Случайные фракталы

Пензенский государственный
университет

Содержание

Введение

Фракталы, получаемые с помощью L-систем или СИФ, обладают одним явным недостатком, ограничивающим их применение для моделирования естественных объектов. Они детерминированы. Хотя каждый может распознать кленовый лист, фактически, никакие два листа не будут в точности подобны друг другу. Одной из причин такого положения вещей является то, что случайность есть неотъемлемое свойство реального мира.

Случайные возмущения

Рис. 1. Рандомизированная снежинка Коха.

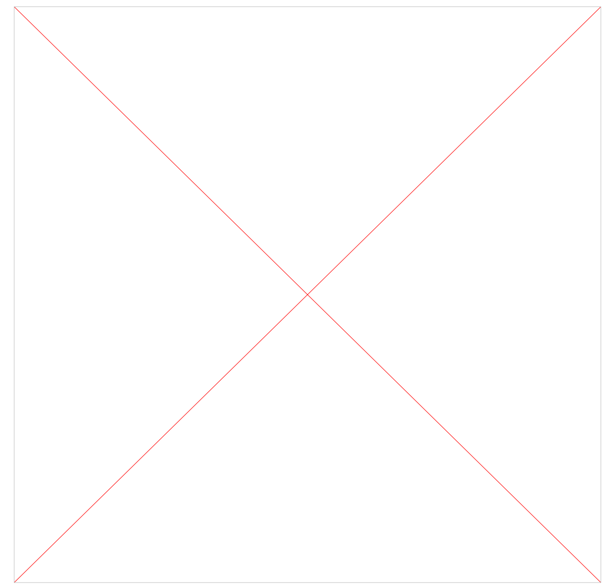


Рис. 2. Рандомизированный ковер Серпинского.

Броуновское движение

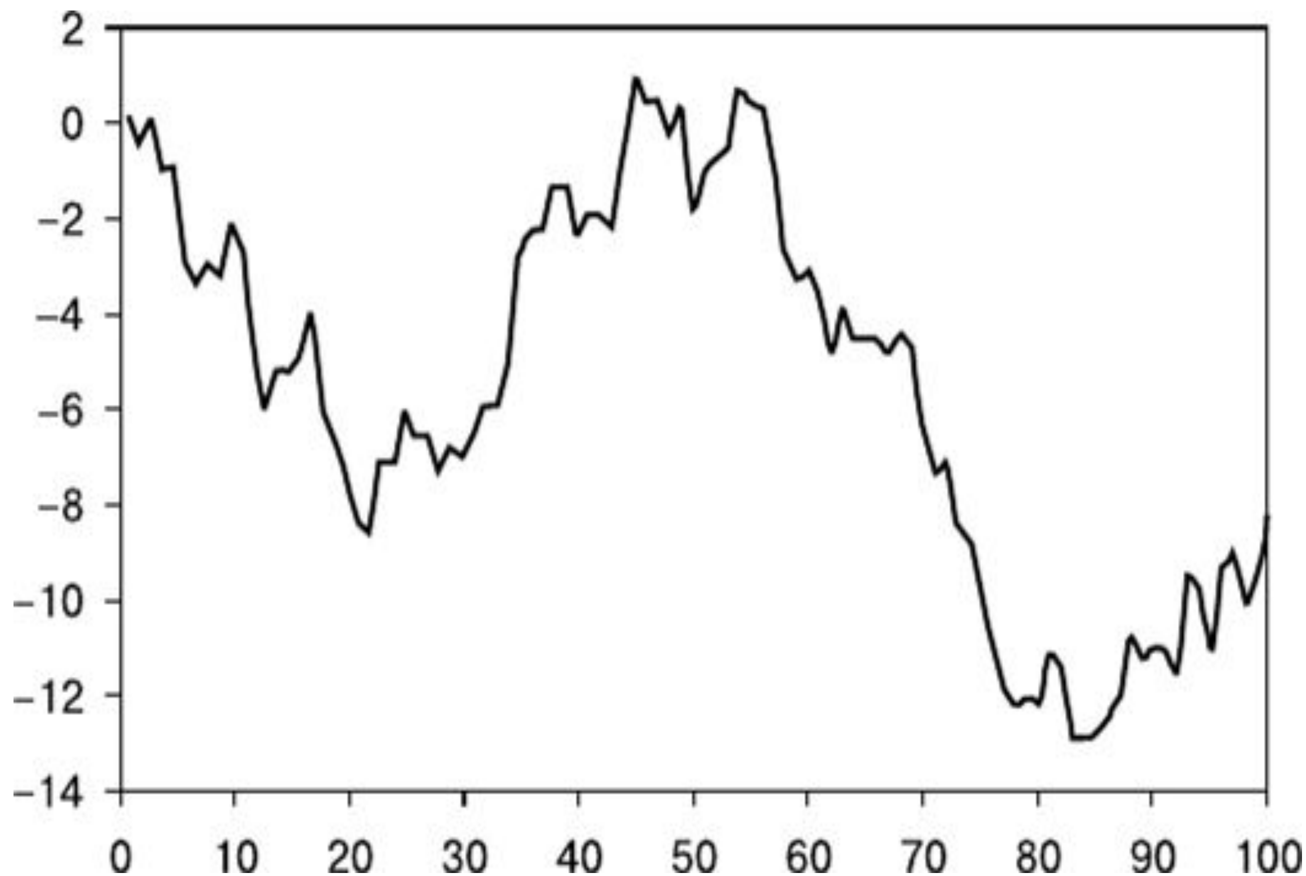
- Простейшей дискретной аппроксимацией броуновского движения служит одномерное случайное блуждание. В этом случае частица первоначально располагается в точке $x_0 = 0$ на прямой. Случайное блуждание происходит итеративно. Для каждого $n = 1,2,3,\ldots$ положим $x_n = x_{n-1} + g_n$, где g_n - случайные величины, имеющие гауссовское, или нормальное распределение.

Гауссово случайное блуждание

- Гауссовское случайное блуждание легко реализуется на компьютере. Единственная сложность – необходим генератор гауссовских случайных чисел. Если имеется генератор равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных чисел, то вполне приемлемое приближение можно получить, используя формулу:

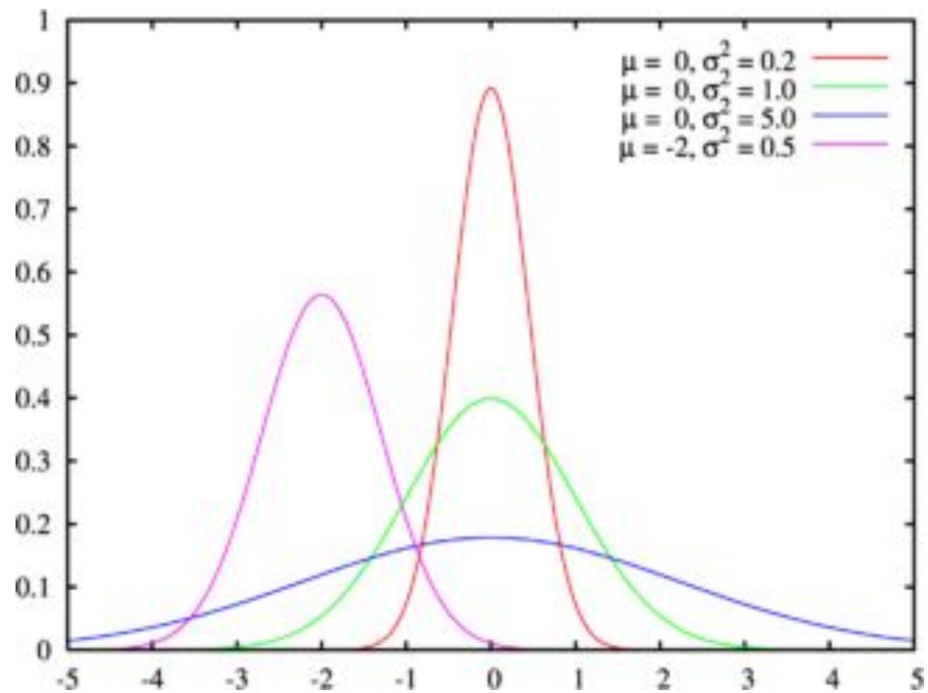
$$g = \sum^{12} u_i - 6\,.$$

Гауссово случайное блуждание



Гауссовский процесс

- **Определение.** Случайный процесс $X(t)$ называется гауссовским, если для каждого конечного набора моментов времени $t_1, t_2, \ldots, t_n$ вектор $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ имеет гауссовское распределение.



Классическое броуновское движение

- **Определение.** Гауссовский процесс $X(t)$ называется одномерным броуновским движением, или винеровским процессом на интервале $[a,b]$, если он обладает следующими свойствами:

$X(0)=0$ и функция $X(t)$ почти всегда непрерывна;

Случайная величина $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$, где $t_2 > t_1$, имеет гауссово распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2(t_2 - t_1)$, где σ - положительная константа.

Свойства

- **Закон дисперсии и стационарность.** Из определения вытекает закон дисперсии для приращений броуновского движения $D[X(t_2) - X(t_1)] = \sigma^2|t_2 - t_1|$, для любых t_2 и t_1 из интервала $[a, b]$.

Свойство независимости приращений. Броуновское движение обладает независимыми приращениями в том смысле, что если $0 \leq t_1 \leq t'_1 \leq \ldots \leq t_k \leq t'_k \leq 1$, то $X(t_1) - X(t'_1), \ldots, X(t_k) - X(t'_k)$ являются независимыми случайными величинами.

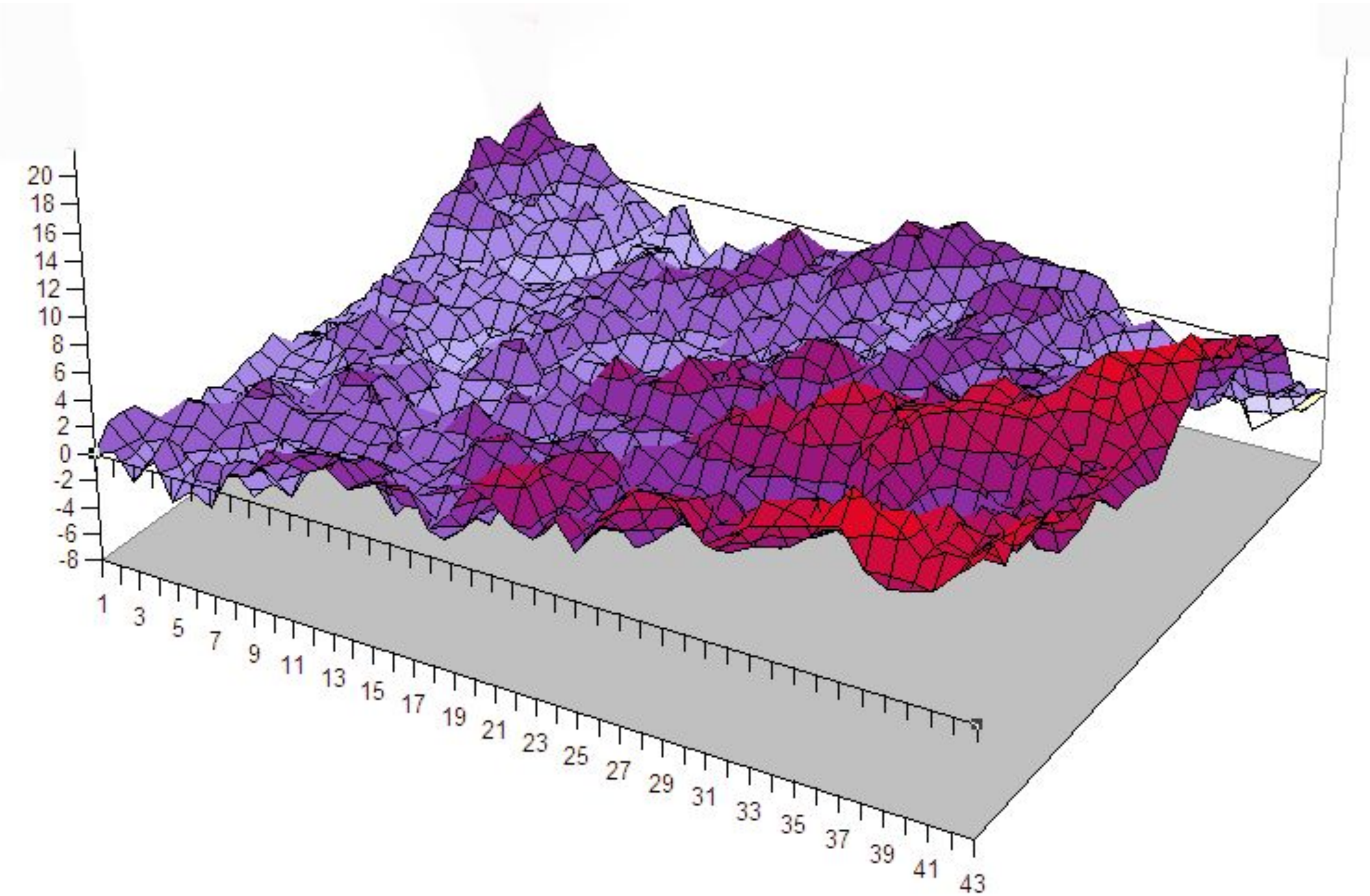
Марковское свойство. Броуновское движение есть марковский процесс.

Теоремы

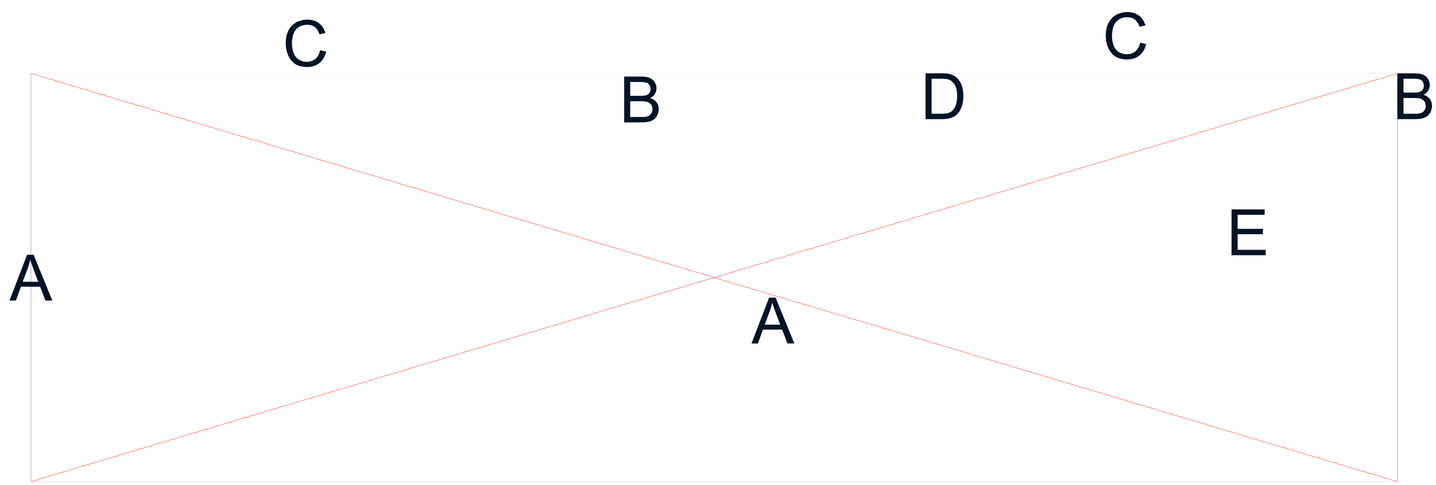
- **Теорема (о величине приращений).** *Пусть* $X(t)$ *- БД на интервале* $[a, b]$. *Тогда математическое ожидание приращения равно* $E[|X(t_2) - X(t_1)|] = \sqrt{2/\pi}\sigma\sqrt{|t_2 - t_1|}$. *Таким образом, БД* $X(t)$ *не дифференцируемо.*

Теорема (о статическом самоподобии). *Приращение реализации БД обладает свойством статического самоподобия, то есть:*

Броуновская поверхность



Срединные смещения. Кривая



- $$X(C) = 1/2\big(X(A) + X(B)\big) + \sigma g,$$
  $$X(D) = 1/2\big(X(A) + X(C)\big) + \sigma g,$$
  $$X(E) = 1/2\big(X(C) + X(B)\big) + \sigma g,$$

Срединные смещения. Поверхность

- $X(G) = 0{,}25 * \big(X(A) + X(B) + X(E) + X(F)\big) + gr,$
  $X(H) = 0{,}25 * \big(X(B) + X(C) + X(D) + X(E)\big) + gr,$
  $X(I) = 0{,}25 * \big(X(B) + X(H) + X(E) + X(G)\big) + gr,$

Фрактальное броуновское движение

- **Определение.** Гауссовский процесс $X(t)$ называется *фрактальным броуновским движением* с параметром $H, 0 < H < 1$, если он обладает следующими свойствами:

1. $X(0) = 0$ и функция $X(t)$ почти всегда непрерывна;
2. Случайная величина $\Delta X = X(t_2) - X(t_1)$,

имеет гауссово распределение с математическим ожиданием 0 и дисперсией $\sigma^2(t_2 - t_1)^{2H}$, где $t_2 > t_1$, σ - положительная константа.

Свойства

- **Закон дисперсии и стационарность.** Из определения вытекает закон дисперсии для приращений БД $D[X(t_2)-X(t_1)] = \sigma^2|t_2 - t_1|^{2H}$, для любых t_2 и t_1 из интервала $[a,b]$.

Свойство независимости приращений. Пусть $X(t)$ - фрактальное броуновское движение с параметром $H, 0 < H < 1$. Приращения $X(t)$ независимы тогда и только тогда, когда $H = 1/2$.

Немарковское свойство. Фрактальное броуновское движение **не является** марковским процессом, за исключением случая $H = 1/2$.

Теоремы

Теорема (о величине приращений). *Пусть* $X(t)$ *- ФБД* с параметром $H, 0 < H < 1$. *Тогда математическое ожидание приращения равно* $E[|X(t_2) - X(t_1)|] = \sqrt{2/\pi}\sigma|t_2 - t_1|^H$. *Следовательно, ФБД* $X(t)$ *не дифференцируемо.*

Теорема (о статическом самоподобии). *Приращение реализации ФБД обладает свойством статического самоподобия, то есть для любого* $r > 0$ *имеет место:*

$$\boldsymbol{X(t+\Delta t) - X(t) \triangleq \frac{1}{r^H}(X(t+r\Delta t) - X(t))}.$$

Размерность реализации:

$$\ln N(\Delta t)$$

Фурье-анализ ФБД

- Пусть $X(t)$ описывает ФБД. Рассмотрим функцию $X(t,T)$:

$$X(t,T) = \begin{cases} X(t), \text{если } 0 \le t \le T, \\ 0, \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Преобразование Фурье функции $X(t,T)$ есть:

$$\hat{X}(f,T) = \int_0^T X(t)e^{-2\pi i f t}dt.$$

Спектральная плотность функции $X(t)$ есть

$$S_x(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\left|\hat{X}\,(f,T)\right|^2.$$

Оценка спектральной плотности ФБД

- Одна из основных теорем говорит о степенном росте спектральной плотности как функции частоты.

Теорема. *Пусть функция* $X(t)$ *описывает фрактальное броуновское движение с параметром* $H, 0 < H < 1$. *Тогда для спектральной плотности имеем:*

$$S(f) \propto \frac{1}{f^{\beta}}, \qquad \beta = 2H + 1.$$

Определение ДПФ

- Предположим, что известны значения сигнала $X(t), 0 \le t \le T$, в n точках: $t_n = n\Delta t$, $n = 0,1, \dots N-1, \Delta t = \frac{T}{N}$. Пусть $X_n = X(t_n)$ и N - четно. Мы хотим использовать N отсчетов сигнала $X(t)$ для аппроксимации такого же числа значений функции $\hat{X}(f)$: $f_n = \frac{n}{N\Delta t}$, $n = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1 \dots \frac{N}{2}$. Тогда

$$\hat{X}(f_n) = (\Delta t) \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-\frac{2\pi i k n}{N}} = (\Delta t)\hat{X}_n,$$

здесь $\hat{X}_n$ называется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ) отсчетов $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$.

Матрично-векторная форма ДПФ

- Введем $\varsigma_N = e^{-2\pi i/N}$. ДПФ можно трактовать как преобразование из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. В матрично-векторной форме это линейное отображение записывается как $\hat{x} = Ax$, где

$$x = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_{N-1} \end{bmatrix}, \qquad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{X}_0 \\ \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varsigma & \varsigma^2 & \cdots & \varsigma^{(N-1)} \\ 1 & \varsigma^2 & \varsigma^4 & \cdots & \varsigma^{2(N-1)} \end{bmatrix}.$$

Определение обратного ДПФ

- Можно проверить, что $A\bar{A} = NI$, где I – единичный оператор. Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{N}\bar{A}.$$

Это приводит к формуле обратного ДПФ

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}_k \, e^{+2\pi i k n/N}.$$

Фильтрация Фурье

- Моделирование начинается с создания вектора, который является ДПФ предполагаемого ФБД. После этого осуществляется ОДПФ этого вектора, что и дает требуемое ФБД, которое обозначается как $\{X_n\}_{n=0}^{N-1}$. Для того чтобы величины X_n были вещественными, необходимо потребовать $\hat{X}_n = \overline{\hat{X}_{N-n}},\ n = 1,2,\dots\frac{N}{2},\ \hat{X}_0 = \overline{\hat{X}_0}$.

  Фильтрация относится к той части моделирования, когда мы заставляем коэффициенты преобразования удовлетворять степенному закону:

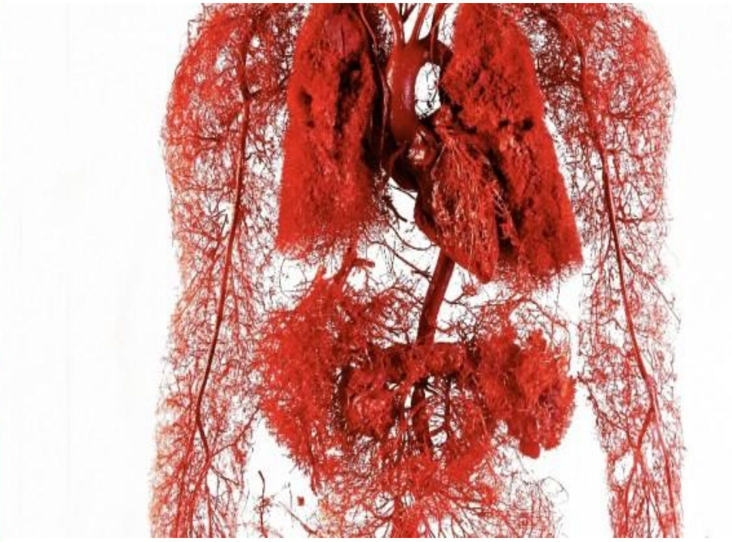
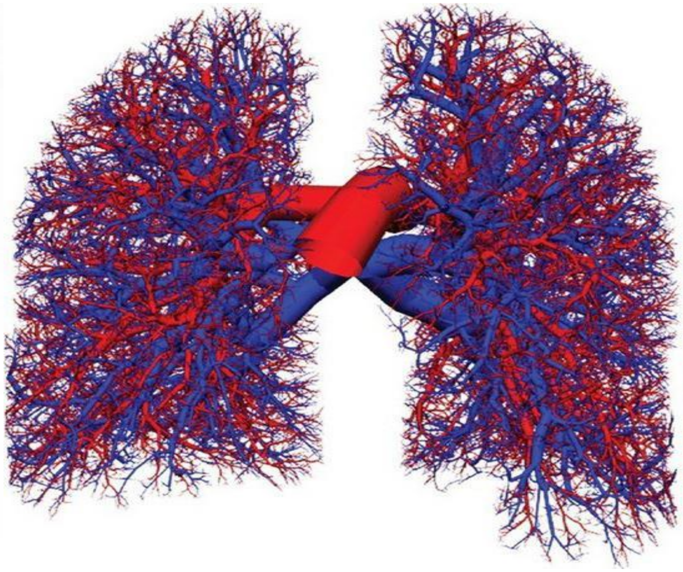
$$|\hat{X}_n|^2 \propto \frac{1}{n^{2H+1}}.$$

Моделирование растений и графических объектов

Случайные фракталы применяются для моделирования растений и разных графических объектов, например, горных массивов.

Применение в медицине

- Человеческий организм состоит из множества фрактальных структур: кровеносная система мышцы, бронхи и т.д.
- Теория фракталов может применяться для анализа электрокардиограмм и для обработки медицинских рентгеновских изображений

Моделирование турбулентного движения

- Изучение турбулентности в потоках очень хорошо подстраивается под фракталы. Турбулентные потоки хаотичны и поэтому их сложно точно смоделировать. И здесь помогает переход к из фрактальному представлению, что сильно облегчает работу инженерам и физикам, позволяя им лучше понять динамику сложных систем.

Спасибо за внимание!