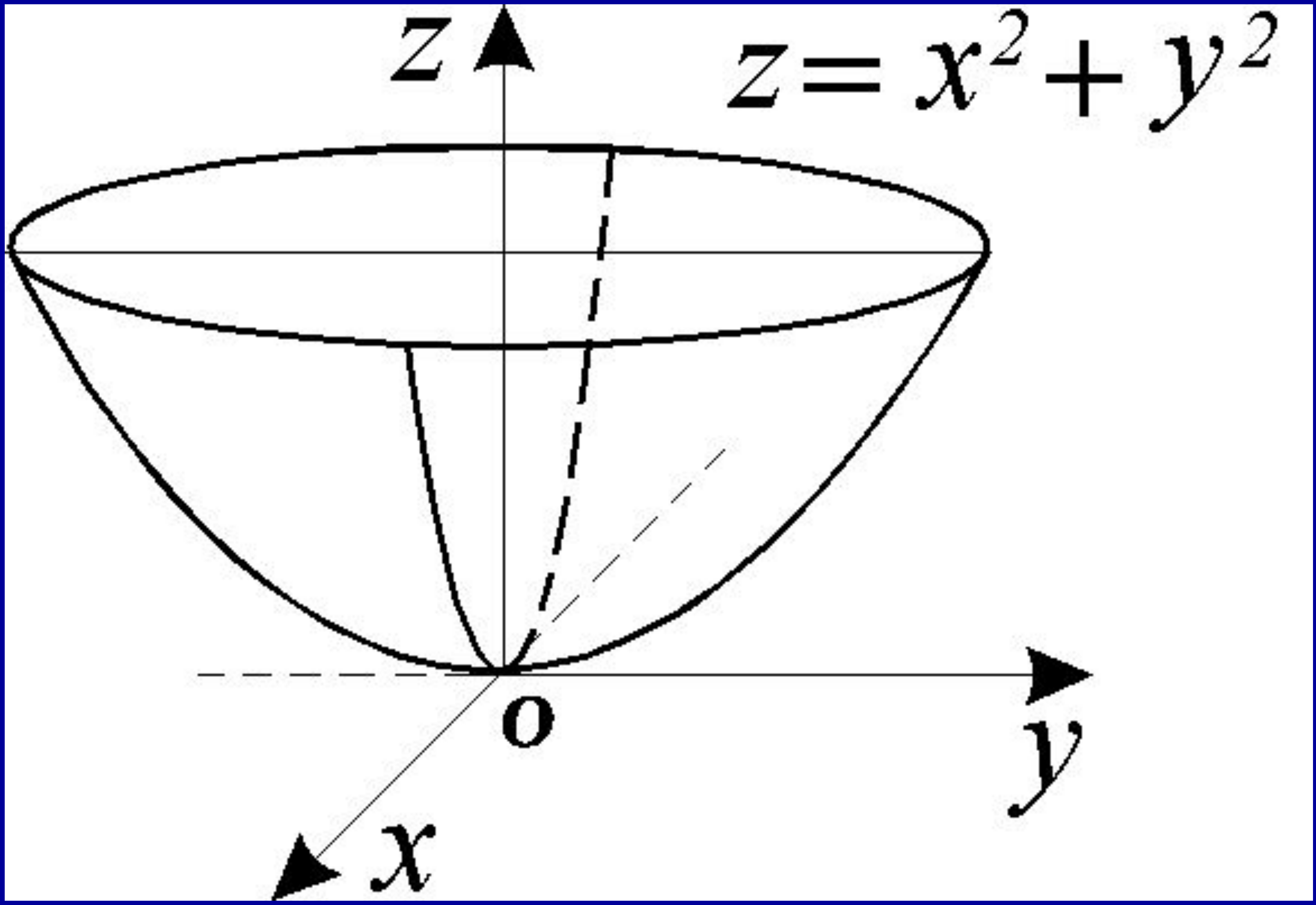


Поверхность сферы не является графиком функции $z = f(x, y)$

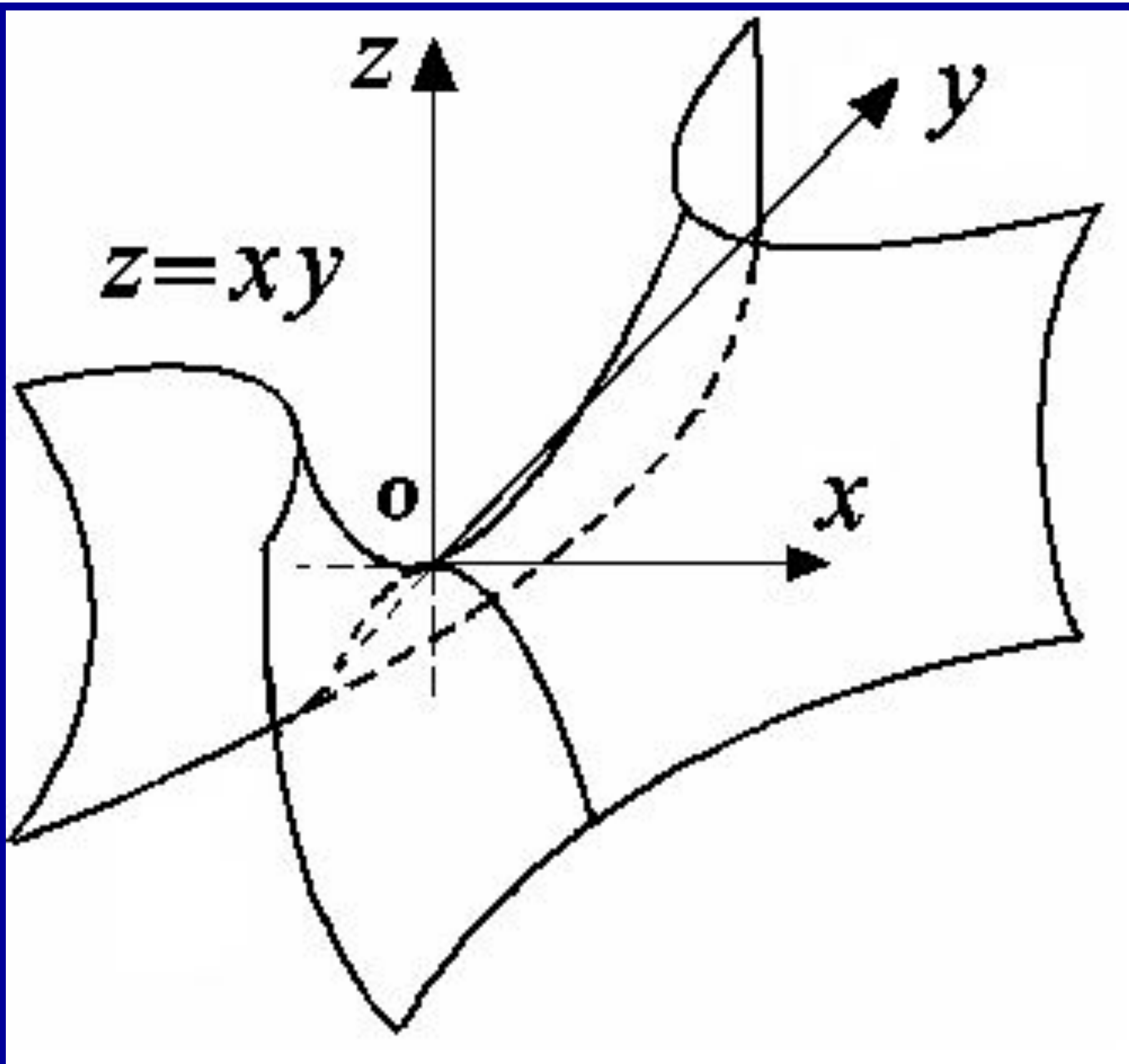
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$z^2 = r^2 - x^2 - y^2\ , \quad z = \pm\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения



$z = xy$ – седловая поверхность



Предел и непрерывность функции многих переменных

Число A есть предел функции $z = f(x, y)$ при $M \to M_o$:

$$\lim_{M \to M_o} f(x, y) = A \,, \qquad \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x, y) = A$$

Интуитивное определение:
если точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_o(x_o, y_o)$, то значения $f(x, y)$ стремятся к числу A

$$M \longrightarrow M_o \implies f(x, y) \longrightarrow A$$

$$(x, y) \longrightarrow (x_o, y_o) \implies f(x, y) \longrightarrow A$$

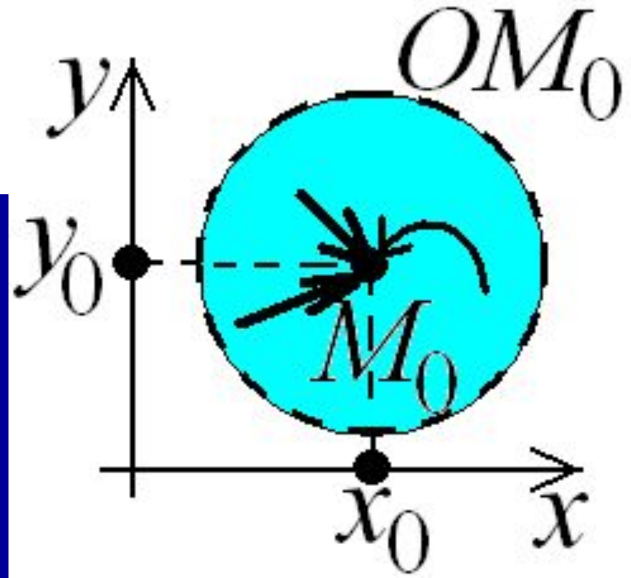
Определение. Число A называется **пределом** функции $z = f(x, y)$ при $M \longrightarrow M_o$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует OM_o – такая окрестность точки M_o, что для всех точек M из этой окрестности $(\forall M \in OM_o)$ выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Стремление $x \to x_o$ и $y \to y_o$ происходит **независимо** друг от друга, т.е. точка M к точке M_o может стремиться по любому пути на плоскости xOy.

Для функции $z = f(x, y)$ нельзя дать понятие одностороннего предела.

Все свойства пределов имеют место!!!



Теорема 1. *Если функция $z = f(x, y)$ является элементарной, а точка $M_o(x_o, y_o)$ принадлежит ее области определения, то*

$$\lim_{M \to M_o} f(M) = f(M_o)\ , \quad \text{т.е.} \quad \lim_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x, y) = f(x_o, y_o)$$

предел функции равен значению функции в предельной точке.

Определение. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена как в точке $M_o(x_o, y_o)$, так и в ее некоторой окрестности OM_o. Функция называется **непрерывной в точке** M_o, если

$$\lim_{M \to M_o} f(x, y) = f(x_o, y_o)$$

предел функции равен значению функции в предельной точке.

Следствие теоремы 1. *Все элементарные функции непрерывны в своих областях определения.*

Приращение аргумента x, **приращение аргумента** y, **полное приращение функции** $z = f(x, y)$:

$$\Delta x = x - x_o \;, \quad \Delta y = y - y_o$$

$$\Delta z = \Delta f = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = f(x, y) - f(x_o, y_o)$$

Частные приращениями функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно:

$$\Delta_x z = \Delta_x f = f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o) = f(x, y_o) - f(x_o, y_o)$$

$$\Delta_y z = \Delta_y f = f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = f(x_o, y) - f(x_o, y_o)$$

Величины Δx и Δy, как и сами переменные x, y, меняются **независимо** друг от друга.

Определение. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена как в точке $M_o(x_o, y_o)$, так и в ее некоторой окрестности OM_o. Функция называется **непрерывной в точке** M_o, если $\Delta z \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Т.е. если малым изменениям аргументов соответствуют малые изменения функции:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

Приведенные определения непрерывности эквивалентны.

Определение. Функция $z = f(x,y)$ называется **непрерывной в области** (S), если она непрерывна в каждой точке этой области.

Теорема 2. *Всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения.*

Теорема 3. **Свойства функции, непрерывной в ограниченной замкнутой области.** *Пусть область определения функции $z = f(x, y)$ – область (S) – является ограниченным замкнутым множеством, а сама функция $z = f(x, y)$ непрерывна в этой области (S). Тогда:*

1) *в области (S) функция ограничена, т.е. существует константа m_o такая, что*

$$|f(x, y)| < m_o \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in (S) \ ;$$

2) *в области* (S) *у функции имеются минимум* m_* *и максимум* m^* *и они достигаются, т.е. для любой точки* $(x,y) \in (S)$ *справедливы неравенства*

$$m_* \le f(x,y) \le m^*$$

и существуют $(x_1,y_1) \in (S)$ *и* $(x_2,y_2) \in (S)$ *такие, что*

$$f(x_1,y_1) = m_* \ , \quad f(x_2,y_2) = m^* \ ;$$

3) *функция в области* (S) *достигает любого промежуточного значения, т.е. для любого числа* C, *лежащего между минимальным и максимальным значениями рассматриваемой функции:* $m_* < C < m^*$ – *найдется точка* $(a,b) \in (S)$, *что*

$$f(a,b) = C$$

Частные производные и их геометрический смысл

Пусть $z = f(x, y)$ задана в области $(S) \subseteq \mathbf{R}^2$ и $M_o(x_o, y_o) \in (S)$.

Частная производная по x:

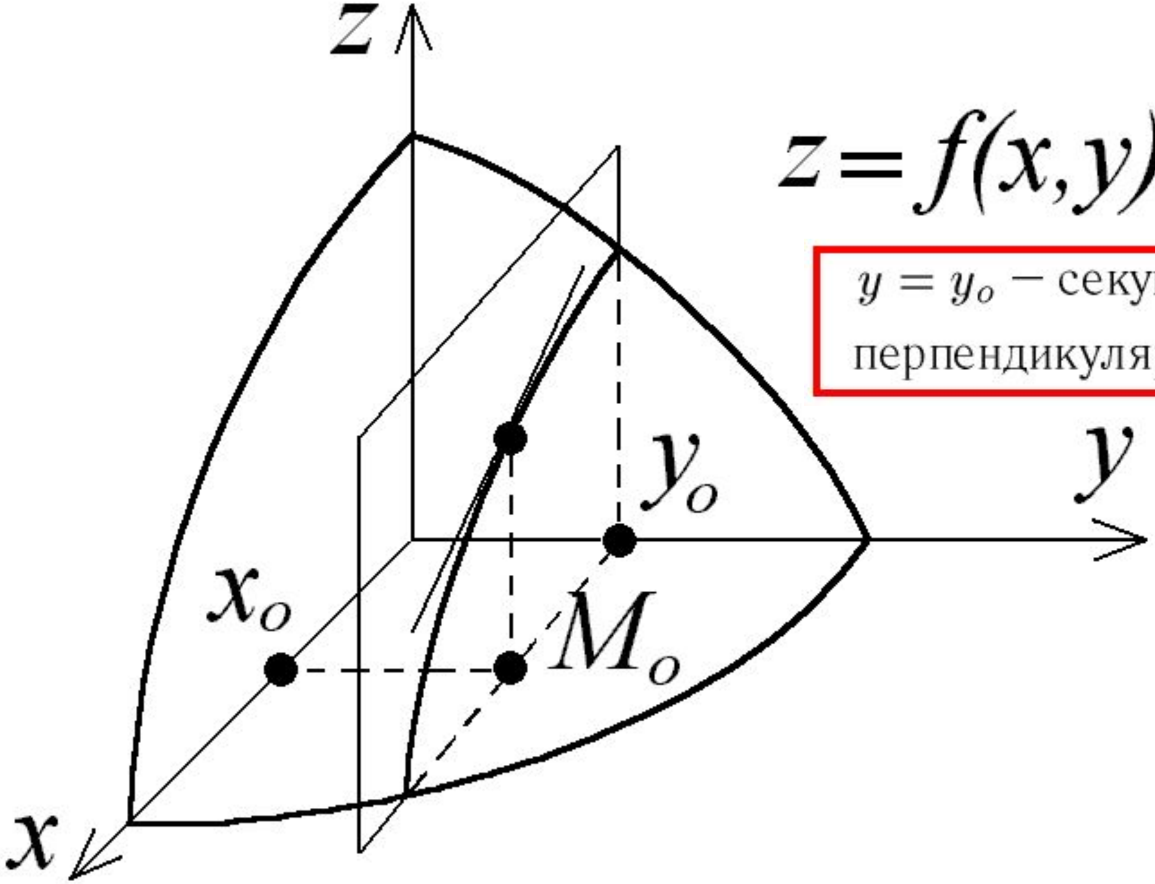
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to x_o} \frac{f(x, y_o) - f(x_o, y_o)}{x - x_o} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_o}$$

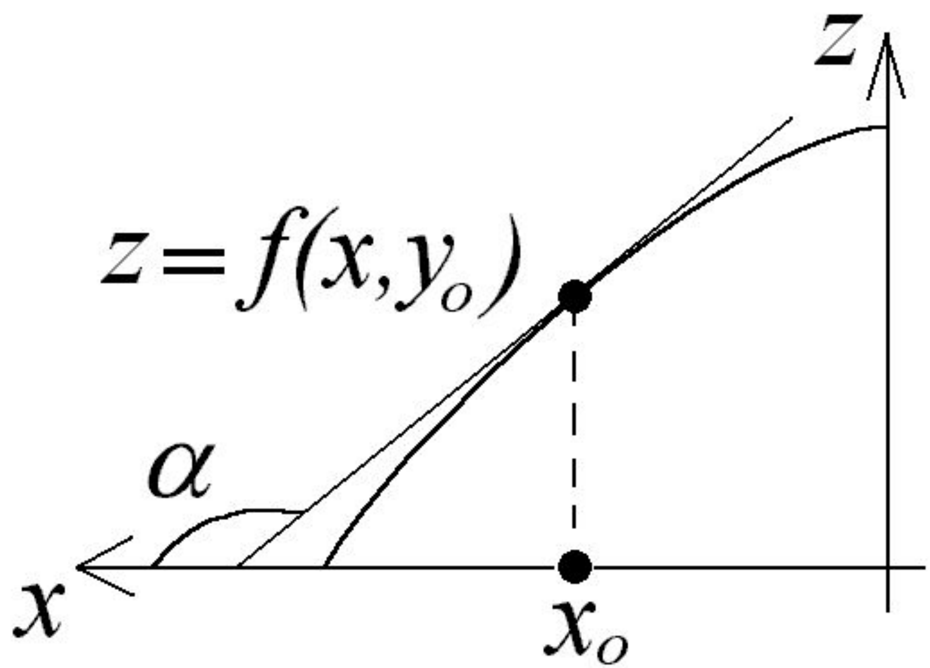
$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_o} = \frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x} = z'_x(x_o, y_o) = f'_x(x_o, y_o)$$

Геометрический смысл частной производной по x:

$$f'_x(x_o, y_o) = \mathrm{tg}\alpha$$



$y = y_o$ – секущая плоскость, перпендикулярная оси Oy



Частная производная по y:

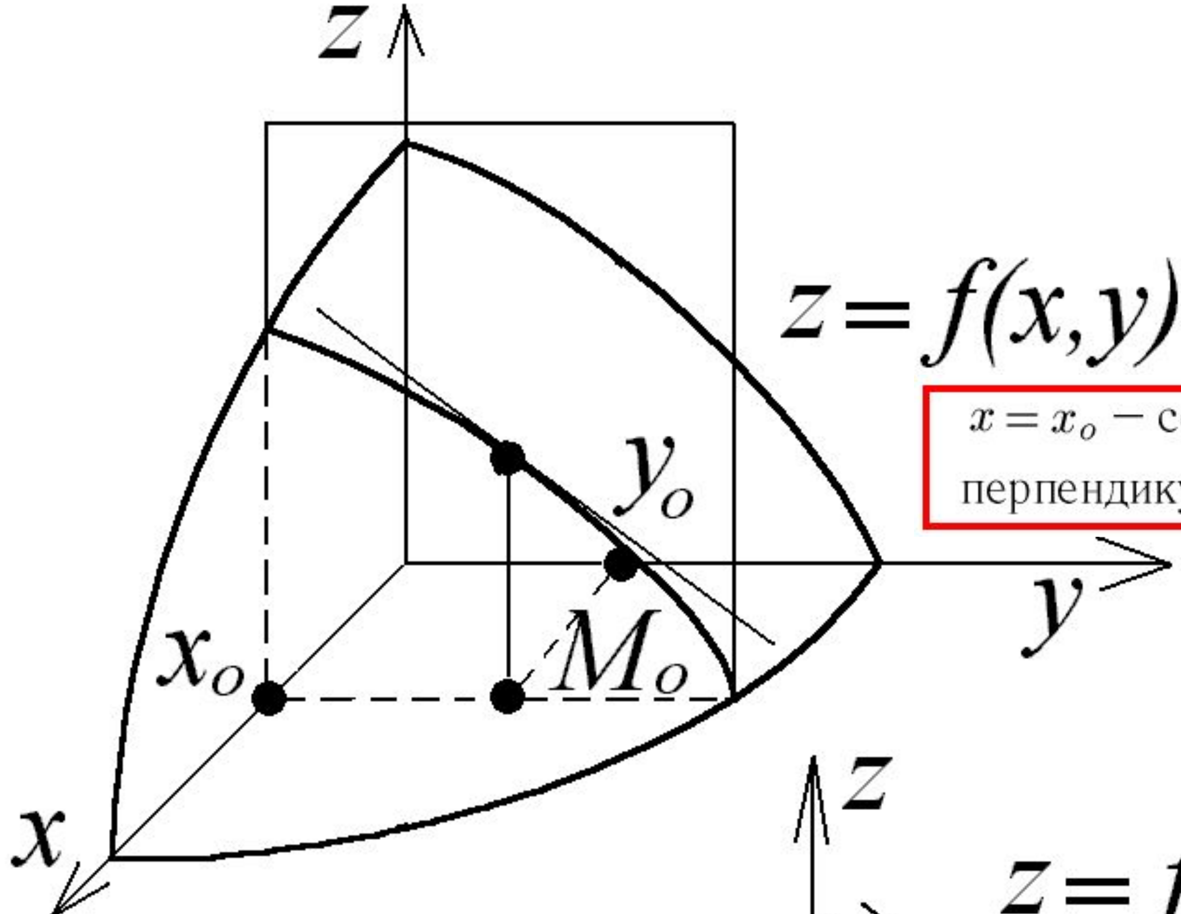
$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_o,y_o+\Delta y)-f(x_o,y_o)}{\Delta y}=$$

$$=\lim_{y\to y_o}\frac{f(x_o,y)-f(x_o,y_o)}{y-y_o}=\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_o}$$

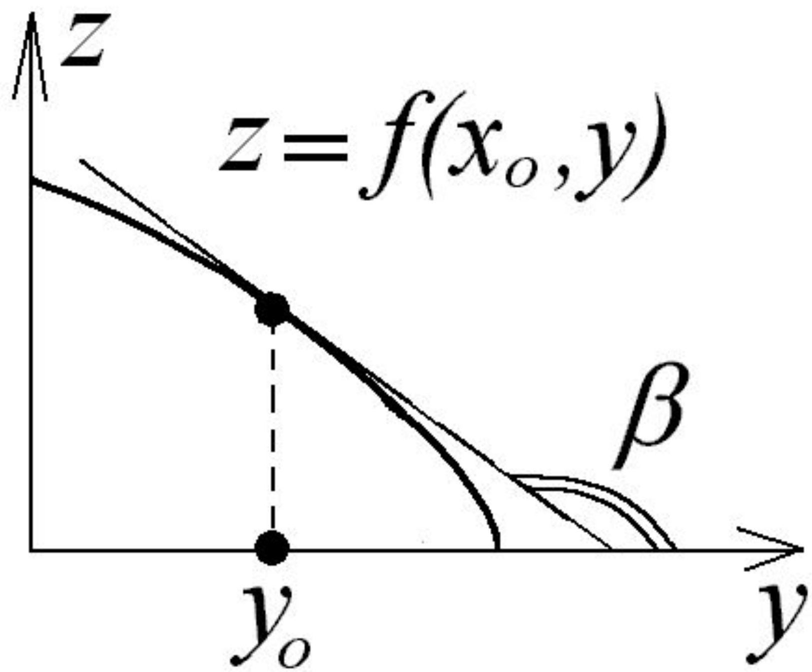
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_o}=\frac{\partial f(x_o,y_o)}{\partial y}=z'_y(x_o,y_o)=f'_y(x_o,y_o)$$

Геометрический смысл частной производной по y:

$$f'_y(x_o,y_o)=\mathrm{tg}\beta$$



$x = x_o$ – секущая плоскость, перпендикулярная оси Ox



Частные производные в произвольной точке $M(x, y)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = z'_x(x, y) = f'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = z'_y(x, y) = f'_y(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y$$

При дифференцировании по одной переменной на все остальные переменные временно смотрят как на константы!

Правила дифференцирования и таблица производных полностью сохраняются!

Пример. Найти частные призводные функции $z = x^2 y + \sin(xy)$.

Решение:

$$z'_x = 2xy + \cos(xy) \cdot y \ ; \quad z'_y = x^2 + \cos(xy) \cdot x$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности
Полный дифференциал

Пусть в области (S) задана $z = f(x, y)$ и точка $M_o(x_o, y_o) \in (S)$. Тогда $z_o = f(x_o, y_o)$.

$$f'_x(x_o, y_o) = \operatorname{tg}\alpha \; ; \quad (\ell_1) \;\; : \quad z - z_o = f'_x(x_o, y_o) \cdot (x - x_o)$$

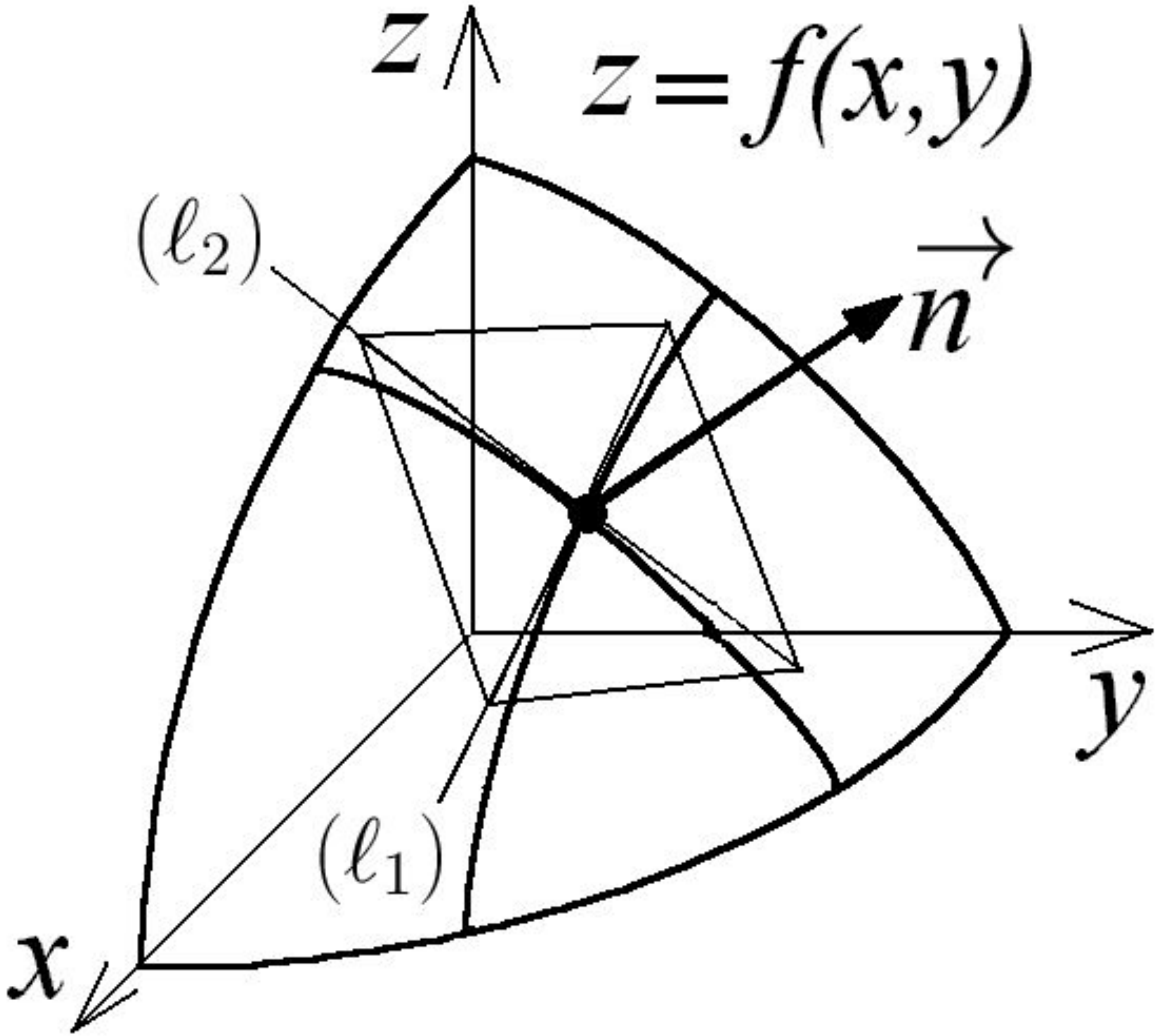
$$f'_y(x_o, y_o) = \operatorname{tg}\beta \; ; \quad (\ell_2) \;\; : \quad z - z_o = f'_y(x_o, y_o) \cdot (y - y_o)$$

Определение. Плоскость, проходящая через прямые (ℓ_1) и (ℓ_2) называется **касательной** к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_o, y_o, z_o).

$$(\ell_1) \subset (\Pi) \quad , \quad (\ell_2) \subset (\Pi)$$

$$(\Pi) \quad : \quad z - z_o = A \cdot (x - x_o) + B \cdot (y - y_o)$$

$$A = f'_x(x_o, y_o) \; , \quad B = f'_y(x_o, y_o)$$

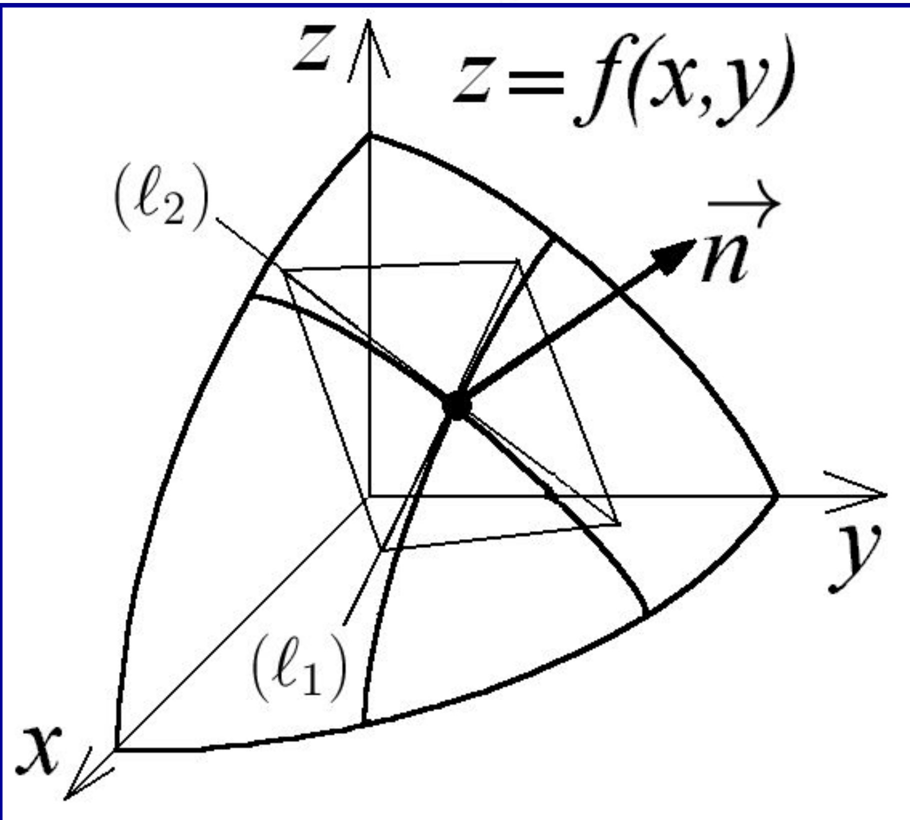


z
$z = f(x,y)$
(ℓ_2)
$\vec{n}$
y
(ℓ_1)
x

Определение. Вектор, перпендикулярный касательной плоскости, называется **нормалью** к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_o, y_o, z_o).

$$\overrightarrow{n} = \{A, B, -1\} = \{f'_x(M_o), f'_y(M_o), -1\}\ ; \quad \overrightarrow{n} \perp (\Pi)$$

$$\overrightarrow{n} \parallel (\ell_3) \ : \quad \frac{x - x_o}{f'_x(M_o)} = \frac{y - y_o}{f'_y(M_o)} = \frac{z - z_o}{-1}$$



Пусть задана $z = f(x, y)$. От точки $M_o(x_o, y_o) \in (S)$ отступаем в новую точку $M(x, y)$:

$$\Delta x = x - x_o \ ; \quad \Delta y = y - y_o$$

Тогда полное приращение функции $z = f(x, y)$ есть

$$\Delta z = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = f(x, y) - f(x_o, y_o)$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой** в точке (x_o, y_o, z_o), если ее полной приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \gamma(x, y)$$

$A, B -$ const

функция $\gamma(x, y)$ есть бесконечно малая при $M \to M_o$, т.е.

при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$

$$\Delta x \to 0\,, \Delta y \to 0 \implies \gamma(x,y) \to 0$$

$$\Delta x \to 0\,, \Delta y \to 0 \implies \frac{\gamma(x,y)}{\Delta x} \to 0\,, \quad \frac{\gamma(x,y)}{\Delta y} \to 0$$

$$\Delta x \to 0\,, \Delta y \to 0 \implies \frac{\gamma(x,y)}{\rho(M, M_o)} \to 0$$

где $\rho(M, M_o) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

т.е. бесконечно малыми являются функции

$$\frac{\gamma(x,y)}{\Delta x}\,, \quad \frac{\gamma(x,y)}{\Delta y}\,, \quad \frac{\gamma(x,y)}{\rho(M, M_o)}$$

Теорема 4. *Если* $z = f(x,y)$ *имеет непрерывные частные производные в точке* $M_o(x_o, y_o)$ *и в ее окрестности* OM_o, *то* $z = f(x,y)$ *является дифференцируемой функцией, причем*

$$A = f'_x(M_o)\ ,\quad B = f'_y(M_o)$$

Определение. Величина

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$$

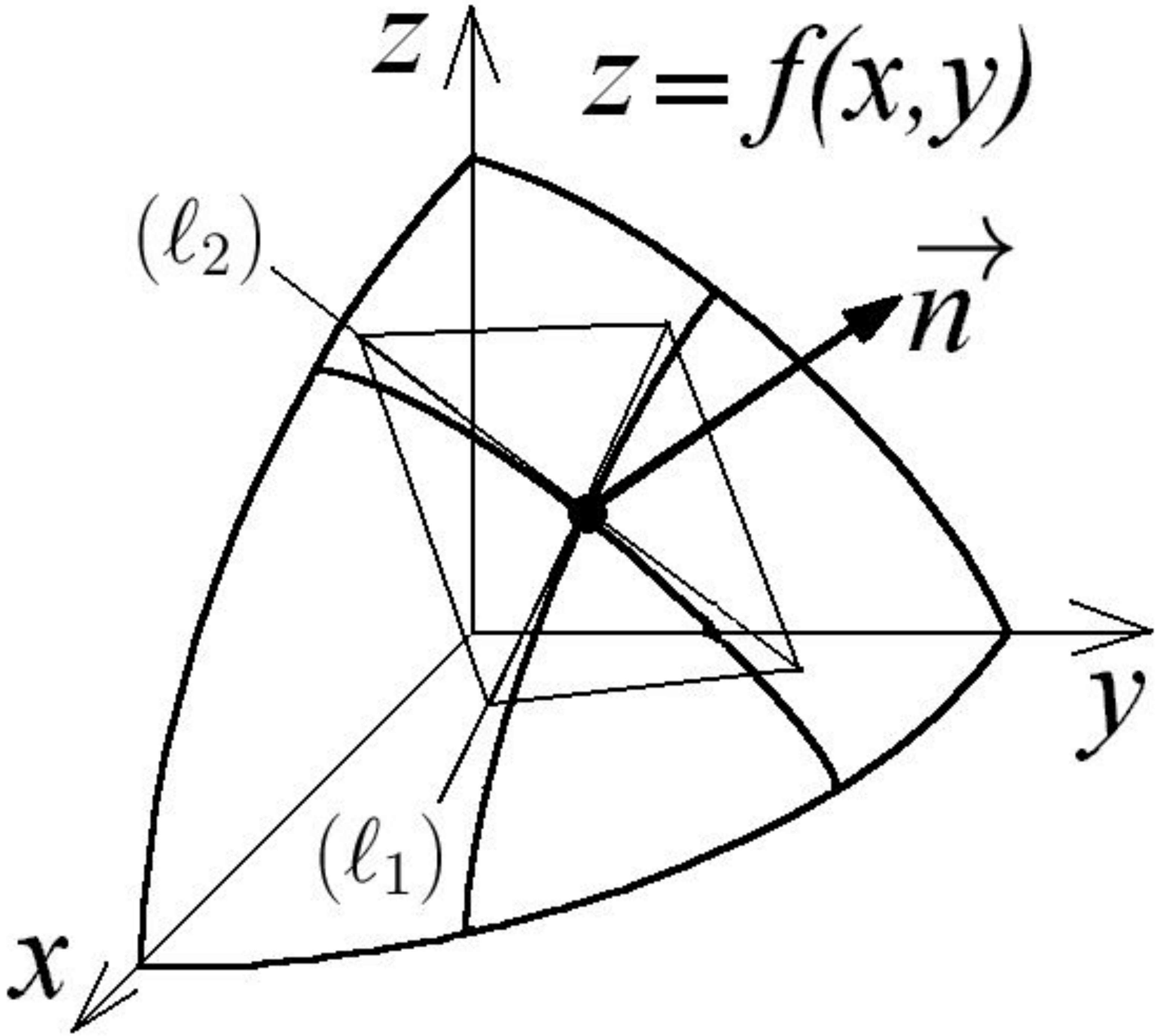
называется **полным дифференциалом** функции $z = f(x, y)$ в точке $M_o(x_o, y_o)$. Тогда

$$\Delta z = dz + \gamma(x, y)$$

и поэтому

$$dz \approx \Delta z$$

Замена Δz на dz называется **линеаризацией** функции $z = f(x, y)$, являющаяся заменой поверхности $z = f(x, y)$ на ее касательную плоскость.


z
$z = f(x,y)$
(ℓ_2)
$\vec{n}$
y
(ℓ_1)
x