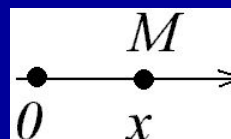


Понятие n -мерного пространства

Одномерное пространство

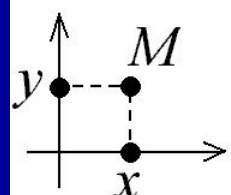
– множество действительных чисел



$$M \longleftrightarrow x ; M \in \mathbf{R}$$

Двумерное пространство

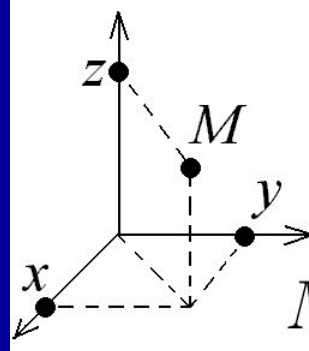
– множество точек на плоскости



$$M \longleftrightarrow (x, y) ; M \in \mathbf{R}^2$$

Трёхмерное пространство

– множество точек в пространстве



$$M \longleftrightarrow (x, y, z) ; M \in \mathbf{R}^3$$

n -мерное пространство – множество упорядоченных наборов из n действительных чисел

$$M \longleftrightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n) ; M \in \mathbf{R}^n , (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

Геометрически представить пространство размерности 4 или больше **НЕВОЗМОЖНО**.

Радиус-вектор точки M , т.е. вектор \overrightarrow{OM} , соединяющий начало координат (точку O) с точкой M :

$$\overrightarrow{OM} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Длина радиус-вектора (по теореме Пифагора):

$$|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}; \quad \rho(O, M)$$

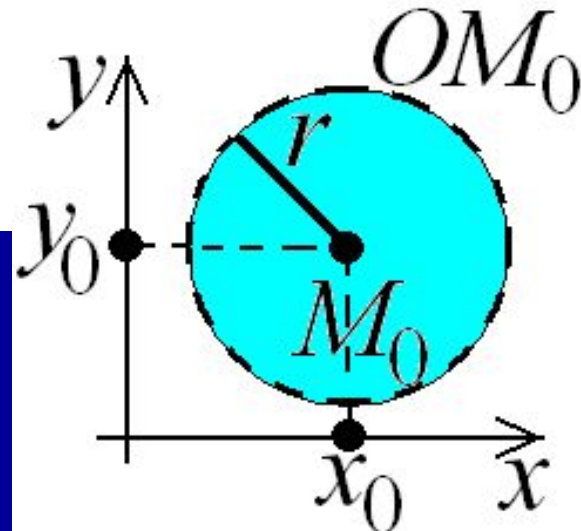
Вектор, соединяющий точки $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$:

$$\overrightarrow{AB} = \{b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n\}$$

$$\rho(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \dots + (b_n - a_n)^2}$$

Окрестность точки $M_o(x_1^o, x_2^o, \dots, x_n^o)$:

$$OM_o = \{M : \rho(M_o, M) < r, r > 0\}$$



Множество (D) точек n -мерного пространства называется **ограниченным**,

если оно располагается в n -мерном шаре конечного радиуса с центром в начале координат:

$$(D) \subseteq \text{Шар}_r O = \{ M : \rho(O, M) \leq r, r = \text{const} > 0 \}$$

Множество (D) точек n -мерного пространства называется **замкнутым**, если граница этого множества также принадлежит множеству (D) .

Определение функции многих переменных

Функция одной переменной:

$$x \in X \subseteq \mathbf{R}, y \in Y \subseteq \mathbf{R} : x \xrightarrow{f} y \text{ или } y = f(x)$$

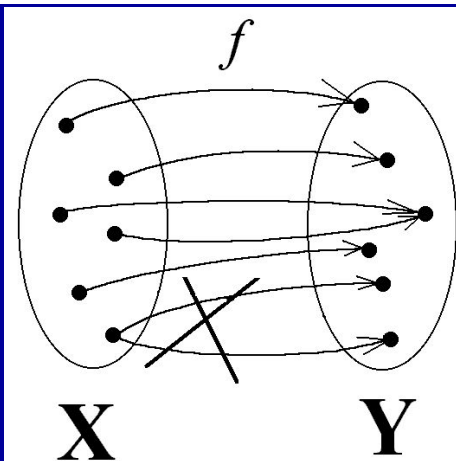
Функция двух переменных:

$$(x, y) \in X \subseteq \mathbf{R}^2, z \in Y \subseteq \mathbf{R} : (x, y) \xrightarrow{f} z \text{ или } z = f(x, y)$$

Функция n переменных:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subseteq \mathbf{R}^n, u \in Y \subseteq \mathbf{R} : (x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} u$$
$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Далее в основном функция двух переменных: $z = f(x, y)$.



Способы задания функции двух переменных: **аналитический**, **табличный** или **графический**.

Например: $z = x^2 + y^2$, $z = xy$.

Определение Функция $z = f(x, y)$ будет называться **элементарной**,

если она образована с помощью арифметических операций, с помощью степенных, показательных, логарифмических, тригонометрических и обратных им функций, а также с помощью взятия сложной функции.

Таблично задать функцию $z = f(x, y)$ – задать **таблицу с двумя входами**

↓

	y_1	y_2	\cdots	y_l
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	\cdots	$f(x_1, y_l)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	\cdots	$f(x_2, y_l)$
\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
x_k	$f(x_k, y_1)$	$f(x_k, y_2)$	\cdots	$f(x_k, y_l)$

→

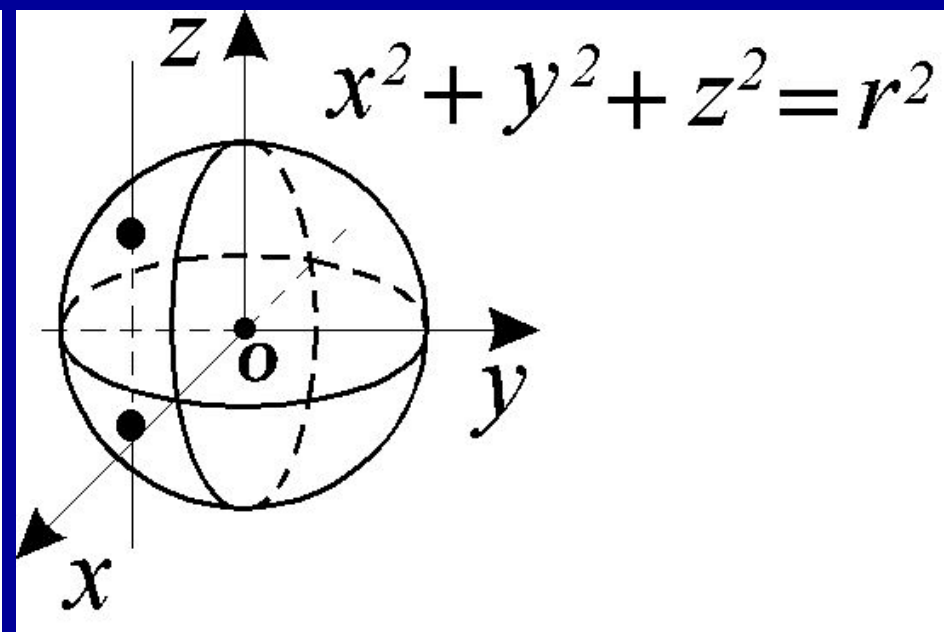
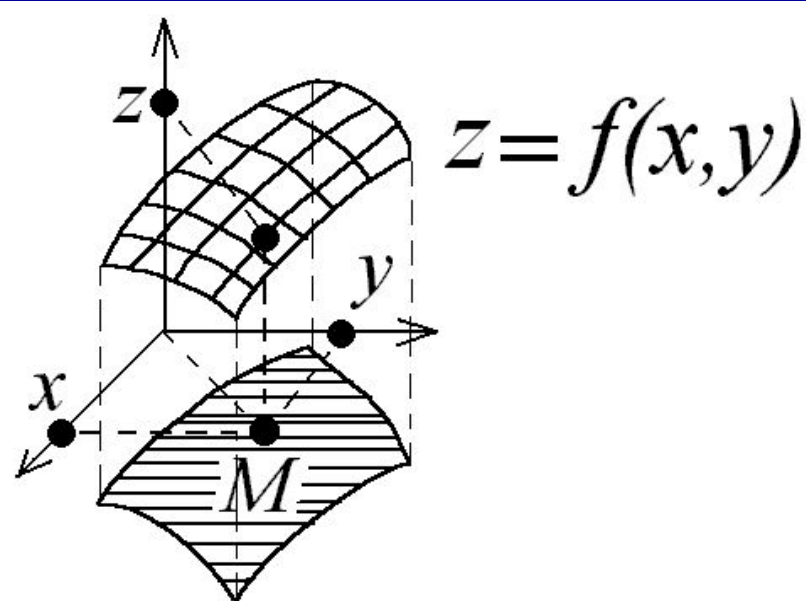
На обложках в конце школьных тетрадей иногда приводится

таблица Пифагора

	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Это функция: $z = xy$.

Графиком функции $z = f(x, y)$ является поверхность в трехмерном пространстве, расположенная над областью определения этой функции и обладающая следующим свойством: каждая вертикаль, проходящая через точку области определения, пересекает данную поверхность только в одной точке.



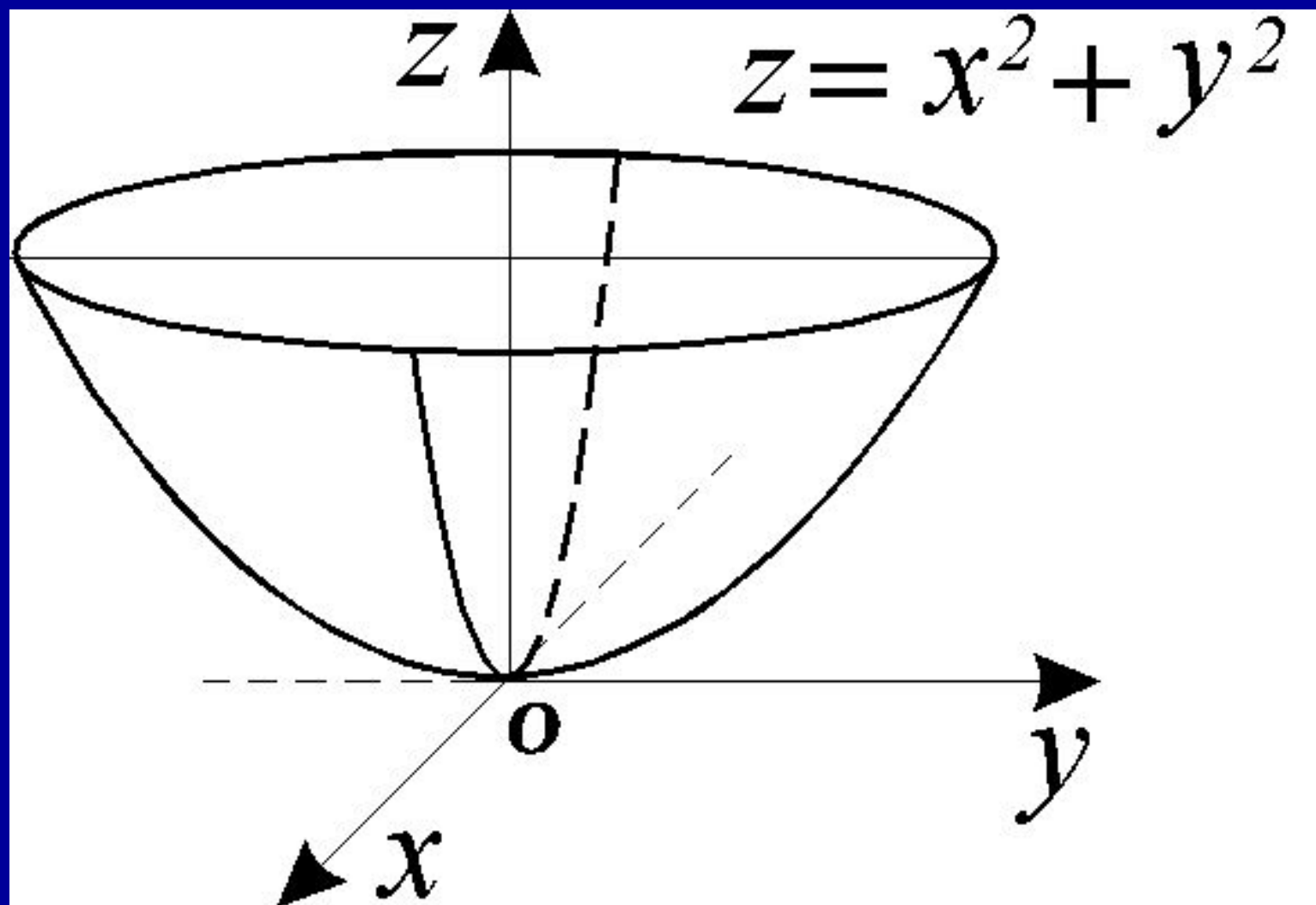
7

Поверхность сферы не является графиком функции $z = f(x, y)$

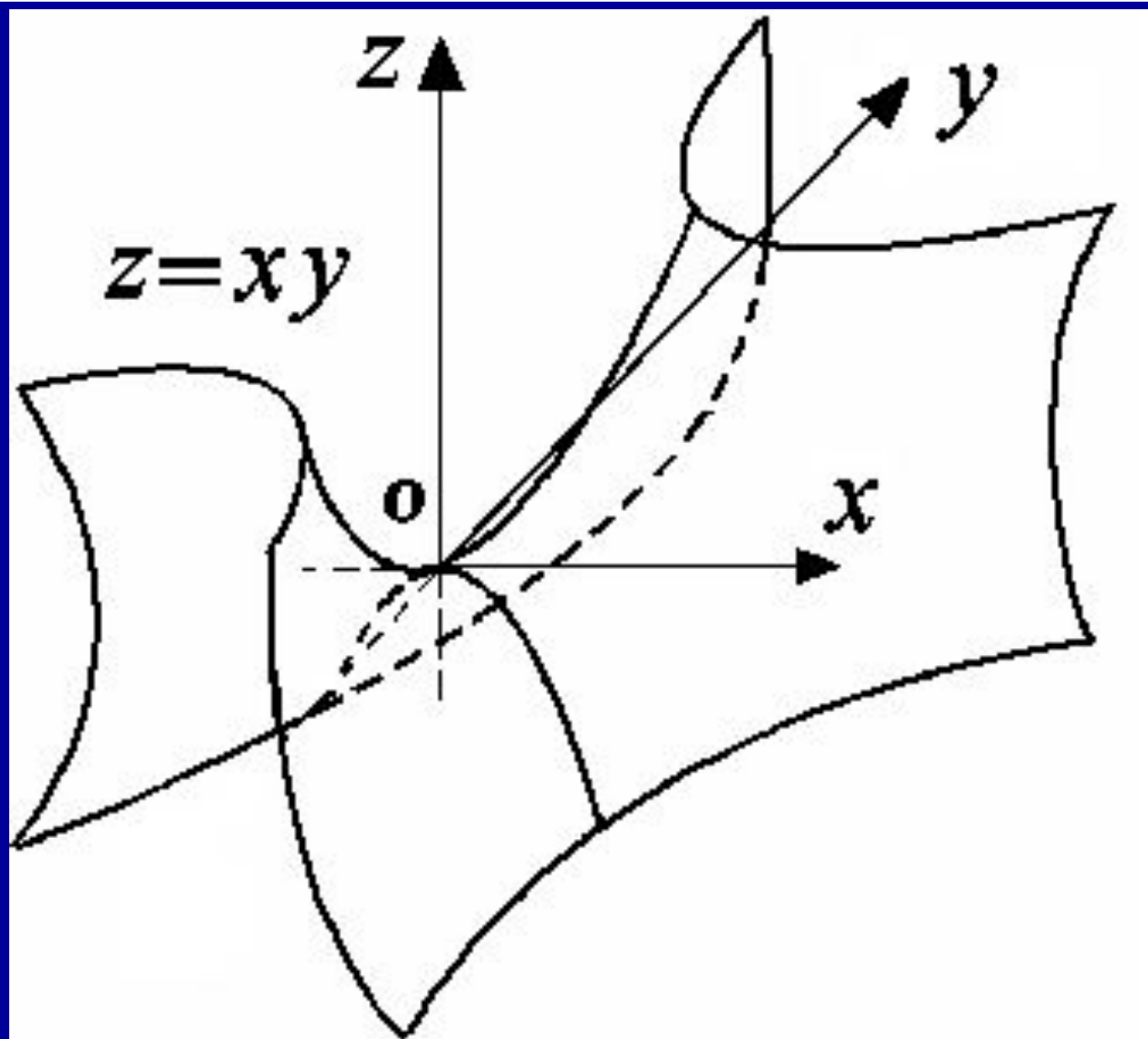
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$z^2 = r^2 - x^2 - y^2, \quad z = \pm \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$

$z = x^2 + y^2$ – параболоид вращения



$z = xy$ – седловая поверхность



Предел и непрерывность функции многих переменных

Число A есть предел функции $z = f(x, y)$ при $M \rightarrow M_o$:

$$\lim_{M \rightarrow M_o} f(x, y) = A, \quad \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow x_o} f(x, y) = A \\ \lim_{y \rightarrow y_o} f(x, y) = A \end{array}$$

Интуитивное определение:

если точка $M(x, y)$ стремится к точке $M_o(x_o, y_o)$, то значения $f(x, y)$ стремятся к числу A

$$M \longrightarrow M_o \implies f(x, y) \longrightarrow A$$

$$(x, y) \longrightarrow (x_o, y_o) \implies f(x, y) \longrightarrow A$$

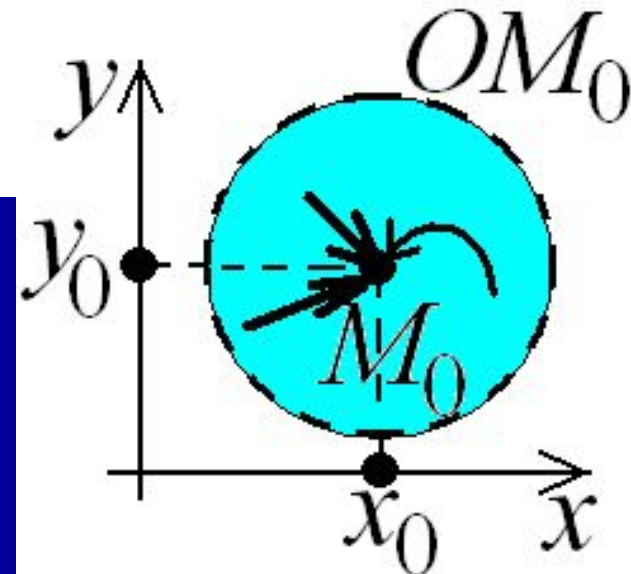
Определение. Число A называется **пределом** функции $z = f(x, y)$ при $M \rightarrow M_0$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует OM_0 – такая окрестность точки M_0 , что для всех точек M из этой окрестности ($\forall M \in OM_0$) выполняется неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon$$

Стремление $x \rightarrow x_0$ и $y \rightarrow y_0$ происходит **независимо** друг от друга, т.е. точка M к точке M_0 может стремиться по любому пути на плоскости xOy .

Для функции $z = f(x, y)$ нельзя дать понятие одностороннего предела.

Все свойства пределов имеют место!!!



Теорема 1. Если функция $z = f(x, y)$ является элементарной, а точка $M_o(x_o, y_o)$ принадлежит ее области определения, то

$$\lim_{M \rightarrow M_o} f(M) = f(M_o), \text{ т.е. } \lim_{\substack{x \rightarrow x_o \\ y \rightarrow y_o}} f(x, y) = f(x_o, y_o)$$

предел функции равен значению функции в предельной точке.

Определение. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена как в точке $M_o(x_o, y_o)$, так и в ее некоторой окрестности OM_o . Функция называется **непрерывной в точке M_o** , если

$$\lim_{M \rightarrow M_o} f(x, y) = f(x_o, y_o)$$

предел функции равен значению функции в предельной точке.

Следствие теоремы 1. Все элементарные функции непрерывны в своих областях определения.

Приращение аргумента x , приращение аргумента y , полное приращение функции $z = f(x, y)$:

$$\Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0$$

$$\Delta z = \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Частные приращениями функции $z = f(x, y)$ по переменным x и y соответственно:

$$\Delta_x z = \Delta_x f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f(x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$\Delta_y z = \Delta_y f = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f(x_0, y) - f(x_0, y_0)$$

Величины Δx и Δy , как и сами переменные x , y , меняются **независимо** друг от друга.

Определение. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена как в точке $M_o(x_o, y_o)$, так и в ее некоторой окрестности OM_o . Функция называется **непрерывной в точке M_o** , если $\Delta z \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$.

Т.е. если малым изменениям аргументов соответствуют малые изменения функции:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$$

Приведенные определения непрерывности эквивалентны.

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется **непрерывной в области (S)** , если она непрерывна в каждой точке этой области.

Теорема 2. Всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

Теорема 3. Свойства функции, непрерывной в ограниченной замкнутой области. Пусть область определения функции $z = f(x, y)$ – область (S) – является ограниченным замкнутым множеством, а сама функция $z = f(x, y)$ непрерывна в этой области (S) . Тогда:

1) в области (S) функция ограничена, т.е. существует константа m_0 такая, что

$$|f(x, y)| < m_0 \text{ для всех } (x, y) \in (S) ;$$

2) в области (S) у функции имеются минимум m_* и максимум m^* и они достигаются, т.е. для любой точки $(x, y) \in (S)$ справедливы неравенства

$$m_* \leq f(x, y) \leq m^*$$

и существуют $(x_1, y_1) \in (S)$ и $(x_2, y_2) \in (S)$ такие, что

$$f(x_1, y_1) = m_* , \quad f(x_2, y_2) = m^* ;$$

3) функция в области (S) достигает любого промежуточного значения, т.е. для любого числа C , лежащего между минимальным и максимальным значениями рассматриваемой функции: $m_* < C < m^*$ – найдется точка $(a, b) \in (S)$, что

$$f(a, b) = C$$

Частные производные и их геометрический смысл

Пусть $z = f(x, y)$ задана в области $(S) \subseteq \mathbf{R}^2$
и $M_o(x_o, y_o) \in (S)$.

Частная производная по x :

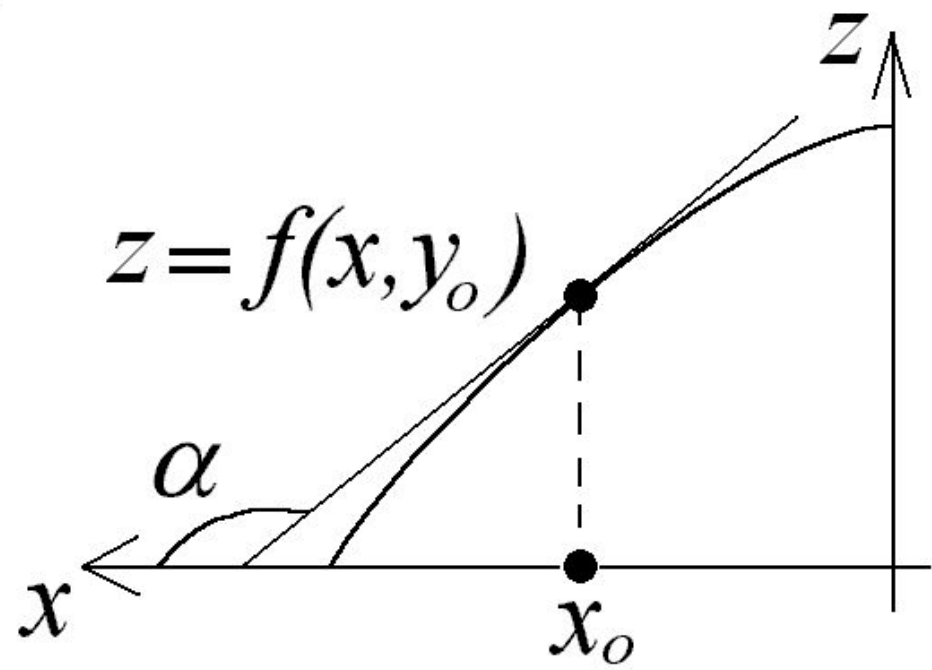
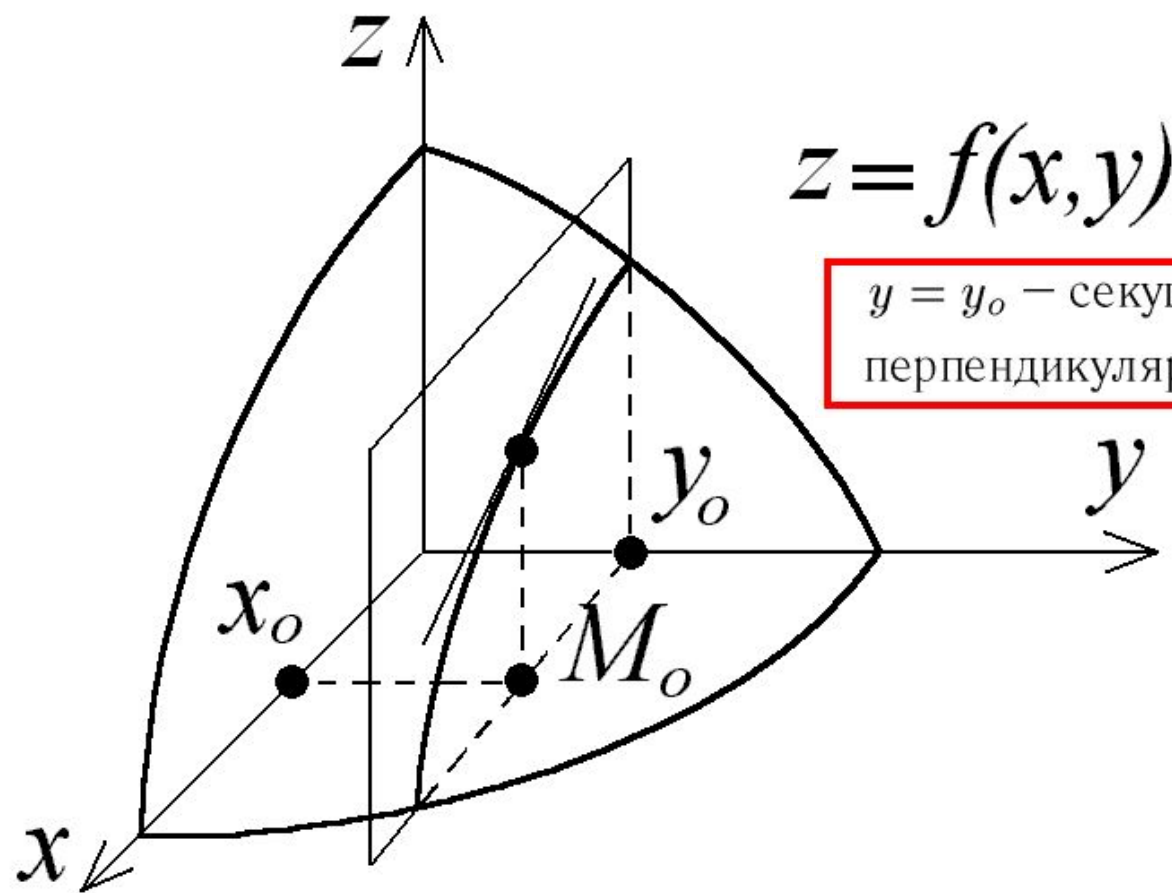
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x, y_o) - f(x_o, y_o)}{x - x_o} = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_o}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_o} = \frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x} = z'_x(x_o, y_o) = f'_x(x_o, y_o)$$

Геометрический смысл частной производной по x :

$$f'_x(x_o, y_o) = \operatorname{tg} \alpha$$



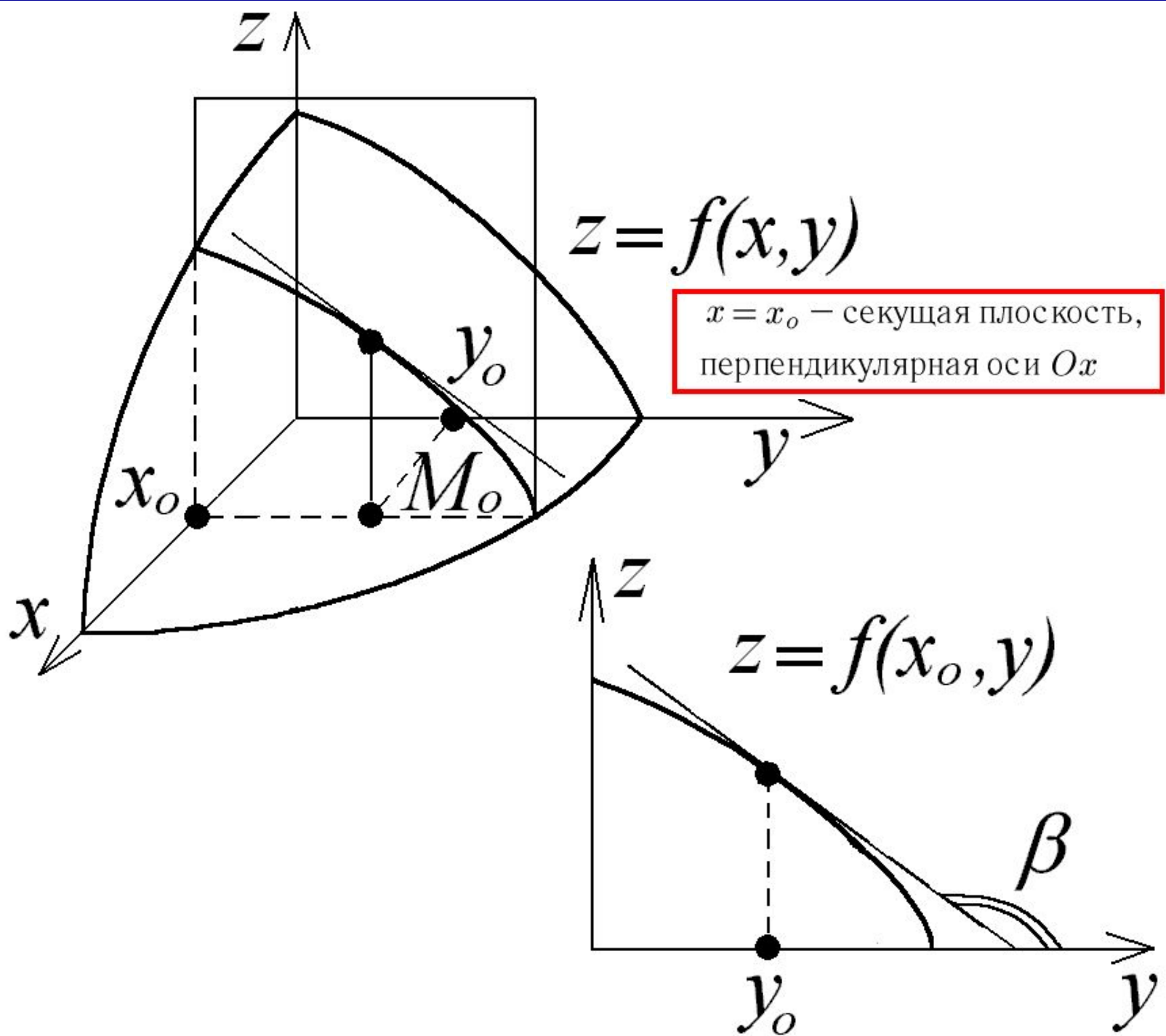
Частная производная по y :

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)}{\Delta y} = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_o} \frac{f(x_o, y) - f(x_o, y_o)}{y - y_o} = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_o}\end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_o} = \frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y} = z'_y(x_o, y_o) = f'_y(x_o, y_o)$$

Геометрический смысл частной производной по y :

$$f'_y(x_o, y_o) = \operatorname{tg} \beta$$



Частные производные в произвольной точке $M(x, y)$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = z'_x(x, y) = f'_x(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z'_x = f'_x$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = z'_y(x, y) = f'_y(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z'_y = f'_y$$

При дифференцировании по одной переменной на все остальные переменные временно смотрят как на константы!

Правила дифференцирования и таблица производных полностью сохраняются!

Пример. Найти частные производные функции $z = x^2y + \sin(xy)$.

Решение:

$$z'_x = 2xy + \cos(xy) \cdot y ; \quad z'_y = x^2 + \cos(xy) \cdot x$$

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Полный дифференциал

Пусть в области (S) задана $z = f(x, y)$ и точка $M_o(x_o, y_o) \in (S)$. Тогда $z_o = f(x_o, y_o)$.

$$f'_x(x_o, y_o) = \operatorname{tg}\alpha ; \quad (\ell_1) : z - z_o = f'_x(x_o, y_o) \cdot (x - x_o)$$

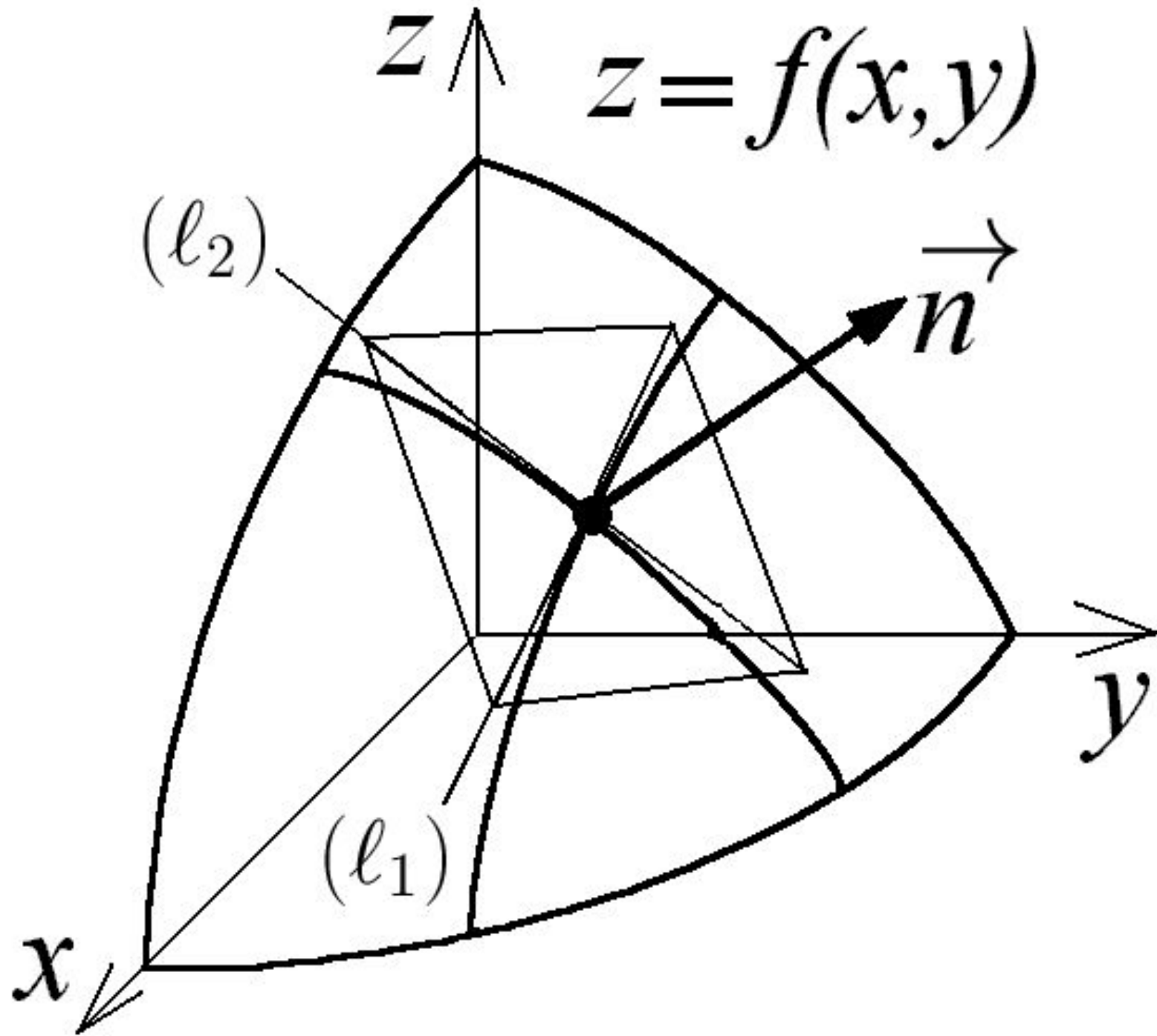
$$f'_y(x_o, y_o) = \operatorname{tg}\beta ; \quad (\ell_2) : z - z_o = f'_y(x_o, y_o) \cdot (y - y_o)$$

Определение. Плоскость, проходящая через прямые (ℓ_1) и (ℓ_2) называется **касательной** к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_o, y_o, z_o) .

$$(\ell_1) \subset (\Pi) \quad , \quad (\ell_2) \subset (\Pi)$$

$$(\Pi) : z - z_o = A \cdot (x - x_o) + B \cdot (y - y_o)$$

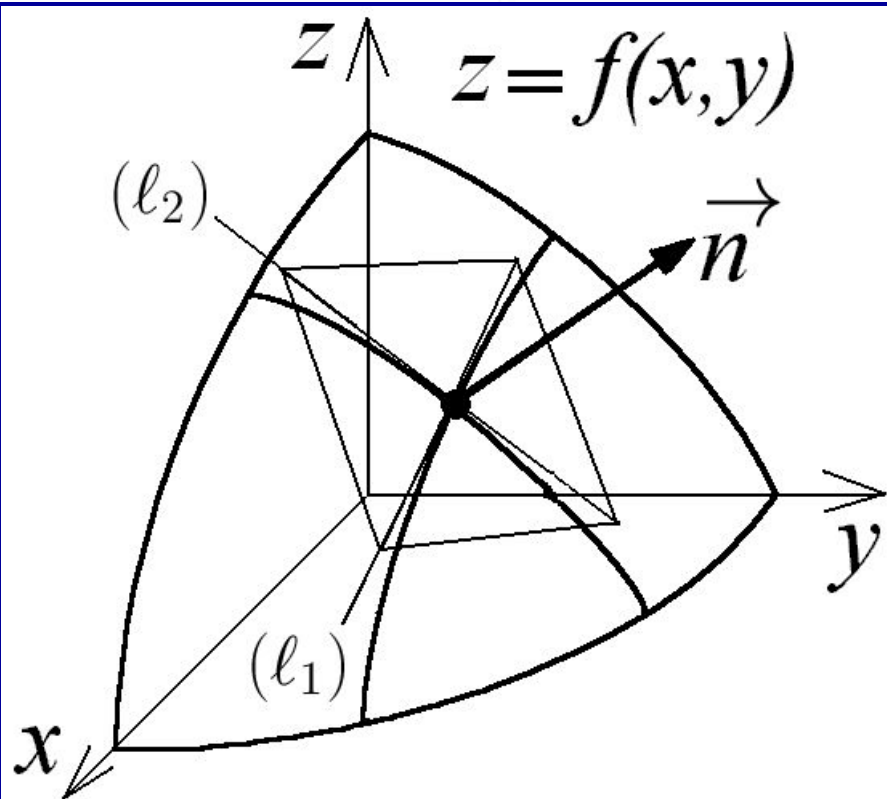
$$A = f'_x(x_o, y_o) \quad , \quad B = f'_y(x_o, y_o)$$



Определение. Вектор, перпендикулярный касательной плоскости, называется **нормалью** к поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) .

$$\vec{n} = \{A, B, -1\} = \{f'_x(M_0), f'_y(M_0), -1\}; \quad \vec{n} \perp (\Pi)$$

$$\vec{n} \parallel (l_3) : \frac{x - x_0}{f'_x(M_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(M_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$



Пусть задана $z = f(x, y)$. От точки $M_o(x_o, y_o) \in (S)$ отступаем в новую точку $M(x, y)$:

$$\Delta x = x - x_o ; \quad \Delta y = y - y_o$$

Тогда полное приращение функции $z = f(x, y)$ есть

$$\Delta z = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o) = f(x, y) - f(x_o, y_o)$$

Определение. Функция $z = f(x, y)$ называется **дифференцируемой** в точке (x_o, y_o, z_o) , если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \gamma(x, y)$$

$A, B - \text{const}$

функция $\gamma(x, y)$ есть бесконечно малая при $M \rightarrow M_o$, т.е.

$$\text{при } \Delta x \rightarrow 0 \text{ и } \Delta y \rightarrow 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \implies \gamma(x, y) \rightarrow 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \implies \frac{\gamma(x, y)}{\Delta x} \rightarrow 0, \quad \frac{\gamma(x, y)}{\Delta y} \rightarrow 0$$

$$\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0 \implies \frac{\gamma(x, y)}{\rho(M, M_o)} \rightarrow 0$$

$$\text{где } \rho(M, M_o) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

т.е. бесконечно малыми являются функции

$$\frac{\gamma(x, y)}{\Delta x}, \quad \frac{\gamma(x, y)}{\Delta y}, \quad \frac{\gamma(x, y)}{\rho(M, M_o)}$$

Теорема 4. Если $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в точке $M_o(x_o, y_o)$ и в ее окрестности OM_o , то $z = f(x, y)$ является дифференцируемой функцией, причем

$$A = f'_x(M_o) , \quad B = f'_y(M_o)$$

Определение. Величина

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y$$

называется **полным дифференциалом** функции $z = f(x, y)$ в точке $M_o(x_o, y_o)$. Тогда

$$\Delta z = dz + \gamma(x, y)$$

и поэтому

$$dz \approx \Delta z$$

Замена Δz на dz называется **линеаризацией** функции $z = f(x, y)$, являющаяся заменой поверхности $z = f(x, y)$ на ее касательную плоскость.

